Edward Nieznański

Elementarna teoria systemów porządkowych

Studia Philosophiae Christianae 9/1, 207-217

1973

Studia Philosophiae Christianae
ATK
9/1973/1

EDWARD NIEZNAŃSKI

ELEMENTARNA TEORIA SYSTEMÓW PORZĄDKOWYCH [1]

I. Teoria zbiorów uporządkowanych jest wykładana jako dział teorii mnogości lub jako fragment nieelementarnego rachunku logicznego zbiorów i relacji. Zostanie tu wykazane, że elementarną (czyli pierwszego rzędu) teorią zbiorów uporządkowanych jest sylogistyka arystotelesowa [2].

II. Rozwiązania proponujemy wprowadzać w czterech etapach. Najpierw (pod 1) zdefiniować elementarne rachunki

1 W niniejszym artykule zostały wykorzystane między innymi: (1) aksjomatyka sylogistyki podana (na s. 124) w A. Mostowski, *Logika matematyczna,* Warszawa—Wrocław, 1948; (2) występujące w tym samym podręczniku (rozdz. XIII) pojęcie przedmiotów o danej bazie; (3) metody morfologicznego definiowania rachunków zawarte w H. Rasiowa and R. Sikorski, *The Mathematics of Metamathematics,* Warszawa, 1963; (4) pojęcie konkatenacji wprowadzone aksjomatycznie (na s. 24—25) w A. Tarski, *Pojęcie prawdy w językach nauk dedukcyjnych,* Warszawa, 1933; (5) aksjomatyczna metodologia nauk dedukcyjnych Alfreda Tarskiego; (6) metody posługiwania się strukturalno-opisowym metajęzykiem wyłożone w R. M. Martin, *Truth and Denotation,* Chicago, 1958.

2 Mamy tu na myśli sylogistykę bez negacji nazwotwórczej, zawierającą prawa kwadratu logicznego, konwersji i niezawodne tryby sylogistyczne.

w sposób w tym sensie czysto formalny, że w oderwaniu od znaczeń, które ewentualnie są kojarzone z pierwotnymi wyrazami właściwymi tych rachunków i bez ustalania zakresu zmienności znaków zmiennych. Następnie, wydaje się celowym, z jednej strony (pod 2) określić w języku zermelowskiej teorii mnogości pojęcie systemu porządkowego, a z drugiej (pod 3) — pojęcie modelu semantycznego, by w końcu (pod 4) wykazać, że właśnie systemy porządkowe są modelami semantycznymi określonych na wstępie rachunków.

1. Elementarne rachunki τ i τ^*

Rachunki τ i τ^* zostaną tu określone w oparciu o szereg definicji pomocniczych.

Df. 1 W metajęzyku, którym się obecnie posłużymy, **n** oznacza **u** $\equiv$ **n** jest pierwszym, a **u** jest drugim elementem w jednej z następujących par: ⟨„ix", „x"⟩, ⟨„igrek", „y"⟩, ⟨„zet", „z"⟩, ⟨„As", „A"⟩, ⟨„Os", „O"⟩, ⟨„Is", „I"⟩, ⟨„Es", „E"⟩, ⟨„neg", „∼"⟩, ⟨„kon", „∧"⟩, ⟨„imp", „→"⟩, ⟨„ekw", „≡"⟩, ⟨„id", „="⟩, ⟨„sig", „Σ"⟩, ⟨„pi", „Π"⟩, ⟨„Cn", operacja logicznej konsekwencji⟩, ⟨„⌢", konkatenacja⟩, ⟨„akc", „′"⟩, ⟨„nl", „("⟩, ⟨„np", „)"⟩

Df. 2 $V = (\frown Z) W_{1-2}(Z)$, gdzie $W_1(Z) \equiv ix \varepsilon Z$, $W_2(Z) \equiv (\Pi v \varepsilon Z)\,[(v \frown akc) \varepsilon Z]$, $W_{1-2}(Z) \equiv [W_1(Z) \wedge W_2(Z)]$, $a \varepsilon (\frown X)\,\varphi(X) \equiv (\Pi X)\,[\varphi(X) \rightarrow a \varepsilon X]$. Klasa V będzie później (pod 3) interpretowana jako klasa znaków zmiennych. Będziemy również odtąd używali jako skrótów: igrek dla $ix \frown akc$, zet dla $ix \frown akc \frown akc$

Df. 3 $P = \{As, Es, Is, Os\}$.

Df. 4 $F = \{imp, ekw, kon\}$.

Df. 5 $Q = \{sig, pi\}$.

Df. 6 $S = \{V, F, Q, \{As, id, neg, nl, np\}\}$.

Df. 7 $S^* = \{V, F, Q, P, \{id, neg, nl, np\}\}$.

Rodziny zbiorów S i S* możemy nazywać słownikami. A ponieważ suma wszystkich elementów rodziny S zawiera się w sumie wszystkich elementów rodziny S*, o słowniku S* mówimy, że jest rozszerzeniem słownika S.

