Edward Nieznański

Definicja i dowód indukcyjny a relacje ancestralne

Studia Philosophiae Christianae 9/2, 103-121

1973

Artykuł został zdigitalizowany i opracowany do udostępnienia w internecie przez Muzeum Historii Polski w ramach prac podejmowanych na rzecz zapewnienia otwartego, powszechnego i trwałego dostępu do polskiego dorobku naukowego i kulturalnego. Artykuł jest umieszczony w kolekcji cyfrowej bazhum.muzhp.pl, gromadzącej zawartość polskich czasopism humanistycznych i społecznych.

Tekst jest udostępniony do wykorzystania w ramach dozwolonego użytku.

MUZEUM HISTORII POLSKI

Studia Philosophiae Christianae
ATK
9/1973/2

EDWARD NIEZNAŃSKI

DEFINICJA I DOWÓD INDUKCYJNY A RELACJE ANCESTRALNE

I. Wstęp. II: 1. Ustalenia pomocnicze: 1.1-terminologiczne, 1.2-lematy. 2. Twierdzenia wyróżnione: 2.1 O związkach definicji indukcyjnej z relacjami ancestralnymi; 2.1.1 O równoważności między postaciami uwikłaną i normalną[1] definicji indukcyjnej; 2.1.2 Przekład definiensa równościowej definicji rekurencyjnej na język denotujący relacje ancestralne; 2.1.3 Warunki indukcyjnego definiowania pola relacji nieprzechodniej. 2.2. O powiązaniach indukcji matematycznej z relacjami ancestralnymi. III. Zakończenie. IV. Summary.

I. Definicja i dowód indukcyjny — podobnie jak w matematycznych dociekaniach systemowych — na użytek logiki okazały się równie niezbędnymi narzędziami badań i elementami konstrukcji metasystemowych. O istnieniu wzajemnych powiązań między relacjami ancestralnymi a definicją rekurencyjną i indukcją matematyczną wspominają Tadeusz Czeżowski[2], Kazimierz Ajdukiewicz[3] i Ludwik Borkowski[4]. Spró-

---

[1] Definicję normalną (równościową), do której daje się sprowadzić definicja indukcyjna sformułowana w postaci definicji uwikłanej, będziemy również nazywać definicją indukcyjną (normalną). Por. A. Grzegorczyk, *Zarys logiki matematycznej,* wyd. 2, Warszawa 1969, s. 217.

[2] Tadeusz Czeżowski, *Logika, Podręcznik dla studiujących nauki filozoficzne,* wyd. 2, Warszawa 1968, s. 161—164.

[3] Kazimierz Ajdukiewicz, *Logika pragmatyczna,* Warszawa 1965, s. 67—71.

[4] Ludwik Borkowski, *Logika formalna, Systemy logiczne, Wstęp do metalogiki,* Warszawa 1970, § 3.9 rozdział V.

bujemy niektóre z tych związków opisać na przykładzie i w ograniczeniu do relacji binarnych.

II.1. Ustalenia pomocnicze:

1.1 Z dowolnej relacji binarnej R — przez wielokrotne stosowanie iloczynu względnego (R;R;R:...;R;...) — tworzymy potęgi tej relacji. Suma wszystkich takich potęg stanowi mocną relację ancestralną relacji R, oznaczaną symbolem „R_{po}". Słabą relację ancestralną relacji R — której znakiem jest „R_{*}" — otrzymujemy przez dodanie do R_{po} relacji identyczności I (czyli $R_{*} = R_{po} \cup I$). Dla uściślenia tych wyjaśnień przytoczymy definicje, które mają jednocześnie stanowić ustalenia terminologiczne dla późniejszych twierdzeń. W definicjach tych wprowadzimy symbol „R(A)" na oznaczenie R-obrazu zbioru A, „P(R)" — na oznaczenie pola relacji R, „przech" — dla zbioru relacji przechodnich we własnym polu, „sp" — dla zbioru relacji spójnych we własnym polu, „elI_R" — dla zbioru elementów pierwszych[5] relacji R „min_R" — dla zbioru elementów minimalnych relacji R i „max_R" — dla zbioru elementów maksymalnych relacji R

D1. $y \in R(A) \equiv \sum_{x \in A} xRy.$

D2. $xR\ y \equiv \prod_{A} [x \in A \wedge R(A) \subset A \rightarrow y \in A].$

D3. $xR_{po}y \equiv \prod_{A} [x \in A \wedge R(A) \subset A \rightarrow y \in R(A)]$

D4. $y \in P(R) \equiv \sum_{x} (xRy \vee yRx).$

D5. $R \in \text{przech} \equiv \prod_{x,y,z} (xRy \wedge yRz \rightarrow xRz).$

D6. $R \in sp \equiv \prod_{x,y \in P(R)} (x = y \vee xRy \vee yRx).$

[5] Zbiór elementów pierwszych może być nie tylko pusty lub jednoelementowy. Każdy element pola relacji cyklicznej jest jej elementem pierwszym.

D7. $x \in el I_R \equiv x \in P(R) \wedge \prod_{z \in P(R)} (x \neq z \rightarrow xRz)$.

D8. $x \in min_R \equiv x \in P(R) \wedge \prod_{z} (zRx \rightarrow x = z)$.

D9 $x \in max_R \equiv x \in P(R) \wedge \prod_{z} (xRz \rightarrow x = z)$.

1.2 Lematy: Związki, których ujawnienie zapowiada temat artykułu, zostaną opisane w twierdzeniach osobno wyróżnionych. Dowody tych twierdzeń wymagają jednak uprzedniego wykazania niektórych lematów. Zamierzamy przy tym posługiwać się założeniową metodą Jerzego Słupeckiego zmodyfikowaną przez zastąpienie w niej reguły $O\Sigma$ gentzenowską [6] regułą opuszczania małego kwantyfikatora.

