Mieczysław Lubański

Zagadanienie systematyzacji matematyki

Studia Philosophiae Christianae 9/1, 219-234

1973

Studia Philosophiae Christianae
ATK
9/1973/1

MIECZYSŁAW LUBAŃSKI

ZAGADNIENIE SYSTEMATYZACJI MATEMATYKI

1. Wprowadzenie

Zagadnienie systematyzacji wiedzy ludzkiej jest jednym z ważniejszych zagadnień filozofii nauki. Wobec wzrastającej dyferencjacji nauk oraz ogromnego powiększania się ilości informacji naukowej poszukiwanie schematów unifikujących wiedzę ludzką wydaje się być tym bardziej ważne. W szczególności chodzić może o systematyzację interesującej nas jednej nauki. Historia myśli ludzkiej wskazuje, że poszczególne nauki powstają jako odpowiedź na pytania stawiane bądź przez potrzeby życia codziennego, bądź przez istniejące już wcześniejsze nauki. Z tego też względu dokonuje się zabiegu systematyzacji nauki już istniejącej. Każda systematyzacja jest, z reguły, tymczasowa, ponieważ dalszy rozwój danej gałęzi wiedzy może ujawnić takie cechy, które okażą się ważne dla zagadnienia systematyzacji. Dzięki systematyzacji danej nauki uzyskuje się zrozumienie jej istotnego sensu, a także ujrzenie perspektyw jej rozwoju [1].

---

[1] Por. D. Gierulanka, *Zagadnienie swoistości poznania matematycznego,* Warszawa 1962, 153—155.

Matematyka jest nauką o kilku charakterystycznych cechach. Po pierwsze posiada charakter kumulacyjny. Przejawia się on w tym, że matematyka nie traci nigdy nic ze swego stanu posiadania. Jej granice ustawicznie się powiększają [2]. Po drugie, matematyka jest uniwersalna. Nie ma takiej rzeczy, która byłaby jej obca. Matematyka może być rozpatrywana jako nauka o rzeczywistości [3]. Po trzecie, matematyka utrzymuje nieprzerwany kontakt z empirią, zaś jej najogólniejsze nawet konstrukcje stanowią niezwykle użyteczne narzędzie do pogłębionego poznawania przyrody [4]. Abstrakcyjne uogólnienia muszą się zaczynać i kończyć na tym, co konkretne oraz szczegółowe [5]. Po czwarte, matematyka jest bardzo bogata w idee. W jej historii przewijają się najwspanialsze myśli niezliczonych pokoleń [6].

Toteż, nic dziwnego, że zagadnienie systematyzacji matematyki jest problemem złożonym i trudnym. Historia matematyki notuje różne zabiegi systematyzacyjne odnoszące się do niej całej, względnie do niektórych tylko jej działów. Wymienić tu można przykładowo: systematyzację geometrii według tzw. programu z Erlangen F. Kleina, propozycję M. Geigera, próbę konwencjonalistyczno-formalistyczną itp. [7]

W artykule dokonuje się przeglądu trzech współczesnych koncepcji, które mogą służyć jako podstawy do systematyzacji matematyki, jeżeli nie całej, to przynajmniej ważnych jej fragmentów. Koncepcjami tymi są: pojęcie struktury w sensie Bourbakiego, pojęcie kategorii oraz pojęcie systemu algebraicznego. Koncepcje te nie mogą być uważane za ostateczne. Rozwój matematyki jest olbrzymi. Wszystko wydaje się wskazywać na to,

[2] Zob. A. Aaboe, *Matematyka w starożytności*, Warszawa 1968, 6.

[3] H. Steinhaus, *Kalejdoskop matematyczny*, Warszawa 1956, 6.

[4] L. Geymonat, *Filozofia a filozofia nauki*, Warszawa 1966, 210.

[5] R. Courant, *Matematyka w świecie współczesnym*, w: *Matematyka w świecie współczesnym*, Warszawa 1966, 13.

[6] D. J. Struik, *Krótki zarys historii matematyki do końca XIX wieku*, Warszawa 1963², 9.

[7] Por. D. Gierulanka, dz. cyt., 156—170.