Df. 8 $\Phi = (\frown Z)\, W_{1-5}(Z)$, gdzie:

$W_1(Z) \equiv (\Pi a,b \varepsilon V)\, [(a^\frown id^\frown b)\varepsilon Z]$,

$W_2(Z) \equiv (\Pi a,b \varepsilon V)\, [(As^\frown a^\frown b)\varepsilon Z]$,

$W_3(Z) \equiv (\Pi \alpha \varepsilon Z)\, [(neg^\frown nl^\frown \alpha^\frown np)\varepsilon Z]$,

$W_4(Z) \equiv (\Pi \varrho \varepsilon F)\, (\Pi \alpha,\beta \varepsilon Z)\, [(nl^\frown \alpha^\frown np^\frown \varrho^\frown nl^\frown \beta^\frown np)\varepsilon Z]$,

$W_5(Z) \equiv (\Pi a \varepsilon V)\, (\Pi f \varepsilon Q)$

$(\Pi \alpha \varepsilon Z)\, [(nl \;\; f \;\; a \;\; np \;\; nl \;\; \alpha \;\; np)\varepsilon Z]$,

$W_{1-5}(Z) \equiv [W_1(Z) \;\; \ldots \;\; W_5(Z)]$.

Df. 9 $\Phi^* = (\frown Z)\, [W_1(Z) \wedge W_2^*(Z) \wedge W_3(Z) \wedge W_4(Z) \wedge W_5(Z)]$, gdzie $W_2^*(Z) \equiv (\Pi a, b \varepsilon V)\, (\Pi g \varepsilon P)\, [(g \;\; a \;\; b)\varepsilon Z]$, a pozostałe warunki jak w Df. 8. Zbiory Φ i Φ^* możemy nazywać klasami formuł. A ponieważ Φ zawiera się w Φ^*, o klasie Φ^* mówimy, że jest rozszerzeniem zbioru Φ.

Df. 10 $L = \langle S, \Phi \rangle$.

Df. 11 $L^* = \langle S^*, \Phi^* \rangle$.

Obie pary L i L^* możemy nazywać językami. A ponieważ S^* jest rozszerzeniem S oraz Φ^* jest rozszerzeniem Φ, o języku L^* mówimy, że jest rozszerzeniem języka L.

Df. 12 $B = \{As^\frown ix^\frown ix,\; nl^\frown As^\frown ix^\frown igrek^\frown kon^\frown As^\frown igrek^\frown ix^\frown np^\frown imp^\frown ix^\frown id^\frown igrek,\; nl^\frown As^\frown igrek^\frown zet^\frown kon^\frown As^\frown ix^\frown igrek^\frown np^\frown imp^\frown As^\frown ix^\frown zet\}$.

Df. 13 $D = \{Is^\frown ix^\frown igrek^\frown ekw^\frown nl^\frown sig^\frown zet^\frown np^\frown nl^\frown As^\frown zet^\frown ix^\frown kon^\frown As^\frown zet^\frown igrek^\frown np,\; Es^\frown ix^\frown igrek^\frown ekw^\frown neg^\frown nl^\frown Is^\frown ix^\frown igrek^\frown np,\; Os^\frown ix^\frown igrek^\frown ekw^\frown neg^\frown nl^\frown As^\frown ix^\frown igrek^\frown np\}$.

Klasę D zamierzamy przy tym rozumieć i stosować tylko jako zbiór odpowiednich tautologii logicznych skróconych według założonej zasady skracania:

$nl^\frown sig^\frown c^\frown np^\frown nl^\frown As^\frown c^\frown a^\frown kon^\frown As^\frown c^\frown b^\frown np$ przez $Is^\frown a^\frown b$, $neg^\frown nl^\frown sig^\frown c^\frown np^\frown nl^\frown As^\frown c^\frown a^\frown kon^\frown As^\frown c^\frown b^\frown np$ przez $Es^\frown a^\frown b$, $neg^\frown nl^\frown As^\frown a^\frown b^\frown np$ przez $Os^\frown a^\frown b$, dla wszelkich $a, b, c \varepsilon V$.

Df. 14 $\tau = \langle L, Cn, B \rangle$.

Df. 15 $T = CnB$.

Df. 16 $\tau^* = \langle L^*, Cn, B \cup D \rangle$.

Df. 17 $T^* = Cn(B \cup D)$.

Trójki uporządkowane τ i τ^* nazywamy rachunkami lub teoriami sformalizowanymi, a zbiory T i T^* — klasami twierdzeń tych teorii. Ponieważ $B \subset B \cup D$, a stąd $CnB \subset Cn(B \cup D)$, czyli $T \subset T^*$, o teorii τ^* mówimy, że jest rozszerzeniem teorii τ. Rozszerzenie to zresztą jest nieistotne, tzn. $\Phi \cap T^* = T$.