L1. $\mathbf{R \subset R_{po}}$, bo:

1. xRy, założenie dowodu
   - 1.1 $x \in A$ | założenia dodatkowe
   - 1.2 $R(A) \subset A$ | założenia dodatkowe
   - 1.3 $y \in R(A)$, bo D1, 1 i 1.1
2. $x \in A \wedge R(A) \subset A \rightarrow y \in R(A)$, bo 1.1 1.2 1.3
3. $xR_{po}y$, bo 2, DII, D3.

L2.1 $\mathbf{PR \subset PR_{po}}$, bo:

1. $x \in PR$, założ.
2. $\sum_y xRy \vee \sum_y yRx$, bo D4 i 1
3. $x \in PR_{po}$, bo 2,L1 i D4.

L2.2 $\mathbf{PR_{po} \subset PR}$, bo:

1. $x \in PR$, założ.

[6] Wedle dyrektywy opuszczania kwantyfikatora egzystencjalnego — którą sformułował Gerhard Gentzen w *Untersuchungen über das logische Schliessen*, „Mathematische Zeitschrift", Bd 39, Berlin 1935 — z formuły A rozpoczynającej się małym kwantyfikatorem wynika wyrażenie W, gdy W wynika z pewnej formuły B powstałej z A przez opuszczenie pierwszego w A kwantyfikatora wraz ze zmienną przy nim zanotowaną i zmienna związana małym kwantyfikatorem początkującym formułę A nie jest wolna w wyrażeniu W.

2. $\sum\limits_{y} xR_{po}y \vee \sum\limits_{y} yR_{po}x$, bo 1 i D4

1.1 $\sum\limits_{y} xR_{po}y$, założ. dod.

1.1.1 $xR_{po}y$, założ. dod.

1.1.2 $\prod\limits_{A}(x \in A \wedge RA \subset A \to y \in RA)$, bo 1.1.1 i D3

1.1.3 $x \in \{x\} \wedge R(\{x\}) \subset \{x\} \to y \in R(\{x\})$, z OII w 1.1.2

1.1.4. $R(\{x\}) \subset \{x\} \to y \in R(\{x\})))$, bo 1.1.3 i $x = x$

1.1.5 $\prod\limits_{y}(xRy \to x = y) \to xRy$, bo 1.1.4 i D1

1.1.6 $\sim \sum\limits_{y} xRy \to \sum\limits_{y}(xRy \wedge x \neq y)$, bo 1.1.5 i $xRy \to \sum\limits_{y} xRy$

1.1.7 $\sim \sum\limits_{y} xRy \to \sum\limits_{y} xRy$, bo 1.1.6

1.1.8 $\sum\limits_{y} xRy$, bo 1.1.7 i $(\sim p \to p) \to p$

1.2 $x \in PR$, bo 1.1, 1.1.1→1.1.8 i „y" nie jest wolne w 1.1.8

2.1 $\sum\limits_{y} yR_{po}x$, założ. dod.

2.1.1 $yR_{po}x$, założ. dod.

2.1.2 $y \in PI \wedge R(PI) \subset PI \to x \in R(PI)$, z 2.1.1, D3, OII

2.1.3 $x \in R(PI)$, bo 2.1.2, $\sum\limits_{z} z = y$, $\prod\limits_{z} z \in PI$

2.2 $x \in PR$, bo 2.1, 2.1.1→2.1.3, D1 i D4

3. $x \in PR$, bo 2, 1.1→1.2 i 2.1→2.2.

L2. $\mathbf{PR_{po} = PR}$, bo L2.1 i L2.2.

L3. $\mathbf{R_{*} = R_{po} \cup I}$, bo:

$$\left.\begin{array}{ll} 1.1 & xR_{po}y \vee x = y \\ 1.2 & x \in A \\ 1.3 & RA \subset A \end{array}\right| \text{ założ.}$$

1.1.1 $xR_{po}y$, założ. dod.
1.1.2 $x\in A \wedge RA \subset A \rightarrow y\in RA$, bo 1.1.1, D3, O$\Pi$
1.1.3 $y\in RA$, bo 1.1.2, 1.2, 1.3
1.1.4 $y\in A$, bo 1.3 i 1.1.3
1.2.1 $x = y$, założ. dod.
1.2.2 $y\in A$, bo 1.2 i 1.2.1
1.4 $y\in A$, bo 1.1, 1.1.1$\rightarrow$1.1.4 i 1.2.1$\rightarrow$1.2.2

1. $(xR_{po}y \vee x = y) \wedge x\in A \wedge RA \subset A \rightarrow y\in A$, bo 1.1 $\wedge$ 1.2 $\wedge$ 1.3 $\rightarrow$ 1.4
2. $R_{po} \cup I \subset R_*$, bo 1, D$\Pi$, D2

$$\left.\begin{array}{ll} 2.1 & xR\ y \\ 2.2 & x \neq y \\ 2.3 & x\in A \\ 2.4 & RA \subset A \end{array}\right\} \text{założ.}$$

2.5 $x\in\{x\}\cup RA \wedge R(\{x\}\cup RA) \subset \{x\}\cup RA \rightarrow y\in\{x\}\cup RA$, bo 2.1, D2, O$\Pi$
2.6 $x\in\{x\}\cup RA$, bo $x=x$
2.7 $R(\{x\}\cup RA) \subset \{x\}\cup RA$, bo $R(X\cup Y) = RX\cup RY$, $X \subset Y \rightarrow RX \subset RY$, 2.4, 2.3
2.8 $x = y \quad y\in RA$, bo 2.5, 2.6 i 2.7
2.9 $y\in RA$, bo 2.8 i 2.2

3. $xR_* y \wedge x\neq y \wedge x\in A \wedge RA \subset A \rightarrow y\in RA$, bo 2.1 $\wedge$ 2.2 $\wedge$ 2.3 $\wedge$ 2.4 $\rightarrow$ 2.9
4. $R_* \subset R_{po} \cup I$, bo 3, D$\Pi$, D3
5. $R_* = R_{po} \cup I$, bo 2 i 4.

