Mieczysław Lubański

Klasy ilorazowe i podziały

Studia Philosophiae Christianae 8/2, 37-50

1972

Studia Philosophiae Christianae
ATK
8/1972/2

MIECZYSŁAW LUBAŃSKI

KLASY ILORAZOWE I PODZIAŁY

1. Wstęp. 2. Podział zbioru. 3. Zbiór ilorazowy. 4. Podział zbioru a zbiór ilorazowy. 5. Konstrukcja zbioru ilorazowego a czynność abstrahowania. 6. Uwaga końcowa.

1. Wstęp.

Wyraz podział albo klasyfikacja (terminów tych używać będziemy zamiennie) może być rozumiany co najmniej dwojako. Po pierwsze: w znaczeniu rzeczowym (kiedy chodzi o samą czynność dokonywania fizycznego wyodrębniania jednych przedmiotów spośród drugich), po drugie: w znaczeniu logicznym (kiedy wyodrębniamy myślnie podzespoły danej klasy obiektów) [1]. Nas interesuje podział w znaczeniu logicznym.

Każda klasyfikacja (w znaczeniu logicznym) jest dokonywana w oparciu o pewną zasadę podziału. Jeden i ten sam zespół pewnych elementów można rozmaicie klasyfikować zależnie od przyjętej zasady podziału. Klasyfikowanie jest zaliczane do wstępnych czynności wiedzotwórczych [2]. Uważa się, że klasyfikacja spełnia, co najmniej, potrójne zadanie: 1° porządkuje materiał poznawczy nauki, 2° umożliwia opis klasyfikacyjny danego przedmiotu rozważanej nauki, 3° wskazuje na celowość

[1] Por. np. T. Kotarbiński, Elementy teorii poznania, logiki formalnej i metodologii nauk. Wrocław — Warszawa — Kraków 1961,[2] 356.

[2] Por. K. Pasenkiewicz, Logika ogólna, Warszawa 1968, 238—239.

wprowadzania nowych pojęć do danej nauki. Przez to przyczynia się do rozwoju danej nauki oraz do rozbudowywania jej terminologii. Jest więc zabiegiem wiedzotwórczo ważnym [3].

Z drugiej strony, w matematyce, powszechnie stosuje się zabieg polegający na tworzeniu podklas danego zbioru [4] przy pomocy danej relacji równoważności. Skoro już zostały utworzone tzw. klasy abstrakcji relacji równoważności, konstruuje się z danego zbioru nowy zbiór, który zwie się zbiorem ilorazowym, ze względu na daną relację równoważności. W ten sposób postępuje się np. w przypadku konstruowania ze zbioru liczb naturalnych klasy liczb całkowitych, ze zbioru liczb całkowitych klasy liczb wymiernych, ze zbioru liczb wymiernych klasy liczb rzeczywistych. Zawsze odnosimy się tu do odpowiedniej relacji równoważności zachodzącej dla wyjściowego zbioru, z którego rozpoczyna się konstrukcja nowych tworów matematycznych [5].

Wydaje się być czym innym problem klasyfikacji, czym innym zaś konstruowanie klas ilorazowych w oparciu o relację równoważności, zachodzącą dla elementów zbioru wyjściowego. Jednakże, w samej rzeczy, nie są to istotnie różne zabiegi. Celem artykułu jest wskazanie na zachodzące wzajemne zależności między wspomnianymi zabiegami naukotwórczymi.

2. Podział zbioru

Rozpoczniemy od przypomnienia określenia podziału, albo klasyfikacji.

Definicja 2. 1. Niech dany będzie zbiór niepusty A. Klasa jego zbiorów A_i, $i = 1, 2 \ldots, n$, nazywa się podziałem danego zbioru, jeżeli spełnione są następujące dwa warunki:

---

[3] Jak wyżej, 244.

[4] Terminów „zbiór" oraz „klasa" używać będziemy w tym artykule, ze względów stylistycznych, zamiennie.

[5] Zob. np. H. Rasiowa, Wstęp do matematyki współczesnej, Warszawa 1968, 85—91.