że matematyka nie da się zamknąć w pewnych, z góry przyjętych, koncepcjach. W matematyce bowiem dedukcja winna być uzupełniana intuicją, zaś pęd ku postępującym uogólnieniom musi być hamowany oraz równoważony umiłowaniem i poszanowaniem barwnych szczegółów [8]. To związane jest, z jednej strony z rozważaniem zagadnień szczegółowych, z drugiej zaś — z powiązaniem z elementem empirycznym, który, jak dobrze wiadomo, stanowi obfite i niewyczerpane źródło dla istotnie nowych idei, myśli.

2. Struktury

Pojęcie struktury zostało wprowadzone przez Bourbakiego. Jest ono powiązane z metodą aksjomatyczną, która sama przez się prowadzi, w pewnym przynajmniej znaczeniu, do unifikacji matematyki. Z tego względu zwrócimy najpierw uwagę na istotne, z interesującego nas punktu widzenia, aspekty metody aksjomatycznej.

2.1. Metoda aksjomatyczna.

Teoria zbudowana aksjomatycznie, z reguły, posiada wiele interpretacji. Dzięki temu zwiększa się możliwość stosowania matematyki w innych naukach, zwłaszcza w fizyce. Zarazem daje to oszczędność czasu i oznaczeń. Metoda aksjomatyczna pozwala badać całe rodziny tworów pozostających między sobą w pewnym związku. Otrzymuje się wówczas znacznie bardziej ogólne twierdzenia. Także znajomość poszczególnych tworów staje się lepsza. Na przykład w analizie funkcjonalnej rozpatruje się w ogólny sposób zbiory elementów z postulowanymi dla nich pewnymi własnościami. Na tej podstawie wyprowadza się twierdzenia. A następnie wykazuje, że zachodzą one w różnych działach matematyki. Zamiast więc powtarzać, w zasadzie to samo rozumowanie, kilka razy w różnych gałęziach matema-

[8] R. Courant, art. cyt., 13.

tyki, przeprowadza się je jeden raz, a potem jedynie powołuje się na nie odpowiednią ilość razy. Metoda aksjomatyczna umożliwia ścisłe ujęcie teorii matematycznych. Dzięki aksjomatyce rachunek prawdopodobieństwa uzyskał mocne podstawy oraz jednolitość. Z powiedzianego widać, że matematyka współczesna może być nazwana „relacyjna". Ta własność pociąga za sobą wewnętrzny dynamizm matematyki. Jest to szczególnie cenne z racji na aplikację matematyki do fizyki. Doświadczenie fizyczne bowiem wyjawia jedynie naturę związku, który zachodzi między światem rzeczywistym a przyrządem pomiarowym.

Należy pamiętać, że sam fakt posiadania przez teorię aksjomatyczną nawet bardzo wielu modeli, nie stanowi automatycznie o jej naukowej użyteczności. Może bowiem ona rzucać zbyt słabe światło na te modele. Ogólna teoria wtedy znajdzie dla siebie uzasadnienie, kiedy np. odkryje nieoczekiwane oraz otwierające nowe perspektywy związki między teoriami uważanymi do tej pory za odległe od siebie, względnie gdy przyczyni się do rozwiązania jakiegoś ciekawego, a zarazem trudnego, problemu.

Metoda aksjomatyczna pozwala także na przezwyciężanie pewnych trudności o charakterze metafizycznym. Sens powiedzianego można dobrze zilustrować i wyjaśnić na przykładzie zbioru liczb zespolonych. Liczby te utraciły całkowicie swój „urojony" charakter z chwilą, kiedy okazało się, że są one punktami płaszczyzny, czyli elementami produktu prostej rzeczywistej przez siebie, z pewnymi dwoma prostymi operacjami [9].

2.2. Struktury proste.

Wyróżnić się dają cztery zasadnicze typy struktur prostych. Powstają one przez przyjęcie za podstawę dla ich określenia pewnego rodzaju relacji. Może nią być, odpowiednio, relacja

---

[9] Odnośnie do rozważań obecnego paragrafu por. G. Choquet, *Analiza i Bourbaki*, „Wiadomości Matematyczne" 7 (1963), 101—105 oraz S. Banach, *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrals*, „Fund. Math." 3 (1922), 133—181.

równoważności, relacja typu algebraicznego, relacja porządku oraz relacja typu topologicznego. Dzięki temu otrzymuje się strukturę relacji równoważności, strukturę algebraiczną, strukturę porządku oraz strukturę topologiczną. Znaczenie wspomnianych struktur jest duże z tej racji, że spotyka się je we wszystkich prawie teoriach matematycznych [10].