L4.1 $\mathbf{x\in el1_R \rightarrow (R\cup I)(\{x\}) = PR}$, bo:

1. $x\in el1_R$, założ.

$$\left.\begin{array}{ll} 2. & x\in PR \\ 3. & \prod_z [z\in PR \rightarrow (x\neq z \rightarrow xRz)] \end{array}\right\} \text{bo 1 i D7}$$

4. $PR \subset (R\cup I)(\{x\})$, bo 3 i D1
1.1 $y\in(R\cup I)(\{x\})$, założ. dod.
1.2 $x = y \vee xRy$, bo 1.1 i D1
1.3 $y\in PR$, bo 1.2, 2 i D4

5. $(R \cup I)(\{x\}) = PR$, bo 4 i 1.1.→1.3

L4.2 $(\mathbf{R} \cup \mathbf{I})(\{\mathbf{x}\}) = \mathbf{PR} \rightarrow \mathbf{x} \in \mathbf{el} \, \mathbf{I}_{\mathrm{R}}$, bo:

1. $(R \cup I)(\{x\}) = PR$, założ.
2. $x \in PR$, bo 1 i $x = x$

   1.1 $y \in PR$ } założ. dod.
   1.2 $x \neq y$ }
   1.3 $x = y \vee xRy$, bo 1 i 1.1
   1.4 xRy, bo 1.3 i 1.2

3. $\Pi(x \neq y \rightarrow xRy)$, bo 1.1 ∧ 1.2→1.4
   $y \in PR$
4. $x \in \mathrm{el} \, I_R$, bo D7, 2 i 3

L4. $\mathbf{x} \in \mathbf{el} \, \mathbf{I}_{\mathrm{R}} \equiv (\mathbf{R} \cup \mathbf{I})(\{\mathbf{x}\}) = \mathbf{PR}$, bo L4.1 i L4.2

L5. $\mathbf{B} \subset \mathbf{R}_{*}(\mathbf{B})$, bo:

1. $x \in B$, założ.
2. $xR_{*}\, x$, z D2
3. $x \in R_{*}(B)$, bo D1, 1, 2.

L6. $\mathbf{R}_{*} \in$ **przech**, bo:

1. $xR_{*}y$ } założ.
2. $yR \;\; z$ }
3. $x \in A \wedge RA \subset A \rightarrow y \in A$, bo D2, 1, 0Π
4. $y \in A \;\; RA \;\;\; A \rightarrow z \in A$, bo D2, 2, 0Π
5. $x \in A \wedge RA \subset A \rightarrow z \in A$, bo 3 i 4
6. $xR_{*}\, z$, bo DΠ do „A" w 5 i D2.

L7. $\mathbf{R}_{\mathrm{po}} \in$ **przech**, bo:

1. $xR_{po}y$ } założ.
2. $yR_{po}z$ }
3. $x \in A \wedge RA \subset A \rightarrow y \in RA$, bo 1, D3, 0Π
4. $y \in A \wedge RA \subset A \rightarrow z \in RA$, bo 2, D3, 0Π

   1.1 $x \in A$ } założ. dod.
   1.2 $RA \subset A$ }
   1.3 $y \in RA$, bo 3, 1.1, 1.2
   1.4 $y \in A$, bo 1.2, 1.3
   1.5 $z \in RA$, bo 4, 1.4 1.2

5. $xR_{po}z$, bo 1.1—1.5, D3.

L8.1 $\mathbf{R_*(R_*(B)) \subset R_*(B)}$, bo:

1. $y \in R_*(R_*(B))$, założ.
2. $\Sigma_{x \in R_*(B)}\, xR_* y$, bo D1 i 1

$$\left.\begin{array}{l} 1.1\ x \in R_*(B) \\ 1.2\ xR_* y \end{array}\right\} \text{założ. dod.}$$

1.3 $\Sigma_{z \in B}\, zR_* x$, bo 1.1 i D1

$$\left.\begin{array}{l} 1.1.1\ z \in B \\ 1.1.2\ zR_* x \end{array}\right\} \text{założ. dod.}$$

1.1.3 $zR_* y$, bo L6, 1.1.2 i 1.2

1.1.4 $y \in R_*(B)$, bo D1, 1.1.1 i 1.1.3

1.4 $y \in R_*(B)$ bo 1.3, 1.1.1—1.1.4 i „z" nie jest wolne w 1.3 i 1.1.4

3. $y \in R_*(B)$, bo 2, 1.1—1.4 i „x" nie jest wolne w 2 i 1.4.

L8. $\mathbf{R_*(R_*(B)) = R_*(B)}$, bo L8.1,L5 i $X \subset Y \rightarrow RX \subset RY$.

L9. $\mathbf{R(R_*(B)) \subset R_*(B)}$, bo:

1. $y \in R(R_*(B))$, założ.
2. $\Sigma_{x \in R_*(B)}\, xRy$, bo 1iD1

$$\left.\begin{array}{l} 1.1\ x \in R_*(B) \\ 1.2\ xRy \end{array}\right\} \text{założ. dod.}$$

1.3 $R \subset R_*$, bo L1 i L3

1.4 $xR_* y$, bo 1.2 i 1.3

1.5 $y \in R_*(R_*(B))$, bo D1, 1.1 i 1.4

1.6 $y \in R_*(B)$, bo L8 i 1.5

3. $y \in R_*(B)$, bo 2, $1.1 \wedge 1.2 \rightarrow 1.6$

L10.1 $\mathbf{R \in przech \rightarrow R_{po} = R}$, bo:

1. $R \in przech$, założ.
2. $\Pi_{xy}[\Sigma_z(xRz \wedge zRy) \rightarrow xRy]$, bo 1 i D5

1.1 $xR_{po}y$, założ. dod.