1° $A_i \cdot A_j = O$ dla $i \neq j$ (warunek rozłączności),
2° $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$ (warunek adekwatności).

Warunek pierwszy mówi, że podzbiory A_i są parami rozłączne. Warunek drugi głosi, że suma wszystkich podzbiorów daje cały zbiór wyjściowy A.

Przykłady podziałów: 1) Zbiór wszystkich ludzi sklasyfikujemy, jeżeli do jednej klasy zaliczymy wszystkich mężczyzn, do drugiej zaś — wszystkie kobiety. Zasadą podziału jest tutaj własność: być tej samej płci. Dwa elementy x oraz y rozważanego zbioru należą do jednej i tej samej klasy wtedy i tylko gdy x oraz y są tej samej płci. Nietrudno spostrzec, że warunki 1° oraz 2° definicji 2.1. są spełnione.

2) Zbiór ludzi sklasyfikujemy, jeżeli wydzielimy w nim trzy klasy następująco: klasę pierwszą stanowić będą ci wszyscy, którzy posiadają stałe zameldowanie w jakimś mieście wojewódzkim; klasę drugą te osoby, które są zameldowane na stałe w mieście powiatowym; klasę trzecią osoby zameldowane na stałe w jakimś innym mieście, osadzie, czy wiosce. Zasadą podziału jest tu własność: posiadać stałe zameldowanie w danego rodzaju mieście. Jest widoczne, że oba warunki, wymagane przez definicję 2.1 są spełnione.

Najprostszym rodzajem podziału logicznego jest tzw. podział dychotomiczny, czyli dwudzielny. W tym przypadku dany zbiór dzieli się na dwie klasy w ten sposób, że do jednej klasy zalicza się te i tylko te elementy, które posiadają daną cechę (względnie zespół cech), do drugiej zaś elementy pozostałe, tj. nie posiadające danej cechy (względnie danego zespołu cech). Tutaj zasadą podziału jest interesująca nas cecha (względnie zespół cech).

Zachodzi następujące

Twierdzenie 2.2. Niech dane będą dwa podziały niepustego zbioru A. Niech podział pierwszy będzie realizowany przez klasę podzbiorów $\{A_i\}$, zaś podział drugi — przez klasę podzbiorów $\{B_j\}$. Utwórzmy nową klasę podzbiorów $\{C_k\}$, gdzie $C_k = A_i \cdot B_j$, dla wszystkich możliwych par i, j. Wówczas klasa C_k stanowi podział zbioru A.

Dowód. Warunek rozłączności dla zbiorów C_k wynika łatwo z zachodzenia tegoż warunku zarówno dla zbiorów A_i oraz B_j. Podobnie warunek adekwatności spełniony i dla pierwszego i dla drugiego podziału implikuje spełnienie się go także dla rozważanego nowego podziału C_k.

Istotnie, niech $C_k = A_i \cdot B_j$, $C_p = A_q \cdot B_r$, gdzie $k \neq p$, czyli $(i, j) \neq (q, r)$, a więc bądź $i \neq q$, bądź $j \neq r$, bądź i jedno i drugie. Wówczas, przyjmując $i \neq q$, będziemy mieć $C_k \cdot C_p = (A_i \cdot B_j) \cdot (A_q \cdot B_r) = (A_i \cdot A_q) \cdot (B_j \cdot B_r) = O \cdot (B_j \cdot B_r) = O$, zgodnie ze znanymi prawami algebry zbiorów. Podobnie dowodzi się w pozostałych przypadkach. A więc warunek 1° definicji 2.1 jest spełniony przez klasę podzbiorów C_k.