Struktura relacji równoważności jest powszechnie stosowana nie tylko w matematyce, lecz także w różnych naukach oraz w życiu codziennym. Przecież takie pojęcia jak np. barwa, temperatura, długość, ciężar itd. powstają przez odniesienie się do odpowiednich konkretnych relacji równoważności i utworzenie dla nich klas obiektów równoważnych. W wymienionych przed chwilą przykładach będą to relacje bycia jednakowej barwy, jednakowo ciepły, jednakowo długi, jednakowo ciężki itd. Warto przypomnieć, że zagadnienie to wiąże się w istotny sposób z problemem tworzenia pojęć przy pomocy abstrakcji [11].

Struktury algebraiczne, porządkowe oraz topologiczne różnicują się z punktu widzenia ich wewnętrznego bogactwa. Np. struktura topologiczna przestrzeni T_1 jest bogatsza od struktury przestrzeni T_0, podobnie struktura przestrzeni T_2 jest bogatsza od struktury przestrzeni T_1 itd. Można więc, przy strukturach danego typu, mówić o pewnej hierarchii struktur, o ich stopniowaniu od struktur prostszych i ogólniejszych do struktur bardziej szczegółowych i skomplikowanych [12].

Z metodologicznego punktu widzenia wydaje się być interesujące wyróżnienie wymienionych typów struktur prostych, które są zarazem podstawowymi strukturami współczesnej matematyki. Dzięki temu uzyskuje się rozróżnienie oraz uszeregowanie niezależnych od siebie elementów, a także podstawę dla systematyzacji treści teorii matematycznej [13].

---

[10] Por. G. Choquet, art. cyt., 100.

[11] Por. K. Maurin, *Analiza*, Cz. I: *Elementy*, Warszawa 1971, 18—19.

[12] Por. D. Gierulanka, dz. cyt., 184.

[13] Tamże, 182.

2.3. Struktury złożone.

Połączenie kilku struktur prostych daje strukturę złożoną. Im więcej struktur prostych składa się na całość danej teorii matematycznej, tym jest ona bogatsza. Jeśli mamy do czynienia z bardzo dużą liczbą struktur prostych, to mówi się wówczas o strukturach rozgałęzionych.

Np. zbiór liczb rzeczywistych stanowi bogatą strukturę złożoną. W jej skład wchodzą: struktura porządku, struktura grupy, struktura ciała, struktura przestrzeni topologicznej, struktura przestrzeni wektorowej itd. Przykładem struktury rozgałęzionej może służyć teoria potencjału [14].

Po opisowym przedstawieniu struktur prostych i złożonych, przypomnijmy jeszcze precyzyjne określenie struktury w sensie Bourbakiego.

Przypuśćmy, że dane mamy dwa skończone ciągi zbiorów E_1, ..., E_n (n jest większe, lub równe, jeden) oraz A_1, ..., A_m (m jest nieujemne). Przypuśćmy dalej, że S jest pewnym zbiorem powstałym z powyższych zbiorów przy pomocy superpozycji skończonej liczby działań, z których każde jest bądź przejściem od pewnego uprzednio określonego zbioru F do zbioru wszystkich jego podzbiorów, bądź jest produktowaniem pewnych wcześniej już otrzymanych zbiorów. Wówczas dowolny element H każdego takiego zbioru S nazywa się strukturą na układzie E_1, ..., E_n o bazie pomocniczej A_1, ..., A_m, lub też krótko po prostu strukturą na układzie E_1, ..., E_n. Mówi się także, że zbiory układu E_1, ..., E_n są zaopatrzone w strukturę H. [15]

Przyjęło się wyróżniać struktury izomorficzne oraz tzw. rodzaj struktury. Nie będziemy jednak bliżej wchodzić w te zagadnienia. Zauważmy tylko, że dzięki odkryciu wspólnych struktur dla różnych teorii matematycznych, uzyskuje się zbliżenie pozornie obcych sobie teorii oraz odsłania się ich, głębo-

---

[14] Por. G. Choquet, art. cyt., 101.