1.2 $\Pi_A(x \in A \wedge RA \subset A \rightarrow y \in RA)$, bo D3 i 1.1

1.3 $x \in \{x\} \cup R(\{x\}) \wedge$
$R(\{x\} \cup R(\{x\})) \subset \{x\} \cup R(\{x\}) \rightarrow y \in R(\{x\} \cup R(\{x\}))$, 1.2

1.4 $x\in\{x\}\cup R(\{x\})$, bo $x = x$
1.1.1 $w\in R(\{x\}\cup R(\{x\}))$, założ. dod.
1.1.2 $\sum_{z}[(x=z \vee xRz)\wedge zRw]$, bo D1 i 1.1.1
1.1.3 $\sum_{z=x} zRw \vee \sum_{z}(xRz\wedge zRw)$, bo 1.1.2
1.1.4 xRw, bo 1.1.3 i 2
1.1.5 $w \in\{x\}\cup R(\{x\})$, bo 1.1.4 i D1
1.5 $R(\{x\}\cup R(\{x\}))\subset \{x\} \cup R(\{x\})$, bo 1.1.1→1.1.5
1.6 $y\in R(\{x\}\cup R(\{x\}))$, bo 1.3, 1.4, 1.5
3. $R_{po}\subset R$, bo 1.1→1.6 i $R(\{x\}\cup R(\{x\}))\subset R(\{x\})$ (bo 1.1.1—1.1.4)
4. $R_{po} = R$, bo 3 i L1.

L10.2 $R_{po} = R \rightarrow R\in$**przech**, bo L7.

L10. $R_{po} = R \equiv R\in$**przech**, bo L10.1 i L10.2.

L11. $R\in sp\rightarrow min_R\subset elI_R$, bo:

1. $R\in sp$, założ.
1.1 $z\in min_R$, założ.dod.
1.2 $z\in PR$ | bo 1.1 i D8
1.3 $\prod_{x}(xRz\rightarrow\ = z)$ | bo 1.1 i D8
1.4 $\prod_{x\in PR}(x=z \vee xRz \vee zRx)$, bo 1,D6,1.1
1.5 $x\in PR\rightarrow(x = z \quad xRz \quad zRx)$, z OII w 1.4
1.6 $xRz\rightarrow x = z$, z OII w. 1.3
1.7 $x\in PR\rightarrow(x = z \vee zRx)$, bo 1.5 i 1.6
1.8 $z\in elI_R$, bo 1.2, DII w 1.7 i D7

L12.[7] $x\in min_S\wedge S\in max_{\subset sp\wedge 2R_{po}}\rightarrow x\in min_R$, bo:
1. $x\in min_S$ | założ.
2. $S\in max_{\subset sp\wedge 2R_{po}}$ | założ.

---

[7] Lemat L12 stwierdza, że każdy element minimalny relacji maksymalnej wśród spójnych podzbiorów mocno-ancestralnej relacji utworzonej z R jest elementem R-minimalnym.

3. $x \notin \min_R$, założenie dowodu niewprost
4. $S \in sp$
5. $S \subset R_{po}$ bo D9 i 2
6. $\prod_T (T \subset R_{po} \wedge T \in sp \quad S \subset T \rightarrow S = T)$
7. $x \in elI_S$, bo L11, 4 i 1
8. $x \in PS$, bo 1 i D8
9. $x \in PR$, bo 8, 5 i L2
10. $\sum_z (zRx \wedge x \neq z)$, bo 3, D8 i 9

$$\left.\begin{array}{ll} 1.1 & zRx \\ 1.2 & x \neq z \end{array}\right\} \text{założ. dod.}$$

1.3 $\prod (zSx \rightarrow x = z)$, bo D8 i 1

1.4 $\sim zSx$, bo 1.3 i 1.2
1.5 $\langle z,x \rangle \in \{\langle u,y \rangle : uSy \vee (u = z \wedge y \in PS)\}$, bo $z = z$ i 8
1.6 $\{\langle u,y \rangle : uSy \vee (u = z \wedge y \in PS)\} \subset R_{po}$, bo 5,1.1,L1, 7,D7 i L7

$$\left.\begin{array}{ll} 1.1.1 & u,y \in P(\{\langle u,y \rangle : uSy \vee (u = z \wedge y \in PS)\}) \\ 1.1.2 \notin & \langle u,y \rangle \quad \{\langle u,y \rangle : uSy \vee (u = z \wedge y \in PS)\}) \\ 1.1.3 \in & \langle u,y \rangle \quad \{\langle u,y \rangle : uSy \vee (u = z \wedge y \in PS)\}) \end{array}\right| \text{założ. dod.}$$

$$\left.\begin{array}{ll} 1.1.4 & \sim uSy \\ 1.1.5 & u \neq z \vee y \notin PS \end{array}\right\} \text{z } 1.1.2$$

$$\left.\begin{array}{ll} 1.1.6 & \sim ySu \\ 1.1.7 & y \neq z \vee u \notin PS \end{array}\right\} \text{z } 1.1.3$$

$$\left.\begin{array}{ll} 1.1.8 & u \in PS \vee u = z \\ 1.1.9 & y \in PS \vee y = z \end{array}\right\} \text{bo } 1.1.1, \text{ D4, } 8$$

1.1.10 $u,y \in PS \vee (u = z \wedge y \in PS) \vee (y = z \wedge u \in PS) \vee \vee (u = z \quad y = z)$, bo 1.1.8 1.1.9
1.1.11 $u,y \in PS \vee (u = z \wedge y = z)$, bo 1.1.10, 1.1.5 i 1.1.7
1.1.12 $u = y$, bo 1.1.11, 4, 1.1.4 i 1.1.6

1.7 $\{\langle u,y\rangle : uSy \vee (u=z \wedge y \in PS)\} \in sp$, bo 1.1.1 — 1.1.12 i D6

1.8 $S \subset \{\langle u,y\rangle : uSy \vee (u=z \wedge y \in PS)\}$, bo $X \subset X \cup Y$

1.9 $S = \{\langle u,y\rangle : uSy \quad (u=z \quad y \in PS)\}$, bo 6, 1.6, 1.7 i 1.8

1.10 zSx, bo 1.9 i 1.5

sprzeczność: 1.4 i 1.10

L13. $\mathbf{R_*(min_R) \subset PR}$, bo:

1. $y \in R\,(min_R)$, założ.
2. $\Sigma\, xR\, y$, bo D1 i 1
   $x \in min_R$
   1.1 $x \in min_R$ } założ. dod.
   1.2 xR_*y }
   1.3 $x \in PR$, bo 1.1 i D8
   1.4 $x=y \vee xR_{po}y$, bo 1.2 i L3
   1.5 $y \in PR$, bo 1.4, 1.3, D4 i L2
3. $y \in PR$, bo 1.1→1.5 i 2

2. Twierdzenia wyróżnione

Wyróżniamy twierdzenia opisujące — z jednej strony (pod 2.1) — związki definicji indukcyjnej z relacjami ancestralnymi i — z drugiej (2.2) — powiązania indukcji matematycznej z relacjami ancestralnymi.