Definicje Df. 14 — Df. 17 określają rachunki istniejące w sposób abstrakcyjny. W postaci konkretnej mogą być przytoczone jedynie ich fragmenty. Oto, dla ilustracji, przykładowy fragment zbioru T^* rachunku τ^*:

B1. Axx.
B2. $(Axy \wedge Ayx) \rightarrow x = y$.
B3. $(Ayz \wedge Axy) \rightarrow Axz$.
D1. $Ixy \equiv (\Sigma z)\,(Azx \quad Azy)$.
D2. $Exy \equiv \sim(Ixy)$.
D3. $Oxy \equiv \sim(Axy)$.
T1. $(Azx \wedge Azy) \rightarrow Ixy$, $T1 \varepsilon Cn\{D1\}$.
T2. $Axy \rightarrow Ixy$, $T2 \varepsilon Cn\{T1, B1\}$.
T3. $Axy \rightarrow \sim(Exy)$, $T3 \varepsilon Cn\{T2, D2\}$.
T4 $Exy \rightarrow Oxy$, $T4 \varepsilon Cn\{T2, D2, D3\}$.
T5. $\sim(Ixy) \rightarrow Oxy$, $T5 \varepsilon Cn\{T4, D2\}$.
T6. $(Azy \wedge Ax'''z) \rightarrow Ax'''y$, $T6 \varepsilon Cn\{B3\}$
T7. $(Azy \wedge Ax'''z \wedge Ax'''x) \rightarrow (Ax'''x \wedge Ax'''y)$, $T7 \varepsilon Cn\{T6\}$.
T8. $(Azy \wedge (\Sigma x''')\,(Ax'''z \wedge Ax'''x)) \rightarrow (\Sigma x''')\,(Ax'''x \wedge Ax'''y)$, $T8 \varepsilon Cn\{T7\}$.
T9. $(Azy \wedge Izx) \rightarrow Ixy$, $T9 \varepsilon Cn\{T8, D1\}$.
T10. $Ixy \equiv Iyx$, $T10 \varepsilon Cn\{T9, B1\}$.
T11. $Exy \equiv Eyx$, $T11 \varepsilon Cn\{T10, D2\}$.
T12. $Axy \rightarrow Iyx$, $T12 \varepsilon Cn\{T2, T10\}$.
T13. $Exy \rightarrow Oyx$, $T13 \varepsilon Cn\{T4, T11\}$.
T14. $(Ayz \wedge Oxz) \rightarrow Oxy$, $T14 \varepsilon Cn\{B3, D3\}$.
T15. $(Ozy \wedge Azx) \rightarrow Oxy$, $T15 \varepsilon Cn\{B3, D3\}$.
T16. $(Ezy \wedge Ixz) \rightarrow Oxy$, $T16 \varepsilon Cn\{T9, D2, D3\}$.
T17. $(Eyz \wedge Axz) \rightarrow Exy$, $T17 \varepsilon Cn\{T9, D2\}$.

T18. $(Ezy \wedge Axz) \rightarrow Oxy$, $T18 \varepsilon Cn\{T16, T2\}$.
T19. $(Eyz \wedge Axz) \rightarrow Oxy$, $T19 \varepsilon Cn\{T18, T11\}$.
T20. $(Eyz \wedge Ixz) \rightarrow Oxy$, $T20 \varepsilon Cn\{T16, T11\}$.
T21. $(Ezy \wedge Axz) \rightarrow Exy$, $T21 \varepsilon Cn\{T17, T11\}$.
T22. $(Izy \wedge Azx) \rightarrow Ixy$, $T22 \varepsilon Cn\{T21, D2\}$.
T23. $(Ayz \wedge Ezx) \rightarrow Exy$, $T23 \varepsilon Cn\{T17, T11\}$.
T24. $(Iyz \wedge Azx) \rightarrow Ixy$, $T24 \varepsilon Cn\{T22, T10\}$.
T25. $(Eyz \wedge Izx) \rightarrow Oxy$, $T25 \varepsilon Cn\{T20, T10\}$.
T26. $(Ayz \wedge Exz) \rightarrow Exy$, $T26 \varepsilon Cn\{T23, T11\}$.
T27. $(Azy \wedge Ixz) \rightarrow Ixy$, $T27 \varepsilon Cn\{T9, T10\}$.
T28. $(Ezy \wedge Izx) \rightarrow Oxy$, $T28 \varepsilon Cn\{T16, T10\}$.
T29. $(Azy \wedge Axz) \rightarrow Ixy$, $T29 \varepsilon Cn\{B3, T2\}$.
T30. $(Ayz \wedge Exz) \rightarrow Oxy$, $T30 \varepsilon Cn\{T26, T4\}$.
T31. $(Ezy \wedge Azx) \rightarrow Oxy$, $T31 \varepsilon Cn\{T28, T2\}$.
T32. $(Ayz \wedge Azx) \rightarrow Ixy$, $T32 \varepsilon Cn\{T29, T10\}$.
T33. $(Ayz \wedge Ezx) \rightarrow Oxy$, $T33 \varepsilon Cn\{T30, T11\}$.
T34. $(Eyz \wedge Azx) \rightarrow Oxy$, $T34 \varepsilon Cn\{T25, T2\}$.

2. Systemy porządkowe

Pojęcie systemu porządkowego zostanie tu wprowadzone w oparciu o szereg definicji pomocniczych.

Df. 18 Rodzinę wszystkich zbiorów, których istnienie jest zagwarantowane na gruncie zermelowskiej teorii mnogości przez istnienie zbioru U, nazywamy rodziną zbiorów na bazie U i oznaczamy symbolem Z_U. (W takim razie np. $U \varepsilon Z_U$, $2^U \varepsilon Z_U$, $U^n \varepsilon Z_U$, $X \subset 2^{2U} \rightarrow X \varepsilon Z_U$, $U \cup 2^U \varepsilon Z_U$, itd).