[15] Zob. Z. Semadeni, *Struktury w sensie Bourbakiego i kategorie*, „Prace Matematyczne" 10 (1966), 39.

kie nieraz, pokrewieństwo. Pojęcie struktury pozwala na zgrupowanie pojęć matematycznych wokół niewielkiej liczby ogólnych pojęć. Nadto pojęcie to staje się sprawnym narzędziem w pracy badawczej w matematyce. Jeśli bowiem w rozpatrywanej teorii dostrzeże się występowanie struktury pewnego rodzaju, to tym samym odsłaniają się nowe horyzonty badawcze, a jednocześnie możliwość przeniesienia do teorii twierdzeń, które wynikają z aksjomatów, zachodzących w danej strukturze. Taki stan rzeczy prowadzi, z kolei, do zmiany roli metody aksjomatycznej w matematyce. Metoda ta, z dydaktycznej czy też techniczno-redakcyjnej, staje się do pewnego stopnia metodą twórczej, odkrywczej pracy w wielu dziedzinach matematyki. Wypracowany schemat: struktury proste oraz ich hierarchia i wzajemne powiązania, nie jest traktowany jako ostateczny i zamknięty. W miarę rzowoju matematyki potrzebna będzie jego nie tylko rozbudowa, ale i przebudowa. Jest to tym bardziej widoczne, że już dziś pojawiają się nowe wyniki badawcze, które nie znajdują w nim dla siebie miejsca [16].

3. Kategorie

W matematyce rozważa się różnego rodzaju obiekty, jak np. zbiory, grupy, przestrzenie topologiczne, ciała itd. Między obiektami tego samego rodzaju określa się odpowiedni typ odwzorowań. Okazuje się, że pewne formalne własności wspomnianych odwzorowań są wspólne dla nich wszystkich. Ten fakt sugeruje wprowadzenie pewnego ogólnego pojęcia, które obejmowałoby poszczególne klasy obiektów z odpowiadającymi im typami odwzorowań. W ten sposób dochodzi się do pojęcia kategorii, będącego jednym z najważniejszych narzędzi matematyki współczesnej [17].

---

[16] Por. D. Gierulanka, dz. cyt., 184—185.

[17] Por. S. Lang, *Algebra*, Moskwa 1968, 39 oraz G. Choquet, art. cyt., 107.

3.1. Określenie kategorii

Niech dana będzie klasa pewnych obiektów, którą oznaczać będziemy przez Ob(K). Przypuśćmy, że każdym dwom obiektom A oraz B, z rozważanej klasy Ob(K), został przyporządkowany pewien zbiór morfizmów obiektu A w obiekt B. Ten zbiór morfizmów oznaczać będziemy przez Mor(A,B). Przypuśćmy dalej, że każdej trójce obiektów A, B, C, należących do klasy Ob(K), zostało przyporządkowane prawo kompozycji morfizmów, tzn. morfizmowi z A w B oraz morfizmowi z B w C został przyporządkowany morfizm z A w C.

Przypuśćmy dalej, że wspomniane przyporządkowania spełniają następujące warunki (aksjomaty):

1° Zbiory morfizmów Mor(A,B) oraz Mor(C,D) są rozłączne z wyjątkiem przypadku, gdy $A = C$ oraz $B = D$. Wówczas zbiory te są identyczne.

2° Dla każdego obiektu A należącego do Ob(K) istnieje morfizm tożsamościowy tegoż obiektu, który jest elementem neutralnym, ze względu na prawo kompozycji, w stosunku do elementów zbioru morfizmów Mor(A,B) oraz Mor(B,A).

3° Prawo kompozycji morfizmów jest łączne.

Wówczas daną klasę obiektów zwie się kategorią. Oznacza się ją krótko przez K.

Kategoria K jest na ogół klasą. Jeżeli kategoria K jest zbiorem, to zwie się ją małą.

Przypuśćmy, że dane są dwie kategorie K oraz L. Przypuśćmy dalej, że zostało określone przyporządkowanie F, które każdemu obiektowi A kategorii K przyporządkowuje obiekt F(A) kategorii L oraz każdemu morfizmowi f (działającemu w kategorii K) morfizm F(f) z kategorii L. Jeżeli przyporządkowanie F spełnia następujące dwa warunki:

1) Dla każdego obiektu A kategorii K obraz morfizmu tożsamościowego obiektu A przy przyporządkowaniu F jest równy morfizmowi tożsamościowemu obiektu F(A).

2) Jeżeli f oraz g są dwoma morfizmami z kategorii K, to za-

chodzi zależność: obraz (dany przez F) złożenia morfizmów f i g jest równy złożeniu obrazów f i g (danych przez F), to wówczas zwie się ono funktorem kowariantnym z kategorii K w kategorię L.