2.1 Dążymy przeto najpierw do pokazania, że definicja indukcyjna określa definiowany zbiór, jako generowany przez wyróżniony zbiór elementów tworzących (czyli jako słabo-ancestralny obraz określonego zbioru generatorów).

2.1.1 Aby uprawomocnić ograniczenie naszych dalszych badań do normalnej (równościowej) jedynie postaci definicji indukcyjnej wykażemy od razu, że jest ona równoważna — będącej zwykle w użyciu — uwikłanej (aksjomatycznej) formie tej definicji. Oznaczając przy tym zbiór definiowany literą „Z", zbiór generatorów literą „B" i relację binarną (której symbol występuje w definiensie) literą „R", schemat definicji indukcyjnych w postaci normalnej notujemy jako równość: $Z = \bigcap_{B\subset A\wedge RA\subset A} A$; natomiast schemat aksjomatycznych definicji rekurencyjnych — jako koniunkcję: $B \quad Z$ $RZ \subset Z \wedge \Pi_{A}(B\subset A \wedge RA\subset A \to Z\subset A)$.

T1.1 $Z = \bigcap_{B\subset A\wedge RA\subset A} A \to B\subset Z \wedge RZ\subset Z \wedge \Pi_{A}(B\subset A\wedge RA\subset A\to Z\subset A)$, bo:

1. $Z = \bigcap_{B\subset A\wedge RA\subset A} A$, złoż.
   1.1 $x\in B$, złoż. dod.
   1.2 $\Pi_{A}(B\subset A\wedge RA\subset A\to x\in A)\to x\in Z$ bo 1, OII, OE
      1.1.1 $B\subset A$ } złoż. dod.
      1.1.2 $RA\subset A$ }
      1.1.3 $x\in A$, bo 1.1.1. i 1.1
   1.3 $\Pi_{A}(B\subset A\wedge RA\subset A\to x\in A)$, bo $1.1.1\wedge 1.1.2\to 1.1.3$
   1.4 $x\in Z$, bo 1.2 i 1.3
2. $B\subset Z$, bo $1.1\to 1.4$
   2.1 $y\in RZ$, złoż. dod.
   2.2 $\Sigma_{z\in Z} zRy$, bo D1 i 2.1
      2.1.1 $z\in Z$ } złoż. dod.
      2.1.2 zRy }
      2.1.3 $z\in \bigcap_{B\subset A\wedge RA\subset A} A$, bo 1 i 2.1.1
      2.1.4 $y\in \bigcap_{B\subset A\wedge RA\subset A} A$, bo D1, 2.1.2, 2.1.3 i

$$R\left(\bigcap_{B\subset A\wedge RA\subset A} A\right)\subset \bigcap_{B\subset A\wedge RA\subset A} A$$

      2.1.5 $y\in Z$, bo 1 i 2.1.4
   2.3 $y\in Z$, bo 2.2 i $2.1.1\wedge 2.1.2\to 2.1.5$
3. $RZ\subset Z$, bo $2.1\to 2.3$
   3.1 $B\subset A$ }
   3.2 $RA\subset A$ } złoż. dod
   3.3 $x\in Z$ }

3.4 $x\in A$, bo 1, 3.3, 3.1, 3.2

4. $\prod_{A}(B\subset A\wedge RA\subset A\to Z\subset A)$, bo $3.1\wedge 3.2\wedge 3.3\to 3.4$.

T1.2 $\mathbf{B\subset Z\subset RZ\wedge Z\quad \prod_{A}(B\subset A\wedge RA\subset A\to Z\subset A)\to Z=\bigcap_{B\subset A\wedge RA\subset A} A}$, bo:

$$\left.\begin{array}{ll} 1. & B\subset Z\\ 2. & RZ\subset Z\\ 3. & \prod_{A}(B\subset A\wedge RA\subset A\to Z\subset A)\end{array}\right\}\text{założ.}$$

1.1 $\prod_{A}(B\subset A\wedge RA\subset A\to x\in A)$, założ. dod.

1.2 $x\in Z$, bo OΠ w 1.1, 1 i 2

$$\left.\begin{array}{ll} 2.1 & x\in Z\\ 2.2 & B\subset A\\ 2.3 & RA\subset A\end{array}\right\}\text{założ. dod.}$$

2.4 $Z\subset A$, bo OΠ w 3, 2.2 i 2.3

2.5 $x\in A$, bo 2.4 i 2.1

4. $Z=\bigcap_{B\subset A\wedge RA\subset A} A$, bo $1.1\to 1.2$ i 2.1 2.2 $2.3\to 2.5$

T.1 $\mathbf{Z=\bigcap_{B\subset A\wedge RA\subset A} A\equiv B\subset Z\wedge RZ\subset Z\wedge \prod_{A}(B\subset A\wedge RA\subset A\to Z\subset A)}$, bo T1.1 i T1.2.

2.1.2 Definiens równościowej definicji indukcyjnej denotuje — jak to już stwierdziliśmy (w T1) — najmniejszy ze zbiorów zamkniętych przez określoną relację i zawierających wyróżnicny zbiór elementów tworzących (generatorów). Zauważmy z kolei (T2), że wspomniany zbiór najmniejszy jest słabo-ancestralnym obrazem zbioru elementów tworzących. W twierdzeniach T2.1, T2.2 i T2 każdy egzemplarz litery x bez indeksu zostanie użyty jako symbol iloczynu kartezjańskiego.

