Michał Heller

Space-time manifolds and relativity of tlme (streszczenie po polsku)

Studia Philosophiae Christianae 10/1, 49-56

1974

Studia Philosophiae Christianae
ATK
10(1974)1

MICHAŁ HELLER

SPACE-TIME MANIFOLDS AND RELATIVITY OF TIME

O. Abstract.

A null-cone structure induces partial ordering (of kind „earlier-later") and full topology on a space-time manifold without any reference to matter filling the space-time. This show how deeply rooted are the absolute properties of time. Space-time equipped with a null-cone structure cannot be a physical model of Leibniz's entirely relative time theory.

1. Introduction.

1.1 The so-called relational concept of time and space has been given by Leibniz who, in a polemic with Clarke, had expressed the view that space is an „order of coexistences" and time an „order of successions".[1] According to this concept, space and time may be thus drawn to relations which order in a certain manner the set of events, where events are understood materially. Without matter filling the Universe, the concepts of time and space lose their meaning. Instead of the term „relational concept of time and space", sometimes the term is used, after Leibniz, of the „concept of relative time and relative space"; we shall often state it simply as the concept of Leibniz.[2]

1.2 A concept which remains in opposition to that of Leibniz's, is the concept of absolute time and absolute space. It is usually attributed to Newton. According to this concept, time and space have an „object" character. After removing the „material contents" of the Universe, there remains an empty time and empty space.[3]

1.3 Time and space which occur in classical mechanics, are physical models of the absolute time and space. The theory of relativity (special and general) has, to a certain extent, „relativised" time and space, however, contrary to a fairly general opinion, has not been able to fully realize the concept of Leibniz. In the present paper we shall show that with the presently used geometry, it is not possible to construct a physical model of fully relative (relational) time.

1.4 The remark is trival that a null-cone structure may be determined on a spatio-temporal manifold without referring to anything outside, such as e.g. matter filling the space-time. Already in this sense, such a structure is anti-Leibnizian. It turns out, however, that it is such a strong structure that it induces all the topology, and even certain metric properties. In order to make the following arguments more precise, we introduce certain terminology conventions.

2. Terminology

2.1 We understand events materially, and not only as points in space-time.

2.2 We shall call time (model of, concept of) weakly relative if it is partially absolute and only partially defined by relations on the set of events.

2.3 We shall call time (model of, concept of) strongly relative — if it is totaly defined by relations on the set of events.

2.4 Relativity of time (weak or strong) may be local or global.

2.5. We shall distinguish between topological and metric properties of time.

2.6 We shall also discuss time ordering if and only if on the set of events relations of the type „earlier — later" are defined, which partially order the set of events and induce a topology (ordinary „manifold topology") on this set. — Time ordering may be absolute, weakly or strongly relative.

2.7 In the definitions presented above not very sharp concepts (such as „event understood materially", „time partially absolute", ect.) are used on purpose, in order for the following discussion to concern a wide class of philosophical concepts of time. These definitions suffice, however, to ascertain enough rigour to the further considerations.

3. Logical Base

3.1 By the *sparce-time* M we mean n-dimensional, connected, C^∞ (usualy C^2 suffices) differentiable manifold on which a continuous oriented null-cone structure is defined.

3.2 The oriented null-cone structure is equivalent to the following: for each $x \varepsilon M$, there is a basis at the tangent space T_x, relative to which the Lorentzian metric tensor of signature $2 - n$ exists.[4]

The existence of the continuous oriented null-cone structure allows us to introduce the following definitions:

3.3 A future-directed piecewise timelike geodesic is called a *trip*. If a trip from x to y exists we write: $x \ll y$ (x chronologically precedes y).

3.4 The *chronological future* of x, $I^+(x)$, is defined:

$$I^+(x) \equiv \{y: \quad x \ll y\}$$

Similarly, the *chronological past* of x:

$$I^-(x) \equiv \{y: \quad y \ll x\}$$

3.5 A future-directed piecewise curve, whose pieces may be either timelike or null geodesics is called a *causal trip*. If a causal trip from x to y exists, we write: $x < y$ (x causally precedes y).

3.6 The *causal future* and *causal past* of x may be defined respectively:

$$J^+(x) \equiv \{y: \quad x < y\}$$
$$J^-(x) \equiv \{y: \quad y < x\}$$

3.7 Proposition: $I^+(x)$ and $I^-(x)$ are open sets, for every $x \varepsilon M$. For proof see work of Lerner.[5]

3.8 Proposition: Sets $I^+(x) \cap I^-(x)$ are open, for every $x, y \varepsilon M$ and induce the so-called *Alexandroff Topology* (A-topology) on M.[6]

A-topology, in the general case, is coarser than ordinary manifold topology.

3.9 A space-time is *strongly causal* at $x \varepsilon M$, if there is no such neighbourhood U of x, that U intersects some trip more than once. M is strongly causal, if it is strongly causal at each point.