Wychodząc z pojęcia kategorii oraz z pojęcia funktora daje się określić cała „algebra", której bogactwo wzrasta w miarę specjalizacji kategorii [18]. Teoria kategorii stanowi nowy krok naprzód w dziedzinę abstrakcji [19].

3.2. Przykłady kategorii

1. Kategoria zbiorów. Obiektami tej kategorii są zbiory, zaś morfizmami odwzorowania zbiorów. Łatwo jest sprawdzić, że aksjomaty teorii kategorii są spełnione.
2. Kategoria przestrzeni topologicznych. Obiektami są przestrzenie topologiczne, zaś morfizmami odwzorowania ciągłe jednej przestrzeni w drugą. Podobnie łatwo jest wykazać, że trzy aksjomaty wyżej podane są spełnione.
3. Kategoria grup abstrakcyjnych oraz homomorfizmów.
4. Kategoria zbiorów skończonych oraz ich odwzorowań.

Rozważmy kowariantny funktor z kategorii przestrzeni topologicznych i odwzorowań ciągłych w kategorię zbiorów i odwzorowań. Funktor ten przyporządkowuje danej przestrzeni topologicznej zbiór złożony z jej punktów.

Teoria kategorii może być używana za przewodnika w badaniach. Wychodząc bowiem od pewnych konkretnych kategorii, w których jest znane pewne pojęcie, możemy uzyskać sugestie do określenia w możliwie ogólny sposób analogonu tego pojęcia na ogólnej kategorii. Kiedy zaś spotkamy się z konkretną kategorią, w której rozważanego pojęcia jeszcze nie było, wystarczy sprawdzić, czy ogólna definicja będzie miała zastosowanie i otrzymujemy gotową teorię, związaną z danym pojęciem [20]. Wydaje się, że teoria kategorii bardzo mocno świadczy

[18] G. Choquet, art. cyt., 108.
[19] Tamże, 107.
[20] Tamże, 108.

o jedności matematyki [21]. Dzięki temu mamy do czynienia również z systematyzacją matematyki. Zauważmy, że na gruncie teorii kategorii udało się rozwinąć teorię struktur [22].

Jest godne uwagi, że wielka ogólność teorii kategorii nie pociąga za sobą banalności. Teoria ta jest nieodłącznym elementem wielkiego rozwoju matematyki współczesnej. Staje się ona w coraz powszechniejszym wymiarze czynnikiem scalającym matematykę. W nowszych monografiach teoria kategorii jest zamieszczana na początku rozważań, stanowiąc element spajający materiał naukowy danej dziedziny matematyki [23]. Nie znaczy to, oczywiście, by teoria kategorii była uważana za najwyższy i nieprzekraczalny etap w unifikacji matematyki. Należy raczej mniemać, że matematyka rozwinie się bardziej, aniżeli to nam może sugerować najbujniejsza nawet fantazja. A wówczas okażą się potrzebne nowe elementy systematyzujące całą matematykę.

Nie trzeba specjalnie zaznaczać, że dzięki teorii kategorii uzyskuje się podobnego rodzaju czynniki unifikujące oraz umożliwiające wgląd w zależności zachodzące między różnymi dziedzinami matematyki, do tych czynników, z którymi mieliśmy do czynienia w teorii struktur.

4. Systemy algebraiczne

Z kolei zajmiemy się jednym jeszcze pojęciem o charakterze unifikującym, mianowicie pojęciem systemu algebraicznego. Teoria systemów algebraicznych zajmuje się badaniem zbiorów, na których są określone pewne operacje oraz relacje. Teoria ta znajduje się na pograniczu logiki matematycznej oraz algebry. Stąd też płynie jej szczególne znaczenie dla interesującego nas problemu [24].

---

[21] Tamże, 107.

[22] C. Ehresmann, *Catégories et structures*, Paris 1965.

[23] Można to zobaczyć np. w książce E. Spanier, *Algebraiczeskaja topologija*, Moskwa 1971.

[24] Por. A. I. Malcew, *Algebraiczeskije sistemy*, Moskwa 1970, 7.

4.1. Oznaczenia pomocnicze

Niech a będzie daną liczbą porządkową. Przez P(a) oznaczać będziemy zbiór wszystkich tych liczb porządkowych, które są mniejsze od liczby a. A więc np. P(3) = (0,1,2).