Df. 19 $SystRel_U = \{\langle X, R\rangle : X \varepsilon Z_U \wedge X \neq \Lambda \wedge R \subset X^2\}$.

Zbiór $SystRel_U$ nazywamy klasą systemów relacyjnych na bazie U z jedną relacją dwuczłonową. Jeżeli przy tym $\langle X, R\rangle \varepsilon SystRel_U$, to pierwszy element tej pary, **X**, nazywamy uniwersum systemu relacyjnego. Przykładami systemów relacyjnych określonych w Df. 19 są chociażby te oto pary:

S1. $\langle \mathbf{X_1}, R_1\rangle \varepsilon SystRel_{U_1}$, gdy bazą U_1 jest zbiór **wszystkich** liczb rzeczywistych, uniwersum $\mathbf{X_1}$ stanowi klasa liczb **natu-**

ralnych, a R_1 jest relacją niewiększości obciętą do uniwersum, czyli $R_1 = \{\langle x, y\rangle \varepsilon X_1^2 : x \leqslant y\}$.

S2. $\langle X_2, R_2\rangle \varepsilon \mathrm{SystRel}_{U2}$, gdy bazą U_2 jest klasa ludzi, uniwersum $X_2 = 2^{U^2}$, a $R_2 = \{\langle x, y\rangle \varepsilon X_2 : x \quad y\}$.

S3. $\langle X_3, R_3\rangle \varepsilon \mathrm{SystRel}_{U3}$, gdy bazą U_3 jest klasa formuł Φ określona w Df. 8, $X_3 = \{H \varepsilon 2^{\Phi} : CnH = H\}$, a $R_3 = \{\langle G, H\rangle \varepsilon X_3^2 : G \quad CnH\}$.

S4. $\langle X_4, R_4\rangle \varepsilon \mathrm{SystRel}_{U4}$, gdy $U_4 = X_4$ jest zbiorem wszystkich pracowników, powiedzmy ATK, a $R_4 = \{\langle x, y\rangle \varepsilon X_2^4$: x jest zwierzchnikiem y-ka$\}$.

S5. $\langle X_5, R_5\rangle \varepsilon \mathrm{SystRel}_{U5}$, gdy U_5 jest n-elementowym $(n > 3)$ zbiorem określonych przedmiotów, $X_5 = \{a_1, a_2, a_3\}$, gdzie $a_1, a_2, a_3 \varepsilon U_5$ i $R_5 = \{\langle a_1, a_1\rangle, \langle a_2, a_2\rangle, \langle a_3, a_3\rangle, \langle a_1, a_2\rangle, \langle a_2, a_3\rangle, \langle a_1, a_3\rangle\}$.

S6. $\langle X_6, R_6\rangle \varepsilon \mathrm{SystRel}_{U6}$, gdy U_6 jest klasą zdarzeń w określonym przedziale czasu, $\varrho = \{\langle x, y\rangle \varepsilon U_6^2$: x, y przebiegają równocześnie$\}$, $X_6 = U_6/\varrho$ (klasa ilorazowa bazy względem relacji współwystępowania zdarzeń), $R_6 = \{\langle G, H\rangle \varepsilon X_6^2 : (\Sigma x \varepsilon G)\,(\Sigma y \varepsilon H)$ (x przebiega nie później niż y)$\}$.

Df. 20 $\mathrm{zwr}(X) = \{R \varepsilon 2^{X^2} : (\Pi a \varepsilon X)\,(\langle a, a\rangle \varepsilon R)\}$.
Zbiór zwr(X) nazywamy klasą relacji zwrotnych w zbiorze X.

Df. 21 $\mathrm{antysym}(X) = \{R \varepsilon 2^{X^2} : (\Pi a,b \varepsilon X)\,(\langle a,b\rangle, \langle b,a\rangle \varepsilon R \rightarrow a = b)\}$.
Zbiór antysym(X) nazywamy klasą relacji antysymetrycznych w zbiorze X.

Df. 22 $\mathrm{przech}(X) = \{R \varepsilon 2^{X^2} : (\Pi a,b,m \varepsilon X)(\langle m,b\rangle, \langle a,m\rangle \varepsilon R \rightarrow \langle a,b\rangle \varepsilon R)\}$.
Zbiór przech (X) nazywamy klasą relacji przechodnich w zbiorze X.

Df. 23 $\mathrm{porz}\,(X) = \mathrm{zwr}(X) \cap \mathrm{antysym}(X) \cap \mathrm{przech}(X)$.
Zbiór porz (X) nazywamy klasą relacji porządkujących[3] zbiór X.

3 Relacje nazwane tu porządkującymi są czasem nazywane w literaturze logicznej relacjami częściowo porządkującymi w odróżnieniu od tych, które będąc zwrotnymi, antysymetrycznymi i przechodnimi są ponadto spójnymi. Z innych względów są one też nazywane relacjami sła-

Df. 24 $\mathrm{SystPorz}_U = \{\langle X, R\rangle \varepsilon \mathrm{SystRel}_U : R \varepsilon \mathrm{porz}(X)\}$.
Zbiór $\mathrm{SystPorz}_U$ nazywamy klasą systemów porządkowych na bazie U. Podane pod S1—S6 przykłady systemów relacyjnych, jak łatwo sprawdzić, są równocześnie przykładami systemów porządkowych.