T2.1 $\mathbf{(R_1xR_2x...xR_n)\ (B_1xB_2x...xB_n)\subset \bigcap_{B_1x...xB_n\subset A\wedge R_1x...xR_n(A)\subset A} A}$,

bo:

$$\left.\begin{array}{ll} 1. & \langle y_1,...,y_n\rangle\in(R_1x...xR_n)_*(B_1x...xB_n)\\ 2. & B_1x...xB_n\subset A\\ 3. & R_1x...xR_n(A)\subset A\end{array}\right\}\text{założ.}$$

1.1 $\langle x_1,...,x_n\rangle \in B_1 x ... x B_n$
1.2 $\langle x_1,...,x_n\rangle (R_1 x ... x R_n)_* \langle y_1,...,y_n\rangle$ } założ. dod.
1.3 $\langle x_1,...,x_n\rangle \in A$, bo 1.1 i 2
1.4 $\langle y_1,...,y_n\rangle \in A$, bo 1.2, D2, OII, 1.3 i 3
4. $\langle y_1,...,y_n\rangle \in A$, bo D1, 1 i $1.1 \wedge 1.2 \rightarrow 1.4$.

T.2.2 $\bigcap\limits_{B_1 x ... x B_n \subset A \wedge R_1 x ... x R_n(A) \subset A} A \subset (R_1 x ... x R_n)_* (B_1 x ... x B_n)$, bo:

1. $\prod\limits_A [B_1 x ... x B_n \subset A \wedge R_1 x ... x R_n(A) \subset A \rightarrow \langle y_1,...,y_n\rangle \in A]$, założ.
2. $B_1 x ... x B_n \subset (R_1 x ... x R_n)_* (B_1 x ... x B_n) \wedge R_1 x ... x R_n ((R_1 x ... x R_n)_* (B_1 x ... x B_n)) \subset (R_1 x ... x R_n)_* (B_1 x ... x B_n) \rightarrow \langle y_1,... y_n\rangle \in (R_1 x ... R_n) (B_1 x ... x B_n)$, z OII w 1
3. $B_1 x ... x B_n \subset (R_1 x ... x R_n)_* (B_1 x ... x B_n)$, bo L5
4. $R_1 x ... x R_n((R_1 x ... x R_n)_* (B_1 x ... x B_n)) \subset (R_1 x ... x R_n)_* (B_1 x ... x B_n)$, bo L9
5. $\langle y_1 ..., y_n\rangle \in (R_1 x ... x R_n) (B_1 x ... x B_n)$, bo 2, 3 i 4

T.2 $(R_1 x ... x R_n)_* (B_1 x ... x B_n) = \bigcap\limits_{B_1 x ... x B_n \subset A \wedge R_1 x ... x R_n(A) \subset A} A$, bo T.2 i T2.2

Weźmy z „Zarysu logiki matematycznej" [8] Andrzeja Grzegorczyka przykłady definicji indukcyjnych i dokonajmy na nich — zgodnych z twierdzeniem T2 — przekształceń dla zilustrowania powiązań tych definicji z relacjami ancestralnymi. Chodzi mianowicie o przykłady rekurencyjnych definicji: zbioru liczb naturalnych (P1), relacji mniejszości ograniczonej do liczb naturalnych (P2), dodawania liczb naturalnych (P3) i mnożenia liczb naturalnych (P4).

P1. $x \in N \equiv x \in 2^{2^D} \wedge \prod\limits_A (O \in A \wedge \prod\limits_{u \in A} Su \in A \rightarrow x \in A)$, gdzie:

D-to zbiór nieskończony, którego istnienie jest w teorii mnogości stwierdzone aksjomatycznie:

---

[8] Wyd. 2, Warszawa 1969, s. 219—221.

$x \in O \equiv x \in 2^D \wedge x \sim \Lambda$;

$x \in Su \equiv [x \in 2^D \wedge u \in LC \wedge \sum_{yz} (y \in u \wedge z \notin y \wedge y \cup \{z\} \sim x)]$,

$u \in LC \equiv u \in 2^{2^D} \wedge \sum_{y \in 2^D} \prod_x (x \in u \equiv x \sim y)$.

Zgodnie z twierdzeniem T2 ekwiwalentnym odpowiednikiem P1 jest równość: $N = 2^{2^D} \cap S_*(\{O\})$.

P2. $x <_N y \equiv \prod_A \{[\prod_x \langle O, Sx\rangle \in A \wedge \prod_{xy} (\langle x,y\rangle \in A \to \langle Sx,Sy\rangle \in A)] \to \langle x,y\rangle \in A\}$,

czyli na podstawie T2: $<_N = (S \times S)_*(\{O\} \times SN)$.

P3. $(+_N)(t,y,s) \equiv \prod_A \{[\langle O,y,y\rangle \in A \wedge \prod_{xu} \langle x,y,u\rangle \in A \to \langle Sx,y,Su\rangle \in A)] \to \langle t,y,s\rangle \in A\}$, czyli wobec T2: $(+_N) = (S \times I \times S)_*(\{\langle O,y,y\rangle : y \in N\})$

P4. $(\cdot_N)(t,y,s) \equiv \prod_A \{[\langle O,y,O\rangle \in A \wedge \prod_{xu} (\langle x,y,u\rangle \in A \to \langle Sx,y,u+y\rangle \in A)] \to \langle t,y,s\rangle \in A\}$, czyli: $(\cdot_N) = (S \times I \times (+_N))_*(\{O\} \times N \times \{O\})$.

2.1.3 Równościowa definicja indukcyjna — aby uniknąć błędu idem per idem — może posiadać jedynie taki definiens, który denotuje R_*-otwarty zbiór generatorów B, czyli $R_*(B) \neq B$. Przytoczone niżej twierdzenie T3 ustala właśnie, że warunkiem koniecznym tego, by zbiór generatorów był R_*-otwarty, jest należenie do niego co najmniej jednego niemaksymalnego w R elementu pola relacji R.

T3. $B \cap PR = \Lambda \vee B \subset max_R \to R_*(B) = B$, bo:

1. $B \cap PR = \Lambda \vee B \subset max_R$, założ.