Przypuśćmy teraz, że mamy dane dwie liczby porządkowe a oraz b. Nazwijmy typem T rzędu (a,b) parę odwzorowań, odpowiednio, zbiorów P(a) oraz P(b) w zbiór liczb naturalnych N = (0, 1, 2, ...). Typ T zapisywać będziemy w postaci

$T = (m_o, m_1, ..., m_x .., n_o, n_1, ... n_y, ...)$, gdzie $x \langle a$ oraz $y \langle b$.

Jeżeli, liczby a oraz b są skończone, to typ T nazywa się także skończony.

Dwa typy T oraz T' nazywa się równymi wtedy i tylko, gdy są one tego samego rzędu (a,b) i nadto $m_x = m'_x$ oraz $n_y = n'_y$ dla wszystkich $x \langle a$ oraz $y \langle b$.

Niech A będzie danym zbiorem. Operacją n-argumentową na zbiorze A zwie się każdą funkcję o n argumentach, określoną na zbiorze A i o wartościach także ze zbioru A, a zatem funkcję, która n elementom zbioru A przyporządkowuje pewien element tegoż zbioru. Predykatem n-argumentowym na zbiorze A zwie się każdą funkcję o n argumentach określoną na zbiorze A o wartościach ze zbioru dwuelementowego (P,F), gdzie P symbolizuje prawdę, zaś F — fałsz.

4.2. Określenie systemu algebraicznego

Intuicyjnie się wyrażając systemem algebraicznym zwie się zbiór, w którym został określony pewien zespół operacji oraz predykatów. Pojęcie to jest bardzo ogólne. Ciekawsze naukowo systemy otrzymuje się nakładając pewne warunki. Zilustrują to przykłady. Najpierw jednak podamy ścisłe określenie interesującego nas pojęcia.

Systemem algebraicznym typu T nazywa się obiekt, złożony z niepustego zbioru A, ze zbioru operacji $F_o, F_1, ..., F_x, ...$, określonych na zbiorze A dla każdego $x \langle a$ oraz ze zbioru predykatów $P_o, P_1, ..., P_y, ...$, określonych na zbiorze A dla każdego $y \langle b$, przy czym żąda się, aby F_x była operacją m_x-argumentową dla każdego $x \langle a$, zaś P_y było predykatem n_y-argumentowym dla każdego $y \langle b$. Określony system algebraiczny oznacza się krótko (A,F,P). F symbolizuje tu cały zbiór operacji, określonych na danym zbiorze A, natomiast P — cały zbiór predykatów działających również na rozważanym zbiorze A [25].

System algebraiczny (A,F,P) zwie się skończony, jeżeli zbiór A jest skończony. Zbiór A nosi nazwę zbioru bazowego systemu.

System algebraiczny typu skończonego zapisywać można w postaci (A; F_o, ..., F_{r-1}; P_o, ... P_{s-1} bądź w postaci (A; F_1, ..., F_r; P_1, ..., P_s).

Podamy teraz proste przykłady systemów algebraicznych. Niech C oznacza zbiór liczb całkowitych, R — zbiór liczb wymiernych, zaś $+$ — operację dodawania liczb, . — operację mnożenia liczb, — — operację odejmowania liczb i & — operację brania następnika dla danej liczby naturalnej. Wówczas układy (N, &, $\cdot$, O, 1), (C, $+$), (R, $+$, $-$, .) (C, $+$, $\leqslant$), (C, $\leqq$) są systemami algebraicznymi odpowiednio typów: (1, 2, 0, 0; Φ), (2; Φ), (2, 2, 2;Φ), (2;2), (Φ;2). Tutaj Φ symbolizuje zbiór pusty.

Przez odwzorowanie jednego systemu algebraicznego w drugi rozumie się każde odwzorowanie zbioru bazowego pierwszego systemu w zbiór bazowy drugiego systemu. Wprowadza się także pojęcie odwzorowania homomorficznego oraz izomorficznego jednego systemu w drugi. Nie będziemy tu bliżej precyzować wspomnianych pojęć. Zanotujemy jedynie, że spełnione są następujące zależności: superpozycja homomorfizmów jest homomorfizmem, superpozycja izomorfizmów jest izomorfizmem.

---

[25] Tamże, 46.

4.3. Algebry i modele.

Niech dany będzie system algebraiczny (A,F,P). Jeżeli zbiór predykatów danego systemu jest zbiorem pustym, tj. jeżeli $P = \Phi$, to system zwie się algebrą. Jeżeli zbiór operacji danego systemu jest zbiorem pustym, tj. jeżeli $F = \Phi$, to system zwie się modelem [26].