Z definicji podzbiorów C_k wynika, że dla każdego k istnieją takie i oraz j, że $C_k \subset A_i$ oraz $C_k \subset B_j$. Zatem będziemy mieć: $C_1 + C_2 + \cdots + C_s = A_1 \cdot B_1 + A_1 \cdot B_2 + \cdots + A_1 \cdot B_t + A_2 \cdot B_1 + A_2 \cdot B_2 + A_2 + B_3 + \cdots + A_2 \cdot B_t + \cdots + A_u \cdot B_1 + A_u \cdot B_2 + \cdots + A_u \cdot B_t = A_1 \cdot (B_1 + B_2 + \cdots + B_t) + A_2 \cdot (B_1 + B_2 + \cdots + B_t) + \cdots + A_u \cdot (B_1 + B_2 + \cdots + B_t) = A_1 \cdot A + A_3 \cdot A + \cdots + A_u \cdot A = (A_1 + A_2 + \cdots + A_u) \cdot A = A \cdot A = A$. Zatem warunek 2° definicji 2 · 1 jest również spełniony.
również spełniony.

Przyjmuje się następującą umowę:

Definicja 2. 3. Podział zbioru A, o którym jest mowa w twierdzeniu 2.2, nosi nazwę iloczynu dwu podziałów danego zbioru.

Przykład. Rozważmy zbiór wszystkich ludzi. Zastosujmy jako zasadę podziału spełnienie się obu warunków wymienionych w podziałach z przykładu 1) oraz 2). Otrzymany nowy podział zbioru wszystkich ludzi, będący iloczyn dwu pierwszych podziałów. Składać się on będzie z 6 elementów: klasy mężczyzn posiadających stałe zameldowanie w jakimś mieście wojewódzkim, klasy kobiet zameldowanych na stałe w jakimś mieście wojewódzkim, klasy mężczyzn zameldowanych na stałe w jakimś mieście powiatowym, klasy kobiet zameldowanych na stałe w jakimś mieście powiatowym, klasy mężczyzn posiadających stałe zameldowanie w jakiejś innego rodzaju (niż wyżej wymienione) miejscowości, klasy kobiet zameldowanych na stałe w jakiejś innej (niż wyżej wymienione) miejscowości.

Można mówić o podpodziale danego podziału, względnie o podziale subtelniejszym w stosunku do danego podziału. Terminologię tę precyzuje następująca

Definicja 2.4. Podział $[B_i]$ zbioru A nazywa się subtelniejszy od podziału $[C_j]$ zbioru A (inaczej: jest jego podpodziałem), jeżeli dla każdego wskaźnika i istnieje taki wskaźnik j, że podzbiór B_i jest zawarty w podzbiorze C_j (wskaźniki i oraz j przebiegają pewne, na ogół różne, ilości elementów).

Z definicji 2.4 i 2.3 oraz twierdzenia 2.2 wynika następujące

Twierdzenie 2.5. Iloczyn dwu podziałów danego zbioru jest podpodziałem każdego z podziałów składowych.

3. Zbiór ilorazowy.

Teraz, z kolei, przejdziemy do omówienia konstrukcji zbioru ilorazowego. W tym celu przypomnimy najpierw pojęcie relacji równoważności.

Definicja 3.1. Niech R będzie relacją dwuczłonową, określoną w jakimś zbiorze A. Relację R nazywa się równoważnością, jeżeli spełnione są następujące trzy warunki:

1) dla każdego $x \in A$ zachodzi xRx,

2) dla każdych dwu elementów $x, y \in A$ zachodzi implikacja: jeżeli xRy, to yRx,

3) dla każdych trzech elementów $x, y, z \in A$ ma miejsce wynikanie: jeżeli xRy oraz yRz, to xRz.

Jeżeli relacja R spełnia warunek pierwszy, nazywa się relacją zwrotną, jeżeli spełnia warunek drugi — relacją symetryczną, jeżeli warunek trzeci — relacją przechodnią. Można więc powiedzieć, że R jest relacją równoważności wtedy i tylko, gdy R jest zarazem relacją zwrotną, symetryczną i przechodnią.