3.10 The notion of strong causality being of especially importance for further considerations, let us remind that strong causality fails at a poit $p \varepsilon M$, if and only if there is a point $q > p$, $p \neq q$, such that for all $x \varepsilon I^+(p)$ and $y \varepsilon I^-(q)$ there is: $y \ll x$.[7]

3.11 Proposition: The A-topology on a space-time M coincides with the ordinary manifold topology if and only if M is strongly causal. Proof may be found in the cited Lerner's paper.[8]

4. Anti-Leibnizian Theorem

4.1 Theorem: A space-time M, on which a continuous oriented null-cone structure is defined, cannot be a model of strongly relative time ordering (globally), if: (i) there are no closed trips on M; (ii) M is strongly causal.[9]

4.2 Proof: A continuous oriented null cone structure induces the existence of the relation „$\ll$" and the existence of sets: $I^+(x)$, $I^-(x)$. The relation „$\ll$" is transitive by definition, and antireflexive by the condition (i) of the theorem. So „$\ll$" is partially ordering. Sets $I^+(p) \cap I^-(q)$, $p, q \varepsilon M$, form a basis for A-topology (proposition 3.8). In strength of the proposition 3.11 and the condition (ii) of the theorem, A-topology coincides with the ordinary manifold topology. So the partial ordering of „earlier — later" kind of the manifold and its full topology are induced without any reference to matter filling the space-time. This remark ends the proof.

5. Conclusions

5.1 Theorem 4.1 shows how deeply are absolute elements embedded in the mathematical structure of contemporary space-time theories.

5.2 On rejection of condition (i) of the theorem, it becomes true only locally; the non-validity of the relation $x \ll x$ is always guarenteed locally[10].

5.3 Invariantly, there is no sense in discussing metric properties of time; one may invariantly discuss only metric properties of space-time.

5.4 Metric properties of space-time M cannot be strongly relative (in the sense analogous to definition 2.3) either, as they are locally induced by the Lorentzian structure of tangent space in every point $p \varepsilon M$[11].

5.5 The above results do not contradict the possibility of constructing a weakly relative model of time (space-time). As it is known, weak relativity of time (space-time) is realized in the General Theory of Relativity.

ROZMAITOŚCI CZASOPRZESTRZENNE I WZGLĘDNOŚĆ CZASU

Streszczenie

1. Postawienie problemu. Istnieją dwie, konkurujące ze sobą, koncepcje czasu i przestrzeni. Według pierwszej czas i przestrzeń sprowadzają się do relacji w jakiś sposób porządkujących zbiór zdarzeń; przy czym zdarzenia rozumie się materialnie. Bez materii wypełniającej Wszechświat pojęcia czasu i przestrzeni tracą sens. Według drugiej koncepcji czas i przestrzeń mają charakter „obiektów". Po usunięciu „materialnej zawartości" Wszechświata pozostaje pusty czas i pusta przestrzeń. Pierwszą koncepcję określa się mianem koncepcji względnego lub relacyjnego czasu i względnej lub relacyjnej przestrzeni, drugą — mianem koncepcji absolutnego czasu i absolutnej przestrzeni. Pierwszą przypisuje się zwykle Leibnizowi, drugą — Newtonowi.

Czas i przestrzeń występujące w mechanice klasycznej są fizycznymi modelami absolutnego czasu i przestrzeni. Teoria względności (szczególna i ogólna) w pewnym stopniu urelatywniła czas i przestrzeń, nie zdołała jednak — wbrew dość rozpowszechnionym poglądom — w pełni zrealizować koncepcji Leibniza. Pokażemy, że przy stosowanym obecnie aparacie geometrycznym nie da się skonstruować fizycznego modelu czasu całkowicie względnego.

2. Terminologia. Będziemy mówić o czasie (modelu, koncepcji czasu) słabo względnym, jeżeli jest on częściowo absolutny, a tylko częściowo określony przez relacje na zbiorze zdarzeń.

Będziemy mówić o czasie (modelu, koncepcji czasu) silnie względnym, jeżeli jest on całkowicie określony przez relacje na zbiorze zdarzeń.

Zdarzenia rozumie się materialnie, a nie tylko jako punkty w czasoprzestrzeni.

Będziemy mówić o porządku czasowym wtedy i tylko wtedy, jeżeli na zbiorze zdarzeń są określone relacje typu „wcześniej — później" częściowo porządkujące zbiór zdarzeń i indukujące topologię (zwykłą „rozmaitościową topologię" — „manifold topology") na tym zbiorze. — Porządek czasowy może być absolutny, lub słabo, lub silnie względny.

3. Baza logiczna. Przez czasoprzestrzeń M rozumiemy n — wymiarową, zwartą, C^∞ rozmaitość różniczkową, na której jest określona ciągła, zorientowana struktura stożkowa, tzn. dla każdego punktu $x \in M$ istnieje baza w przestrzeni stycznej T_x, względem której określony na T_x lorentzowski tensor metryczny posiada sygnaturę 2 — n.