3. Semantyczne modele zbioru formuł

Określenie modelu (3.6) zostanie poprzedzone omówieniem kilku niezbędnych pojęć: reprezentowania (3.1), wartościowania (3.2), denotowania (3.3), spełniania (3.4) i prawdziwości (3.5).

3. 1. Pojęcie reprezentowania

Przyjmujemy, że ogólnie rzecz biorąc, reprezentowanie jest niepustym iloczynem kartezjańskim o umowie ustalonej lewej i prawej dziedzinie. Przedmioty należące do lewej dziedziny relacji reprezentowania nazywamy znakami zmiennymi, a przedmioty należące do jej prawej dziedziny — wartościami zmiennych.

Df. 25 Tu przyjmujemy umowę, że relacją reprezentowania jest iloczyn kartezjański $V \times X$, gdy X jest uniwersum dowolnie wybranego systemu relacyjnego (V jest określone w Df. 2).

3. 2. Pojęcie wartościowania

Wartościowaniem, w ogóle, nazywamy każdy niepusty podzbiór relacji reprezentowania będący funkcją określoną na zbiorze wszystkich znaków zmiennych (określoną na lewej dziedzinie relacji reprezentowania). W takim razie (i w następstwie Df. 25) otrzymujemy:

Df. 26 Wartościowaniem jest każdy element klasy odwzorowań X^V, gdy X jest uniwersum dowolnie wybranego systemu relacyjnego. (Stąd X^V jest klasą wartościowań).

---

bo porządkującymi w odróżnieniu od relacji asymetryczno-przechodnich (porządkujących bez pętli, czyli przeciwzwrotnie).

3. 3. Pojęcie denotowania

Interpretacją bądź denotowaniem, w ogóle, nazywamy umownie ustalony niepusty zbiór par uporządkowanych będący funkcją różnowartościową o lewej dziedzinie rozłącznej względem lewej dziedziny reprezentowania. Elementy lewej dziedziny interpretacji nazywamy znakami stałymi, a elementy prawej dziedziny tej funkcji — denotatami stałych. Tu zinterpretujemy jedynie pierwotne stałe specyficzne rachunków τ i τ^*; interpretacja bowiem ich pozostałych znaków stałych jest zdeterminowana w znany sposób.

Df. 27 $\varphi = \{\langle As, R\rangle\}$, gdzie R jest relacją w dowolnie wybranym systemie relacyjnym.

3. 4. Pojęcie spełniania

Spełnianie jest relacją czteroczłonową zachodzącą między formułą, systemem relacyjnym, interpretacją i wartościowaniem. Oznaczamy ją symbolem $\models$,a napis $\langle X, R\rangle \models_{\varphi,\omega} \alpha$ czytamy: „formuła α jest spełniona w systemie relacyjnym $\langle X\ R\rangle$ przy interpretacji φ i wartościowaniu ω”. Przyjmując symbol $W\alpha$ na oznaczenie zbioru wszystkich zmiennych wolnych w formule α, spełnianie definiujemy indukcyjnie:

Df. 28 $\langle X, R\rangle \models_{\varphi,\omega} \gamma \equiv \langle\langle X, R\rangle, \varphi, \omega, \gamma\rangle \varepsilon SystRel_U \times \{\{\langle As, R\rangle\}\} \times X^V \times \Phi \wedge \langle\langle X, R\rangle, \varphi, \omega, \gamma\rangle \varepsilon (\frown Z) W_{1-9}(Z)$, gdzie:

$W_1(Z) \equiv (\Pi a, b \varepsilon V)\, [\langle\langle X, R\rangle, \varphi, \omega, a^\frown id^\frown b\rangle \varepsilon Z \equiv \omega(a) = \omega(b)]$,

$W_2(Z) \equiv (\Pi a, b \varepsilon V)\, [\langle\langle X, R\rangle, \varphi, \omega, As^\frown a^\frown b\rangle \varepsilon Z \equiv$
$\equiv \langle\omega(a), \omega(b)\rangle \varepsilon R]$,

$W_3(Z) \equiv (\Pi \alpha \varepsilon \Phi)\, [\langle\langle X, R\rangle, \varphi, \omega, neg^\frown nl^\frown \alpha^\frown np\rangle \varepsilon Z \equiv$
$\equiv \langle\langle X, R\rangle, \varphi, \omega, \alpha\rangle \notin Z]$,

$W_4(Z) \equiv (\Pi \alpha\beta \varepsilon \Phi)[\langle\langle X, R\rangle, \varphi, \omega, nl^\frown \alpha^\frown np^\frown imp^\frown nl^\frown \beta^\frown np\rangle \varepsilon Z \equiv$
$\equiv (\langle\langle X, R\rangle, \varphi, \omega, \alpha\rangle \notin Z \vee \langle\langle X, R\rangle, \varphi, \omega, \beta\rangle \varepsilon Z)]$,