Przykładów relacji równoważności można podawać bardzo dużo. Wśród zbioru wszystkich ludzi relacja określona następująco: posiadać ten sam wzrost, jest relacją równoważności. Zachodzenie wymaganych trzech warunków w definicji 3.1 jest widoczne. Podobnie relacje równości liczb, przystawania figur geometrycznych, równoległości prostych na płaszczyźnie, równolegości płaszczyzn w przestrzeni są relacjami równoważności, co łatwo jest sprawdzić.

Zamiast relacja równoważności mówi się także krótko równoważność.

Przypuśćmy teraz, że dany mamy jakiś niepusty zbiór A i relację równoważności (dwuargumentową) R określoną w tym zbiorze. Umówmy się zaliczać do jednej klasy te elementy x zbioru A, między którymi zachodzi równoważność R. Dla dowolnego $a \in A$ zbiór tych wszystkich $x \in A$, które pozostają z elementem a w relacji R oznaczać będziemy przez $[a]$. Zwykle zbiór $[a]$ zwie się warstwą zbioru A utworzoną przez element $a \in A$. Element a zwie się reprezentantem warstwy $[a]$. Ze zwrotności relacji R wynika, że $a \in [a]$. Jeżeli jakiś element $b \in [a]$, to wówczas $[b] = [a]$. Rzeczywiście. Niech bowiem jakiś $x \in [a]$. Wówczas jest xRa. Skoro zaś $b \in [a]$, to jest także bRa. Ale z symetrii relacji R wynika, że zachodzi także aRb. Wobec tego, z obu warunków: xRa oraz aRb, na mocy przechodniości relacji R wynika xRb. znaczy to, że $x \in [b]$, czyli klasa $[a]$ jest zawarta w klasie $[b]$. Zupełnie podobnie wykazuje się, że klasa $[b]$ jest zawarta w klasie $[a]$. Mamy zatem $[a] = [b]$. Przeto różne warstwy nie posiadają parami elementów wspólnych, są więc parami rozłączne. Jednocześnie suma wszystkich warstw, które tworzy dana relacja równoważności w zbiorze A daje, oczywiście, cały zbiór A. Otrzymujemy więc

Twierdzenie 3.2. Każda relacja równoważności R zadana w zbiorze A określa jego podział na klasy.

Zazwyczaj zbiór warstw zbioru A otrzymanych przy pomocy pewnej relacji równoważności R, określonej dla elementów rozważanego zbioru, oznacza się przez A/R. Zbiór ten zwie się zbiorem ilorazowym, albo klasą ilorazową (dokładniej: zbiorem (klasą) ilorazowym (ilorazową) wyznaczonym (wyznaczoną) przez daną relację równoważności).

Można mówić o odwzorowaniu zbioru A na zbiór ilorazowy A/R, określonym następująco: dowolnemu elementowi x zbioru A przyporządkowuje się warstwę [x], do której on należy. Odwzorowanie to nazywa się odwzorowaniem kanonicznym zbioru A na zbiór A/R.

Przykłady: 1) Relacja równości między liczbami wyznacza podział na klasy. Do jednej warstwy zalicza się liczby równe między sobą. Zbiór ilorazowy składa się tu z tego rodzaju warstw.

2) Relacja równoległości między płaszczyznami w przestrzeni wyznacza podział na klasy. Do jednej warstwy zalicza się klasę płaszczyzn wzajemnie do siebie równoległych. Zbór ilorazowy tutaj jest złożony ze wszystkich tego rodzaju warstw.

3) Niech dany będzie jakiś zbiór Z, składający się z dowolnej liczby elementów, przy czym zakładamy jedynie, że każdy z nich jest bądź czerwony, bądź zielony. Zaliczmy do jednej klasy wszystkie te i tylko te przedmioty, które są tego samego koloru. Jest widoczne, że otrzymany w ten sposób podział danego zbioru Z na dwie warstwy. Relacja: być tego samego koloru, jest, oczywiście, równoważnością. Tutaj zbór ilorazowy składa się tylko z dwu elementów.