1.1 $x \in R_*(B)$, założ. dod.

1.1.1 $z \in B$ } założ. dod.

1.1.2 $z R_* x$ }

1.1.1.1. $B \cap BR = \Lambda$, założ. dod.

1.1.1.2 $\prod_x (x \notin B \vee x \notin PR)$ bo 1.1.1.1

1.1.1.3 $z \notin PR$, bo 1.1.1.2 i 1.1.1

1.1.1.4 $z = x \vee z R_{po} x$, bo 1.1.2 i L3

1.1.1.5 $z = x \vee z \in PR$, bo 1.1.1.4 i L2

1.1.1.6 $z = x$, bo 1.1.1.5 i 1.1.1.3
1.1.1.7 $x \in B$, bo 1.1.1 i 1.1.1.6
1.1.2.1 $B \subset max_R$, założ. dod.
1.1.2.2 $z \in max_R$, bo 1.1.2.1 i 1.1.1
1.1.2.3 $R(\{x\}) \subset \{z\}$, bo 1.1.2.2 i D9
1.1.2.4 $x = z$, bo 1.1.2, D2, OII, 1.1.2.3
1.1.2.5 $x \in B$, bo 1.1.1 i 1.1.2.4
1.1.3 $x \in B$, bo 1, 1.1.1.1→1.1.17 i 1.1 2.1→1.1.2.5
1.2 $x \in B$, bo 1.1,D1 i 1.1.1.∧1.1.2→1.1.3
2. $R_*(B) = B$, bo 1.1→1.2 i L5.

W praktyce definiowania rekurencyjnego dąży się zwykle do określenia pola relacji, której symbol występuje w definiensie. Używa się wówczas jako generatory element pierwszy relacji R_{po} albo zbiór elementów R-minimalnych, o ile spełnione są przy tym warunki określone w twierdzeniach T4 i T5.

T4. $\mathbf{PR = R_*(\{x\}) \equiv x \in elI_R}$, bo L4, L3 i L2.

T5 [9]. $R_{po} = \bigcup_{S \in max_{\subset sp \frown 2^{R_{po}}}} S \wedge \prod_{S \in max_{\subset sp \frown 2^{R_{po}}}} min_S \neq \Lambda \rightarrow PR = {}'R_*(min_R)$, bo:

1. pierwszy człon koniunkcji będącej poprzednikiem T5 | założ.
2. drugi człon koniunkcji będącej poprzednikiem T5 | założ.

1.1 $x \in PR$, założ. dod.
1.2 $\sum_z (zR_{po}x \vee xR_{po}z)$, bo 1.1, D4 i L1
1.1.1 $zR_{po}x \vee xR_{po}z$, założ. dod.
1.1.1.1 $zR_{po}x$, założ. dod.
1.1.1.2 $\sum_{S \in max_{\subset sp \frown 2^{R_{po}}}} zSx$,bo 1.1.1.1 i 1

[9] Twierdzenie T5 wypowiada tę myśl, że pole relacji R pokrywa się z R_*obrazem zbioru wyszystkich R-minimalnych elementów, jeżeli każda relacja maksymalna wśród spójnych podzbiorów R_{po}, posiada element minimalny i relacja mocnoancestralna R_{po} jest równa sumie maksymalnych relacji ze spójnych podzbiorów R_{po}.

$$\left.\begin{array}{l} \text{a.1 } S \in \max_{\subset} sp \cap 2^{R_{po}} \\ \text{a.2 } zSx \end{array}\right\} \text{zakoż. dod., } a = 1.1.1.1$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{a.3 } S \in sp \\ \text{a.4 } S \subset R_{po} \end{array} \quad \text{bo a.1 i D9} \right\}$$

a.5 $\min_S \neq \Lambda$, bo 1 i a.1

a.5.1 $w \in \min_S$, założ. dod.

a.5.2 $w \in \min_R$, bo L12, a.5.1 i a.1

a.5.3 $w \in 1I_S$, bo L11, a.3 i a.5.1

a.5.4 $w = x \vee wSx$, bo a.5.3, D7, a.2 i D4

a.5.5. $wR_* x$, bo a.5.4, a.4 i L3

a.5.6 $x \in R_* (\min_R)$, bo D1, a.5.2 i a.5.5

a.6 $x \in R_*(\min_R)$, bo a.5 i a.5.1→a.5.6

1.1.1.3 $x \in R_*(\min_R)$, bo 1.1.1.2 i a.1 a.2→a.6

1.1.2.1 $xR_{po}z$, założ. dod.

1.1.2.2 $\Sigma_{S \in \max_{\subset} sp \cap 2^{R_{po}}} xSz$, bo 1.1.2.1 i 1

1.1.2.3 $x \in R_* (\min_R)$, bo 1.1.2.2 i analogiczny fragment dowodu jak w odcinku a.1—a.6

1.1.2 $x \in R_*(\min_R)$, bo 1.1.1, 1.1.1.1.→1.1.1.3 i 1.1.2.→1.1.2.3

1.3 $x \in R_*(\min_R)$, bo 1.2 i 1.1.1→1.1.2

3. $PR = R_*(\min_R)$, bo 1.1→1.3 i L13

Zauważmy również na koniec, że stosowanie definicji rekurencyjnej przy określaniu pola relacji przechodniej byłoby — wobec twierdzenia T6 — zbędnym komplikowaniem pojęć, skoro relacja słabo-ancestralna relacji R — w przypadku przechodniej R — jest sumą $R \cup I$.