Posługując się wprowadzoną terminologią, można powiedzieć, że pierwszy z systemów podanych w przykładzie w poprzednim paragrafie jest algebrą typu (1, 2, 0, 0), drugi — algebrą typu (2), trzeci — algebrą typu (2, 2, 2), piąty — modelem typu (2).

Jest widoczne, że każda operacja k-argumentowa F, określona na zbiorze A, jest równocześnie $(k + 1)$-argumentową relacją na zbiorze A. Dla danej operacji F oznaczmy przez P odpowiadający jej predykat, który spełnia następującą równoważność:

$P(z_1, ..., z_k, v) \equiv F(z_1, ..., z_k) = v$ dla $z_1, ..., z_k, v \in A$. Zatem operacji k-argumentowej odpowiada wzajemnie jednoznacznie predykat $(k + 1)$-argumentowy.

Zatem zamieniając w systemie algebraicznym wszystkie operacje F_x przez odpowiadające im predykaty P_{x+1}, otrzymamy model, który zwie się modelem reprezentującym system dany. Jeżeli system wyjściowy był typu T rzędu (a, b), to model go reprezentujący będzie posiadał typ rzędu $(a + b)$.

Przykład. Weźmy algebrę (C, +) typu (2). Wprowadźmy predykat $D(x,y,z) \equiv x+y=z$, odpowiadający operacji dodawania. Wówczas otrzymamy model (C, D) typu (3) reprezentujący algebrę (C, +).

Zachodzi następujące proste twierdzenie:

Odwzorowanie f systemu algebraicznego (A,F,P) w system algebraiczny (B,G,Q) jest homomorfizmem pierwszego systemu w drugi, gdy f jest homomorfizmem modelu reprezentującego system (A,F,P) w model reprezentujący system (B,G,Q). [27]

---

[26] Tamże, 47.

[27] Tamże, 52.

4.4. Zastosowanie do algebry abstrakcyjnej.

Wskażemy teraz jak przy pomocy pojęcia systemu algebraicznego można jednolicie ująć podstawowe twory algebry abstrakcyjnej.

Grupoidem zwie się algebrę typu (2). Zatem grupoid może być przedstawiony w postaci $(G, \cdot)$, gdzie $\cdot$ oznacza operację dwuargumentową.

Grupoid $(G, \cdot)$, w którym operacja dwuargumentowa jest łączna, tj. spełnia zależność $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ dla wszystkich x,y,z należących do zbioru G, zwie się półgrupą.

Półgrupa, w której został wyróżniony element neutralny e dla danej operacji, tj. element spełniający warunek $e \cdot x = x$ dla każdego x należącego do G, zwie się monoidem.

Grupoid $(G, \cdot)$ zwie się kwasigrupą, jeżeli każde z dwu równań $px = q$, $yp = q$ posiada dokładnie jedno rozwiązanie.

Algebra $(G, \cdot, {}^{-1})$ typu (2,1) nazywa się grupą, jeżeli spełnione są warunki: 1° operacja $\cdot$ jest łączna, 2° $y^{-1}(yx) = x = (xy)y^{-1}$.

Grupa nazywa się abelowa lub przemienna, jeżeli operacja grupowa $\cdot$ jest przemienna, tzn. jeżeli $xy = yx$ dla wszystkich x,y należących do zbioru G.

Pierścieniem nazywa się algebra typu (2,1,2), w której operacje $+$, $-$, $\cdot$ spełniają następujące cztery warunki:

1) $x + (y + z) = (x + y) + z$,
2) $x + y = y + x$,
3) $(-x) + (x + y) = y$,
4) $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$,
$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

Inaczej można powiedzieć, że pierścieniem zwie się grupę abelową, w której, oprócz operacji $+$ oraz $-$, jest określona jeszcze operacja $\cdot$ spełniająca dwa prawa rozdzielności wymienione w warunku 4).

Szczególnym przypadkiem pierścienia jest ciało.