Wspomnijmy, że warstwy wyznaczone przez daną relację równoważności R noszą także nazwę klas abstrakcji relacji R. Posługując się tą terminologią powiemy, że w przykładach 1) oraz 2) klas abstrakcji jest nieskończenie wiele, natomiast w przykładzie 3), jak to widzieliśmy przed chwilą, są jedynie dwie klasy abstrakcji (rozpatrywanych odpowiednio relacji równoważności).

Było już wspomniane we Wstępie, że przy pomocy pewnej relacji równoważności, zachodzącej między liczbami naturalnymi, konstruuje się liczby całkowite. Dla wyrazistości rozważań przypomnijmy pokrótce interesującą nas konstrukcję.

Niech N oznacza zbiór liczb naturalnych. Rozważać będziemy elementy iloczynu kartezjańskiego, czyli produktu, zbioru N przez siebie. Inaczej mówiąc rozważać będziemy wszystkie pary uporządkowane postaci (m, n), gdzie m oraz n są liczbami naturalnymi. Wśród zbioru wspomnianych par uporządkowanych liczb naturalnych określmy relację R w sposób następujący. Powiemy: dwie pary (m, n) oraz (p, q) pozostają do siebie w relacji R, jeżeli $m + q = n + p$, czyli jeżeli pierwsze elementy rozważanych par różnią się od siebie tak samo, jak drugie elementy tych par. Korzystając ze znanych własności działania dodawania liczb naturalnych (łączność i przemienność) oraz relacji identyczności =, łatwo jest wykazać, że określona wyżej relacja R jest zwrotna, symetryczna i przechodnia. Jest więc relacją równoważności [6].

Z twierdzenia 3.2 wynika, że relacja R dzieli produkt $N \times N$ na klasy abstrakcji, czyli warstwy. Te właśnie klasy abstrakcji rozpatrywanej relacji R nazywa się liczbami całkowitymi.

Przyporządkujmy klasie o reprezentancie $(x + a, x)$, gdzie a jest pewną ustaloną liczbą naturalną, zaś x dowolną liczbą naturalną, liczbę a. Otrzymujemy wówczas odpowiedniość wzajemnie jednoznaczną między wspomnianej postaci klasami a liczbami naturalnymi. Klasy te nazwijmy liczbami całkowitymi dodatnimi. Klasa postaci (x, x) wyznacza liczbę całkowitą zero. Klasa postaci $(x, x + a)$ wyznacza liczbę całkowitą ujemną —a. W ten sposób otrzymujemy wszystkie liczby całkowite: dodatnie, ujemne i liczbę zero.

Z przedstawionej tu konstrukcji widać, że (ściśle rzecz biorąc) liczby naturalne nie są, jak to zwykle się mówi, szczególnym przypadkiem liczb całkowitych. Liczby całkowite są innego typu bytami niż liczby naturalne. Należy więc odróżniać liczbę naturalną 3 od liczby całkowitej dodatniej 3. Podobnie rzecz się ma z liczbami całkowitymi oraz ułamkami postaci p/q,

---

[6] Jak wyżej, 88.

gdzie p jest podzielone przez q. Nie należy utożsamiać liczby całkowitej c z ułamkiem postaci cr/r. Liczba całkowita c oraz ułamek postaci cr/r są innego typu bytami. Ułamek cr/r jest klasą abstrakcji pewnej relacji równoważności zachodzącej między liczbami całkowitymi, podobnie jak sama liczba całkowita c jest klasą abstrakcji podanej wyżej relacji równoważności zachodzącej wśród liczb naturalnych. Z drugiej strony, oczywiście, ma miejsce izomorfizm (ze względu na działania arytmetyczne) między liczbami naturalnymi a liczbami całkowitymi dodatnimi oraz między liczbami całkowitymi c a ułamkami postaci cr/r.

Przechodzimy obecnie do przedyskutowania związku zachodzącego między operacją podziału zbioru a konstrukcją zbioru ilorazowego.