$W_5(Z) \equiv (\Pi \alpha\beta \varepsilon \Phi)[\langle\langle X, R\rangle, \varphi, \omega, nl^\frown \alpha^\frown np^\frown kon^\frown nl^\frown \beta^\frown np\rangle \varepsilon Z \equiv$
$(\langle\langle X, R\rangle, \varphi, \omega, \alpha\rangle \varepsilon Z \quad \langle\langle X, R\rangle, \varphi, \omega, \beta\rangle \varepsilon Z]$,

$W_6(Z) \equiv (\Pi \alpha\beta \varepsilon \Phi)[\langle\langle X, R\rangle, \varphi, \omega, nl^\frown \alpha^\frown np^\frown ekw^\frown nl^\frown \beta^\frown np\rangle \varepsilon Z \equiv$
$\equiv (\langle\langle X, R\rangle, \varphi, \omega, \alpha\rangle \varepsilon Z \equiv \langle\langle X, R\rangle, \varphi, \omega, \beta\rangle \varepsilon Z)]$,

$W_7(Z) \equiv (\Pi \alpha \varepsilon \Phi)(\Pi v \varepsilon V - W\alpha)(\Pi f \varepsilon Q)[\langle\langle X, R\rangle, \varphi, \omega, nl^\frown f^\frown v$
$np^\frown nl^\frown \alpha^\frown np\rangle \varepsilon Z \equiv (\langle\langle X, R\rangle, \varphi, \omega, \alpha\rangle \varepsilon Z)],$
$W_8(Z) \equiv (\Pi \alpha \varepsilon \Phi)(\Pi v \varepsilon W\alpha)[\langle\langle X, R\rangle, \varphi, \omega, nl^\frown sig^\frown v^\frown np^\frown nl$
$\alpha^\frown np\rangle \varepsilon Z \equiv (\Sigma a \varepsilon X)(\langle\langle X, R\rangle, \varphi, \omega - \{\langle v, \omega(v)\rangle\} \cup$
$\cup \{\langle v, a\rangle\}, \alpha\rangle \varepsilon Z)],$
$W_9(Z) \equiv (\Pi \alpha \varepsilon \Phi)(\Pi v \varepsilon W\alpha)[\langle\langle X, R\rangle, \varphi, \omega, nl^\frown pi^\frown v^\frown np^\frown nl^\frown$
$\alpha^\frown np\rangle \varepsilon Z \equiv (\Pi a \varepsilon X)(\langle\langle X, R\rangle, \varphi, \omega - \{\langle v, \omega(v)\rangle\} \cup$
$\cup \{\langle v, a\rangle\}, \alpha\rangle \varepsilon Z)],$
$W_{1-9}(Z) \equiv W_1(Z) \ \ldots \ W_9(Z).$

3. 5. Pojęcie prawdziwości w systemie relacyjnym

Klasę formuł należących do Φ prawdziwych w systemie relacyjnym M przy interpretacji φ oznaczamy symbolem $E(M, \varphi)$ i odpowiednio dla Φ^* — symbolem $E(M, \varphi)^*$.

Df. 29 $M = \langle X, R\rangle \wedge M \varepsilon SystRel_U \wedge \varphi = \{\langle As, R\rangle\} \rightarrow$
$\rightarrow E(M, \varphi) = \{\alpha \varepsilon \Phi : (\Pi \omega \varepsilon X^V)(M \models_{\varphi, \omega} \alpha)\}.$

Df. 30 $M = \langle X, R\rangle \wedge M \varepsilon SystRel_U \wedge \varphi = \{\langle As, R\rangle\} \rightarrow$
$\rightarrow E(M, \varphi)^* = \{\alpha \varepsilon \Phi^* : (\Pi \omega \varepsilon X^V)(M \models_{\varphi, \omega} \alpha)\}.$

3. 6. Pojęcie semantycznego modelu[4] dla zbioru formuł

Klasę modeli na bazie U dla zbioru formuł $Z \subset \Phi^*$ oznaczamy symbolem $K_U(Z)$.

Df. 31 $K_U(Z) = \{\langle X, R\rangle \varepsilon SystRel_U :$
$\varphi = \{\langle As, R\rangle\} \wedge Z \subset E(\langle X, R\rangle, \varphi)^*\}.$

4 Na użytek logiki rozróżnia się zwykle modele sematyczne, syntaktyczne i algebraiczne. (Zob. np. L. Apostel, *Towards the Formal Study of Models in the Nonformal Sciences*, w: *The Concept and the Role of the Model in Mathematics and Natural and Social Sciences*, Dordrecht, 1961). Modele sematyczne czasami utożsamia się z tzw. semimodelami (systemami relacyjnymi przyporządkowanymi danemu rachunkowi przez określone relacje sematyczne) lub nawet z samymi systemami relacyjnymi. Rozróżnia się też niekiedy modele sematyczne jedno- i wielozakresowe (zależnie od ilości uniwersów w jednym modelu).