Wymienione przykłady ilustrują, w odniesieniu do matematyki, systematyzującą funkcję pełnioną przez systemy algebraiczne. Można w tym miejscu powtórzyć, mutatis mutandis, ogólne uwagi, wypowiedziane wyżej przy okazji rozważań związanych z pojęciem struktury oraz pojęciem kategorii. Dla celu tej pracy ważne wydaje się być zwrócenie uwagi na fakt następujący: pojęcie modelu wystarcza do interesującej nas unifikacji. Wychodząc z tego stanu rzeczy można by matematykę określić jako teorię modeli. Należy jednakże mieć w pamięci uwagi uczynione na wstępie rozważań, które m.in. orzekały, że w matematyce mamy do czynienia zarówno z wysoką abstrakcją, jak i z konkretem, z dedukcją i z intuicją. Ograniczanie się do niektórych tylko z zaznaczonych zabiegów i dziedzin stanowi istotne zubożanie pełnej, rozwijającej się matematyki.

5. Podsumowanie.

Wymieniliśmy trzy różne koncepcje, które mogą pełnić, przynajmniej częściowo, funkcję systematyzacji matematyki. Zwracano już uwagę na to, że wspomniana funkcja unifikująca jest zrelatywizowana do bieżącego stanu nauki. To wydawać się może całkowicie zrozumiałe i niepotrzebne bliższej wzmianki. Tak przecież musi być zawsze. Jednakże z matematyką sprawa wygląda tak, że niemal stale pojawiają się nowe, szersze pojęcia [28], które nie znajdują dla siebie miejsca w starych schematach. Ten, w odniesieniu do matematyki współczesnej, ponad wszelką wątpliwość stwierdzany fakt, był także już sygnalizowany. Przeto uwaga powyższa winna być rozumiana w ten sposób, że każda schematyzacja i systematyzacja matematyki, ujmując rzecz ściśle, odnosi się do jej stanu przeszłego, który przez ostatnie badania został już przekroczony. Matematyka żywa, rozwijająca się, w najściślejszym tego słowa znaczeniu współczesna, jest odmienna od tej, któ-

[28] W charakterze przykładu wymienić tu można pojęcie półzbioru, którego teoria znajduje się in statu nascendi. Zob. P. Vopěnka, *The theory of semisets*, „Actes Congr. int. mathématiciens", 1970, T. 1, Paris 1971, 155—260.

rej obraz otrzymuje się dzięki różnym koncepcjom unifikującym.

W naturalny sposób pojawia się pytanie, co jest przyczyną opisanego stanu rzeczy, inaczej mówiąc, jaki czynnik jest odpowiedzialny za tak dynamiczny rozwój matematyki, prowadzący do powstawania nowych jej form? Wydaje się, że za interesujący nas tu czynnik, wspomiany już dwukrotnie, należy uznać powiązanie elementu abstrakcyjnego z konkretnym, ustawiczny związek najbardziej nawet abstrakcyjnych teorii matematycznych z empirią. Charakter tej zależności przyjmuje różne postaci w rozwoju poznania matematycznego. Jednakże istota pozostaje stale ta sama: dialektyczne powiązanie abstrakcji i konkretu, empirii.

W tym także, wydaje się, należy upatrywać istotę matematyki. Przedstawione wyżej rozumowania wskazują, że na pytanie: czym jest matematyka? nie można udzielić adekwatnej odpowiedzi. Podanie definicji matematyki jest niemożliwe. Jedynie czynne doświadczenie, najlepiej o charakterze badawczym, w dziedzinie samej matematyki może dać na nie odpowiedź [29].

Fragen zur Systematisierung der Mathematik

Das Systematisierungsproblem der Wissenschaft ist methodologisch wichtig. Insbesondere solches das Problem der Systematisierung der Mathematik ist. Im Aufsatz bespricht man drei Konzeptionen, welche eine Unierenrolle im Beziehung zu der Mathematik gelten können. Diese sind: die Verbändetheorie im Sense von Bourbaki, die Kategorientheorie und die Theorie der algebraischen Systeme, insbesondere die Modelltheorie. Jede von diesen Konzeptionen gibt nur eine teilweise Lösung des Problems. Die Mathematik entwickelt sich doch sehr schnell, entstehen neue Begriffe, welche sich nicht in alten Schemata zumachen können. Es scheint, dass dieser Sachverhalt, eine Konsequenz der Wesenheit der Mathematik ist, welche als eine dialektische Beziehung zwischen der Abstraktion und Empirie gafasst werden kann. Man kann nicht eine adäquate Definition der Mathematik geben. Das Verstehen was die Mathematik ist kann man nur durch eine aktuelle Arbeit im Bereiche der Mathematik erreichen.

[29] R. Courant, H. Robbins, *Co to jest matematyka*, Warszawa 1967³, 16.