4. Podział zbioru a zbiór ilorazowy

Przypuśćmy, że mamy dany jakiś podział zbioru niepustego A. Zatem spełnione są warunki 1° oraz 2° definicji 2.1. Pamiętamy, że każdy podział jest dokonywany w oparciu o pewną zasadę podziału. Przy jej pomocy są wydzielone podzbiory A_i danego zbioru A, które są elementami dokonanego podziału. Zdefiniujmy teraz relację R następująco. Zachodzi ona między dwoma elementami x oraz y ze zbioru A wtedy i tylko gdy elementy te należą do tego samego podzbioru A_i. Jest widoczne, że tak określona relacja R jest zwrotna, symetryczna i przechodnia. Jest więc relacją równoważności. W ten sposób otrzymujemy następujące proste

Twierdzenie 4.1. Każda zasada podziału dowolnego niepustego zbioru A wyznacza pewną relację równoważności zachodzącą między elementami danego zbioru.

Z drugiej strony, jeżeli mamy daną relację równoważności w zbiorze A, to ona określa podział tego zbioru na warstwy (twierdzenie 3.2.). Konsekwentnie można dalej mówić o zbiorze ilorazowym w stosunku do danej relacji równoważności. I odwrotnie, jeżeli mamy do czynienia ze zbiorem ilorazowym A/R, to tym samym dany jest podział danego zbioru A, jak również relacja R. Zachodzi więc obustronna implikacja między relacją równoważności a zbiorem ilorazowym. Konkludujemy przeto

Twierdzenie 4.2. Zbiór ilorazowy wyznacza jednoznacznie pewną relację równoważności.

Zgodnie z twierdzeniem 3.2 równoważność określa podział danego zbioru. Podział natomiast pozwala sformułować zasadę klasyfikacji elementów rozpatrywanego zbioru. Otrzymujemy zatem

Twierdzenie 4.3. Zbór ilorazowy wyznacza zasadę podziału danego zbioru.

W ten sposób dochodzimy do interesującego nas związku. Każdy podział wyznacza pewną relację równoważności. Każda relacja równoważności wyznacza podział zbioru. Albo inaczej: każda zasada podziału pozwala utworzyć zbiór ilorazowy. Każdy zbiór ilorazowy, dający podział zbioru rozpatrywanego, pozwala sformułować odpowiednią zasadę podziału. Widzimy więc, że oba zabiegi poznawcze: dokonywanie podziału zbioru oraz konstrukcja zbioru ilorazowego są, w zasadzie, jednym i tym samym, ściślej, są między sobą równoważne.

Zwróćmy jeszcze uwagę na aspekt epistemologiczny rozpatrywanego zagadnienia. Dzięki temu uzyska się pełniejsze ujęcie całej problematyki. Strona formalna zagadnienia nie będzie jedynym omawianym aspektem problemu.

5. Konstrukcja zbioru ilorazowego a czynność abstrahowania

W tym celu przypomnijmy najpierw, że termin „abstrakcja“, bądź też przymiotnik „abstrakcyjny“, posiada wiele znaczeń. Mówi się przecież i o pojęciach konkretnych i o pojęciach abstrakcyjnych, ale także i o rozumowaniach konkretnych i o rozumowaniach abstrakcyjnych, jak również i o naukach konkretnych i o naukach abstrakcyjnych itd. Ten stan rzeczy wydaje się być konsekwencją pochodzenia samego terminu „abstrakcja" względnie „abstrakcyjny". Etymologicznie trzeba tu sięgnąć do wyrazu łacińskiego abstraho, co po polsku znaczy odrywam. I to właśnie co zostało „oderwane" nosi nazwę „oderwanego" czyli „abstrakcyjnego". „Przedmioty oderwane" czyli „abstrakty" mogą być rozumiane dwojako. A więc bądź jako cechy czy stosunki myślowo oderwane od pewnego konkretu, bądź jako to, co zostaje z danego konkretu po oderwaniu odeń jakichś cech. Przykładem pierwszego rodzaju abstraktów może służyć np. pojęcie czerwieni, zieleni. Przykładem drugiego — pojęcie człowieka w ogóle, pojęcia dęba w ogóle.[7]