4. Systemy porządkowe jako modele rachunków τ i τ^*

Korzystając z pojęć dotąd wprowadzonych możemy już ściśle odnotować podstawowe twierdzenie pracy, że modelami rachunków τ i τ^* są systemy porządkowe: $K_U(T) = K_U(T^*) = \mathrm{SystPorz}_U$. Dowód tego twierdzenia oprzemy na kilku lematach.

L1. $\mathrm{CnE}(M, \varphi) \subset (E(M, \varphi)$, gdzie $M = \langle X, R \rangle \varepsilon \mathrm{SystRel}_U$ i $\varphi = \{\langle As, R \rangle\}$.

Dla dowodu tego lematu zauważmy, że jeżeli $\alpha \varepsilon \mathrm{CnE}(M, \varphi)$, bo istnieją: β, $(nl^\frown \beta^\frown np^\frown imp^\frown nl^\frown \alpha^\frown np) \varepsilon E(M, \varphi)$, to 1°. $(\Pi \omega \varepsilon X^V)(M \models_{\varphi,\omega} \beta)$ oraz 2°. $(\Pi \omega \varepsilon X^V)[M \models_{\varphi,\omega} (nl^\frown \beta^\frown np^\frown imp^\frown nl^\frown \alpha^\frown np)]$, czyli 3°. $(\Pi \omega \varepsilon X^V)(M \models_{\varphi,\omega} \beta \rightarrow M \models_{\varphi,\omega} \alpha)$ i —wobec 1° i 3°— $\alpha \varepsilon E(M, \varphi)$. Podobnie, jeśli $v \varepsilon V$ występuje w formule α jako zmienna wolna i $\alpha \varepsilon \mathrm{CnE}(M, \varphi)$, bo istnieje $\beta \varepsilon E(M, \varphi)$ ze zmienną $t \varepsilon V$ wolną w β, przy czym β tym tylko się różni od α, że w formule β występuje zmienna t jako wolna na wszystkich tych miejscach, na których występuje w α zmienna wolna v, to $\alpha \varepsilon E(M, \varphi)$.

L2. $B \subset D\ E(M, \varphi) \equiv T \subset E(M, \varphi)$, $M = \langle X, R \rangle \varepsilon \mathrm{SystRel}_U$, $\varphi = \{\langle As, R \rangle\}$. Zauważmy bowiem, że: $B \subset E(M, \varphi) \equiv$ $\equiv \mathrm{Cn}B \subset \mathrm{CnE}(M, \varphi) \equiv \mathrm{Cn}B \subset E(M, \varphi) \equiv T \subset E(M,$ $\varphi)$, bo L1 i Df. 15.

L3. $K_U(B) = K_U(T)$, bo Df. 31 i L2.

L4. $K_U(B) = \mathrm{Syst{,}Porz}_U$, bo:

$\langle X, R \rangle \varepsilon K_U(B) \equiv \langle X, R \rangle \varepsilon \mathrm{SystRel}_U \wedge \varphi = \{\langle As, R \rangle\} \wedge B \subset E(\langle X, R \rangle, \varphi) \equiv \langle X, R \rangle \varepsilon \mathrm{SystRel}_U \wedge \varphi = \{\langle As, R \rangle\} \wedge (As^\frown ix^\frown ix) \varepsilon E(\langle X, R \rangle, \varphi) \wedge (nl^\frown As^\frown ix^\frown igrek^\frown kon^\frown As^\frown igrek^\frown ix^\frown np^\frown imp^\frown ix^\frown id$ $igrek) \varepsilon E(\langle X, R \rangle, \varphi) \wedge (nl^\frown As^\frown igrek^\frown zet^\frown kon^\frown As^\frown ix^\frown igrek^\frown$ $np^\frown imp^\frown As^\frown ix^\frown zet) \varepsilon E(\langle X, R \rangle, \varphi) \equiv \langle X, R \rangle \varepsilon \mathrm{SystRel}_U \wedge \varphi =$ $= \{\langle As, R \rangle\} \wedge (\Pi \omega \varepsilon X^V)(\langle X, R \rangle \Vdash_{\varphi,\omega} As^\frown ix^\frown ix)$ $(\Pi \omega \varepsilon X^V)[\langle X, R \rangle \Vdash_{\varphi,\omega} (nl^\frown As^\frown ix^\frown igrek^\frown kon^\frown As^\frown igrek^\frown ix^\frown np^\frown imp^\frown ix^\frown id^\frown$ $igrek)] \wedge (\Pi \omega \varepsilon X^V)[\langle X, R \rangle \Vdash_{\varphi,\omega} (nl^\frown As^\frown igrek^\frown zet^\frown kon^\frown As^\frown$ $ix^\frown igrek^\frown np^\frown imp^\frown As^\frown ix^\frown zet)] \equiv \langle X, R \rangle \varepsilon \mathrm{SystRel}_U \wedge \varphi =$ $= \{\langle As, R \rangle\} \wedge (\Pi \omega \varepsilon X^V)(\langle \omega(ix), \omega(ix) \rangle \varepsilon R) \wedge (\Pi \omega \varepsilon X^V)[\langle X, R \rangle \models_{\varphi,\omega}$ $(As^\frown ix^\frown igrek) \wedge \langle X, R \rangle \Vdash_{\varphi,\omega} (As^\frown igrek^\frown ix) \rightarrow \langle X, R \rangle \Vdash_{\varphi,\omega} (ix^\frown$ $id^\frown igrek)] \wedge (\Pi \omega \varepsilon X^V)[\langle X, R \rangle \Vdash_{\varphi,\omega} (As^\frown igrek^\frown zet) \wedge \langle X, R \rangle \Vdash_{\varphi,\omega}$