T6. $R \in przech \rightarrow R_*(B) = RB \cup B$, bo:

1. $R \in przech$, założ.
2. $R_{po} = R$, bo L10.1 i 1
3. $R_*(B) = (R_{po} \cup I)(B)$, bo L3
4. $R_*(B) = (R \cup I)(B)$, bo 3 i 2
5. $R_*(B) = RB \cup B$, bo 4 i $y \in (R \cup I)(B) \equiv \Sigma_{x \in B}(xRy \vee x = y) \equiv$

$\equiv (\Sigma_{x \in B} xRy \vee \Sigma_{x \in B} x = y) \equiv (y \in RB \vee y \in B) \equiv y \in RB \cup B.$

2.2 O powiązaniach indukcji matematycznej z relacjami ancestralnymi

Związki zachodzące między definicją rekurencyjną, dowodem indukcyjnym i relacjami ancestralnymi opisuje twierdzenie T7, w którym litera „W" oznacza warunek, o którym twierdzenie dowodzone przez indukcję głosi, że jest spełniony przez każdy element rekurencyjnie zdefiniowanego zbioru Z (czyli $\prod_{x \in Z} Wx$).

T7. $Z = R_*(B) \wedge \prod_{x \in B} Wx \wedge \prod_{x,y} (Wx \wedge xRy \to Wy) \to \prod_{x \in Z} Wx$, bo.

1. $Z = R_*(B)$
2. $\prod_{x \in B} Wx$
3. $\prod_{x,y} (Wx \wedge xRy \to Wy)$

założ.

4. $Z = \bigcap_{B \subset A \wedge RA \subset A} A$, bo 1 i T2

1.1 $x \in Z$, założ. dod.

1.2 $\prod_{B \subset A \wedge RA \subset A} x \in A$, bo 4 i 1.1

1.3 $B \subset \{z:Wz\} \wedge R(\{z:Wz\}) \subset \{z:Wz\} \to x \in \{z:Wz\}$, bo O$\prod$ w 1.2

1.4 $B \subset \{z:Wz\}$, bo 2 i $Wu \equiv u \in \{z:Wz\}$

1.5 $\prod_{x,y} (x \in \{z:Wz\} \wedge xRy \to y \in \{z:Wz\})$, bo 3

1.6 $R(\{z:Wz\}) \subset \{z:Wz\}$, bo 1.5 i D1

1.7 $x \in \{z:Wz\}$, bo 1.3, 1.4, 1.6

1.8 Wx, bo 1.7

5. $\prod_{x \in Z} Wx$, bo 1.1→1.8 i D$\prod$.

Dla zilustrowania związków opisanych w T7 posłużymy się następującym przykładem:

P5. Twierdzenie: $\prod_{n \in N_1} W_1(n)$, gdzie:

Df1. $W_1(n) \equiv \left[\frac{1}{1\cdot(1+1)} + \frac{1}{2.(2+1)} + \ldots + \frac{1}{n.(n+1)} = \frac{n}{n+1}\right]$

Df2. $kR_1n \equiv k + 1 = n$

Df3. $N_1 = R_1\ (\{1\})$.

Dowód indukcyjny:

1. $W_1(1)$, bo $W_1(1) \equiv \left[\frac{1}{1\cdot(1+1)} = \frac{1}{1+1}\right]$ i

$$\frac{1}{1.(1+1)} = \frac{1}{1+1}$$

1.1 $W_1(k)$ } założ. dod.

1.2 kR_1m }

1.3 $m = k + 1$, bo Df2 i 1.2

1.4 $\frac{1}{1\cdot(1+1)} + \ldots + \frac{1}{k.(k+1)} = \frac{k}{k+1}$, bo 1.1 i Df1

1.5 $\frac{1}{1.(1+1)} + \ldots + \frac{1}{k\cdot(k+1)} + \frac{1}{(k+1)\cdot(k+2)}$

$$= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)\cdot(k+2)} = \frac{k\cdot(k+2)+1}{(k+1)\cdot(k+2)} =$$

$$= \frac{(k+1)^2}{(k+1)\cdot(k+2)} = \frac{k+1}{k+2} = \frac{m}{m+1}$$

, bo 1.4 i 1.3

1.6 $W_1(m)$, bo 1.5 i Df1

2. $\prod_{k,m}[W_1(k) \wedge kR_1m \rightarrow W_1(m)]$, bo $1.1 \wedge 1.2 \rightarrow 1.6$

3. $\prod_{n \in N_1} W_1(n)$, bo T7, Df3, 1 i 2.

III. Dociekania nasze zostały w sposób istotny ograniczone do indukcyjnych definicji z definiensem zawierającym symbol jedynie relacji binarnej. Ustalenia dotyczące takich relacji nie dają się jednak w prosty sposób przenieść na relacje niebinarne. Toteż dla uogólnienia wyników potrzebne jest rozszerzenie znanych koncepcji relacji „ancestralnej. Do tego celu przystosowane jest — jak się wydaje — pojęcie wieloczłonowej (k + n-członowej relacji ancestralnej:

$$R_{k\ n}^{*}(x_1, x_2, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n) \equiv \prod_{A} [x_1, \ldots, x_k \in A \wedge R_{k+n}(A^k) \subset$$

$$\subset A^n \rightarrow y_1, \ldots, y_n \in A].$$

IV. DEFINITIONS AND PROOFS BY INDUCTION AND ANCESTRAL RELATIONS

I. Introduction. II.1. Auxilliary establishments: 1.1 — terminology, 1.2 — lemmas. 2. Distinguished theorems: 2.1 — on some connections between definitions by induction and ancestral relations, 2.1.1 — on equivalence between a postulational and normal definition by induction, 2.1.2 — a translation of definiens of a normal recursive definition on a language denoting ancestral relations, 2.1.3 — some conditions of a recursive defining of the field of non-reflexive relation. 2.2 On some connections of mathematical induction with ancestral relations. III. The ending. This paper presents theses concerning some connections between the notions of definition and proof by induction and ancestral relations. The main results of the considerations of these connections are given in part II.2. In the theorems which are contained there, the letter „Z" denotes a set which is a denotation of definiendum of a normal recursive definition: „B" denotes a set of generators, „R" denotes a binary relation, „R " — weak-ancestral relation of R, „R_{po}" — strong-ancestral relation of R, „RA" — R-image of a set A, „PR" — field of R, „Λ" — the empty set, „max_R" — the set of R-maximal elements, „min_R" — the set of R-minimal elements, „elI_R" — the set of R-first elements, „przech" — a set of reflexive relations, and „sp" — a set of connected relations.