Uwzględniając złożoność istniejących konkretnych przedmiotów można sprawę przedstawić następująco: „Jeśli każda rzecz jest kompleksem wielu elementów, to w tej wielości elementów, składających się na rzecz, są elementy konstytuujące i elementy pochodne, wyemanowane; elementy „noszące" i „noszone". Proces ujawniania elementów konstytutywnych — czyli formy rzeczy, która po „ujawnieniu się", a więc po oderwaniu od niej związanych z nią elementów jednostkowo-materialnych (taka oto długość, grubość, barwa skóry, włosa itp.) staje się „ogólną", poznawalną — nazywa się właśnie procesem abstrakcji. Abstrakcja w nas odbywa się bądź spontanicznie, bądź też z rozmysłem".[8]

Od strony logicznej można nadto wśród cech abstraktów wyróżnić cechy pierwotne oraz wtórne. Cechy pierwotne to będą te, które do swego określenia nie wymagają odwołania się do innych pojęć. W przypadku przeciwnym — noszą nazwę cech wtórnych. Jako przykład cech pierwszego rodzaju może służyć pojęcie długości, jako drugich — pojęcie gęstości. Cechy wtórne bywają nazywane także cechami pochodnymi [9].

Na interesuje zagadnienie związku zachodzącego między konstruowaniem klasy ilorazowej, a czynnością abstrahowania.

---

[7] T. Kotarbiński, dz. cyt., 73—74.

[8] M. A. Krąpiec, Metafizyka, Poznań 1966, 77—78.

[9] Por. K. Ajdukiewicz, Logika pragmatyczna, Warszawa 1965, 255—256.

Albo w sformułowaniu równoważnym: zagadnienie związku zachodzącego między klasyfikacją a abstrahowaniem. Albo jeszcze inaczej: zagadnienie związku zachodzącego między relacją równoważności a abstrahowaniem. W celu przedstawienia tego problemu zacytujemy fragmenty wypowiedzi logika oraz matematyka. Są one tak przejrzyste, że nie wymagają żadnego komentarza. A oto one:

„Tak przeto przedmioty, które posiadają wspólną własność w postaci stosunku jednoznacznego łączącego każdy z nich z jakimś jedynym przedmiotem, są ze względu na ową wspólną własność sobie równe. Na odwrót, każdą równość można rozłożyć na iloczyn względny stosunku jednoznacznego i jego odwrotności, gdzie w członie pośrednim występuje wspólna własność przysługująca przedmiotom równym. Takie wyodrębnienie owej wspólnej własności nosi nazwę abstrakcji (jako logiczny odpowiednik abstrakcji psychologicznej), a prawem abstrakcji nazywamy twierdzenie, według którego zawsze i tylko, jeżeli między elementami pewnego zbioru zachodzi stosunek symetryczny, zwrotny i przechodni, istnieje własność wspólna przedmiotom należącym do pola stosunku i charakteryzująca te przedmioty; przez abstrakcję uzyskuje się pojęcie dowolnej liczby jako wspólnej własności klas równolicznych, pojęcie jednakowej temperatury jako wspólnej własności ciał pozostających w równowadze termicznej itp.“ [10]

„Z podziałem na klasy wiąże się jedna z najciekawszych własności umysłu ludzkiego: zdolność do abstrahowania, polegająca na tym, że pomija się różnice między elementami tej samej klasy, a klasy ujmuje się jako nowe indywidua („abstrahuje się od różnic indywidualnych“). Na pierwszy rzut oka zdawałoby się, że abstrahowanie zubaża świat pojęć, lecz jest właśnie przeciwnie: większość pojęć (np. matematycznych) powstała i powstaje przez przechodzenie do przestrzeni ilorazowej X/R względem relacji równoważności R. [...] Przykładów z „życia“ (pozamatematycznego) jest legion: na odpowiednich

[10] T. Czeżowski, Logika, Warszawa 1968 [2], 161.

zbiorach relacje takie, jak jednakowo ciężki, jednakowo długi, równego wieku, jednakowej barwy, jednakowo ciepły, prowadzą do takich „abstrakcyjnych" pojęć, jak ciężar, długość, wiek, barwa, temperatura itd." [11]

Stwierdzamy więc, że abstrahowanie oraz konstruowanie klasy ilorazowej są czynnościami równoważnymi. W ten sposób powiększa się ciąg odpowiednich równoważności. Wśród jego członków można wymienić zarówno posiadanie zasady podziału, jak i odpowiedniej relacji równoważności, tworzenia klasy ilorazowej, czy też czynności abstrahowania.