$(\mathrm{As}^\frown \mathrm{ix}^\frown \mathrm{igrek}) \rightarrow \langle X, R\rangle \Vdash_{\varphi,\omega} (\mathrm{As}^\frown \mathrm{ix}^\frown \mathrm{zet})] \equiv \langle X, R\rangle \varepsilon \mathrm{SystRel}_U \wedge \varphi = \{\langle \mathrm{As}, R\rangle\}\quad (\Pi\omega\varepsilon X^V)(\Pi a = \omega(\mathrm{ix})(\langle a, a\rangle\varepsilon R) \wedge (\Pi\omega\varepsilon X^V)[\langle \omega(\mathrm{ix}), \omega(\mathrm{igrek})\rangle, \langle\omega(\mathrm{igrek}), \omega(\mathrm{ix})\rangle \varepsilon R \rightarrow \omega(\mathrm{ix}) = \omega(\mathrm{igrek})] \wedge (\Pi\omega\varepsilon X^V[\langle\omega(\mathrm{igrek}), \omega(\mathrm{zet})\rangle, \langle\omega(\mathrm{ix}),\omega(\mathrm{igrek})\rangle\varepsilon R\rightarrow\langle\omega(\mathrm{ix}),\omega(\mathrm{zet})\rangle\varepsilon R] \equiv \langle X, R\rangle\varepsilon \mathrm{SystRel}_U\wedge\varphi = \langle\{\mathrm{As}, R\rangle\}\wedge(\Pi a\varepsilon X)(\langle a,a\rangle\varepsilon R)\wedge(\Pi\omega\varepsilon X^V)(\Pi a=\omega(\mathrm{ix}))(\Pi b=\omega(\mathrm{igrek}))(\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle\varepsilon R\rightarrow a=b)\wedge(\Pi\omega\varepsilon X^V)(\Pi a=\omega(\mathrm{ix}))(\Pi b=\omega(\mathrm{zet}))(\Pi m=\omega(\mathrm{igrek}))(\langle m,b\rangle,\langle a,m\rangle\varepsilon R\rightarrow\langle a,b\rangle\varepsilon R)\equiv\langle X,R\rangle\varepsilon \mathrm{SystRel}_U\wedge\varphi=\{\langle \mathrm{As},R\rangle\}\wedge(\Pi a\varepsilon X)(\langle a,a\rangle\varepsilon R)\wedge(\Pi a,b\varepsilon X)(\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle\varepsilon R\rightarrow a=b)\wedge(\Pi a,b,m\varepsilon X)(\langle m,b\rangle,\langle a,m\rangle\varepsilon R\rightarrow\langle a,b\rangle\varepsilon R)\equiv\langle X,R\rangle\varepsilon \mathrm{SystRel}_U\wedge R\varepsilon \mathrm{porz}(X)\equiv\langle X,R\rangle\varepsilon \mathrm{SystPorz}_U.$

L5. $K_U(T) = \mathrm{SystPorz}_U$, bo L4 i L3.

Ponieważ jednak klasa twierdzeń T* różni się od klasy T tylko tym, że niektóre tezy należące do T są w T* powielone przez dokonanie jedynie odpowiednich skrótów — również dla rachunku τ^* obowiązują lematy analogiczne do L1—L5:

L1*. $\mathrm{CnE}(M, \varphi)^* \subset E(M, \varphi)^*$, $M = \langle X, R\rangle \varepsilon \mathrm{SystRel}_U$, $\varphi = \{\langle \mathrm{As}, R\rangle\}$.

L2*. $B \cup D \subset E(M, \varphi)^* \equiv T^* \subset E(M, \varphi)^*$, $M = \langle X, R\rangle \varepsilon \mathrm{SystRel}_U$, $\varphi = \{\langle \mathrm{As}, R\rangle\}$.

L3*. $K_U(B \cup D) = K_U(T^*)$.

L4*. $K_U(B \cup D) = \mathrm{SystPorz}_U$.

L5*. $K_U(T^*) = \mathrm{SystPorz}_U$.

III. Ostatecznie więc następstwem lematów L5 i L5* jest twierdzenie, że $K_U(T) = K_U(T^*) = \mathrm{SystPorz}_U$. Jeżeli przeto utożsamiamy sylogistykę arystotelesową z teorią τ^*, to okazuje się, że jest ona elementarną teorią systemów porządkowych.

IV. An Elementary Theory of Ordered Sets

(summary)

The main thesis of this paper is the aristotelian syllogistic to be an elementary theory of ordered sets. In order to prove this thesis are given: firstly the definitions of two fixed calculi τ and τ^* of the first order, farther the definitions of the notions of a relational system and an ordered set, subsequently the definition of a notion of a semantical model, and finally on the basis of these definitions and Alfred Tarski's axiomatical methodology is given the proof of the main thesis.