6. Uwaga końcowa

Z powiedzianego wyżej widzimy, że tak zdawałoby się różne pojęcia jak podział zbioru (inaczej klasyfikacja), relacja równoważności, zbiór ilorazowy, abstrakcja są ze sobą ściśle powiązane. Stanowią ciąg równoważnych między sobą pojęć. Ujmując rzecz od strony formalnej należy zauważyć, że gdy się mówi o relacji równoważności określonej w danym zbiorze oraz o zasadzie podziału danego zbioru, to wówczas zarówno relacja równoważności jak i zasada podziału „działają" na produkcie danego zbioru przez siebie. Natomiast dokonanie klasyfikacji względnie skonstruowanie klasy ilorazowej daje „nowy" twór „abstrakcyjny".

Klasyfikacja rozumowań jest jednym z ważnych, a zarazem trudnych, problemów naukowych. Wydaje się, że wskazanie na zachodzący ciąg równoważności może służyć pewną pomocą przy niektórych rozważaniach odnoszących się do wspomnianego zagadnienia. Zarazem daje „negatywną" normę odnośnie do prawidłowości dokonywanych klasyfikacji. A to często jest praktycznie ważne.

Zwroty: „podział zbioru", „zbiór ilorazowy", „abstrakcja" mogą być traktowane jako wyrażenia wzięte z różnych języ-

[11] K. Maurin, Analiza, Część I, Elementy, Warszawa 1971, 18—19.

ków. Wyrażenia te, jak już wiemy, są wzajemnie przekładalne. Powstaje pytanie czy jest rzeczą możliwą zbudować ogólną teorię, dla której wymienione języki byłyby modelami. Chodziłoby tu o pewną analogię, jaka zachodzi między cybernetyką a fizjologią, elektroniką, systemami ekonomicznymi. Jeśli nazwalibyśmy, dla krótkości, fizjologię, elektronikę, systemy ekonomiczne językami, to cybernetyka w stosunku do nich jest ogólną teorią, one zaś jej modelami. Czy coś podobnego da się uczynić w odniesieniu do zagadnienia, którym zajmowaliśmy się w tym artykule? Wydaje się, że budowanie teorii „scalających" różne dziedziny jest warte uwagi badawczej.

FAKTORKLASSEN UND BEGRIFFSZERLEGUNGEN

(Zusammenfassung)

In der Logik spricht man von der Begriffszerlegung (oder Klassifikation), in der Mathematik, — von den Faktorklassen, in der Philosopie — von der Abstraktion. Es scheint, dass die Klasssifikation, das Konstruieren der Faktorklassen mit der Hilfe der Aequivalenzrelation und die Abstraktion etwas ganz anderes sind. In der Wirklichkeit doch, die ausgezählten Erkenntnisverfahren essentiell nicht verschiedene Operationen sind. Im Artikel zeigt man die Wechselrelationen welche hier gelten. Speziell beweisst man dass sie äquivalent sind.

Es scheint, dass die Bemerkungen dieses Artikels wegen dem Klassifikationsproblem der Denkarten Hilfe leisten mögen. Man kann hier mindestens die so genannte negative Norm erreichen.

Man stellt ein Problem: kann man eine allgemeine Theorie, für welche die Klassifikation, die Faktorklassen und die Abstraktion als Modelle gelten, schaffen? Für dieses Problem haben wir einen Analogon in der Kybernetik. Solcher Art ihre Beziehung zur Physiologie, Elektronik und der ekonomischen Systeme ist.