Niech $x, y \in M$, jeżeli istnieje w M czasopodobna krzywa posiadająca w przeszłości punkt końcowy p i w przyszłości punkt końcowy q, piszemy: $p \ll q$. Definiujemy:

chronologiczną przyszłość punktu x:
$$I^+(x) \equiv \{y: x \ll y\}$$
chronologiczną przeszłość punktu x:
$$I^-(x) \equiv \{y: y \ll x\}$$

Czasoprzestrzeń M nazywamy mocno przyczynową w punkcie $x \in M$, jeżeli nie ma takiego otoczenia U punktu x, że U przecina pewną czasopodobną krzywą więcej niż raz. M jest mocno przyczynowa, jeżeli jest mocno przyczynowa w każdym punkcie.

Lemat 1: Zbiory $I^+(x) \cap I^-(y)$ są zbiorami otwartymi, dla każdego $x, y \in M$ i indukują tzw. topologię Aleksandrowa (A-topologię) na M.

A — topologia, w ogólnym przypadku, jest uboższa niż zwykła topologia rozmaitościowa.

Lemat 2: A-topologia na czasoprzestrzeni M pokrywa się ze zwykłą topologią rozmaitościową wtedy i tylko wtedy, gdy M jest mocno przyczynowa.

Dowody obu lematów można znaleźć w pracy Lernera (por. przyp. 5 w tekście angielskim).

4. T w i e r d z e n i e a n t y - l e i b n i z o w s k i e: Czasoprzestrzeń M, na której jest określona ciągła, zorientowana struktura stożkowa nie może być modelem silnie względnego porządku czasowego (globalnie), jeżeli: (i) na M nie ma zamkniętych krzywych czasopodobnych, (ii) M jest mocno przyczynowa.

D o w ó d: Ciągła, zorientowana struktura stożkowa umożliwia określenie relacji „$\ll$" i zbiorów $I^+(x)$, $I^-(x)$ na M. Relacja „$\ll$" jest przechodnia z definicji i przeciwzwrotna dzięki warunkowi (i) twierdzenia. A zatem „$\ll$" jest relacją częściowo porządkującą zbiór M. Zbiory $I^+(p) \cap I^-(q)$, p, q, ε M, tworzą bazę dla A-topologii (lemat 1). Na mocy lematu 2 i warunku (ii) twierdzenia, A-topologia pokrywa się ze zwykłą topologią rozmaitościową. A więc częściowe uporządkowanie typu „wcześniej — później" oraz pełna topologia zostały wprowadzone na rozmaitości M bez odnoszenia się do materii wypełniającej czasoprzestrzeń. Ta uwaga kończy dowód.

5. W n i o s k i. Udowodnione twierdzenie pokazuje, jak głęboko w matematycznej strukturze współczesnych teorii czasoprzestrzeni tkwią elementy absolutne. — Po odrzuceniu warunku (i) twierdzenia staje się ono słuszne tylko lokalnie; niesłuszność relacji $x \ll x$ jest lokalnie zawsze zagwarantowana. — Inwariantnie nie ma sensu mówić o metrycznych własnościach czasu; inwariantnie można mówić tylko o metrycznych własnościach czasoprzestrzeni. — Metryczne własności czasoprzestrzeni również nie mogą być silnie względne, gdyż są one w każdym punkcie p ε M lokalnie indukowane przez lorentzowską strukturę przestrzeni stycznej (por. przyp. 11 w tekście angielskim).

Powyższe wyniki nie przeczą możliwości zrealizowania modelu czasu (czasoprzestrzeni) słabo względnego. Jak wiadomo, słaba względność czasu (czasoprzestrzeni) jest zrealizowana w ogólnej teorii względności.

[1] „As for my own opinion, I have said more than once, that I hold space to be something merely relative, as time is; that I hold it to be an order of coexistences, as time is an order of successions." *The Leibniz — Clarke Correspondence* (ed. H. G. Alexander), Manchester University Press, 1956.

[2] Cf. Z. Augustynek: *Własności czasu* (Properties of Time — in Polish), Warszawa 1970, PWN.

[3] Ibid.

[4] See e.g.: B. Carter: *Causal Structure in Space-Time, General Relativity and Gravitation*, 1 (1971) 350.

[5] D. Lerner: *Techniques of Topology and Differential Geometry in General Relativity, in: Methods of Local and Global Differential Geometry in General Relativity*, „Proceedings of the Regional Conference on Relativity", Pittsburgh, Pennsylvania, July 13 — 17, 1970, Springer-Verlag: Berlin-Heidelberg-New York 1972, p. 11.

[6] Ibid., p. 23.

[7] Ibid., pp. 21—22.

[8] Ibid., p. 23.

[9] Almost every physically reasonable space-time is strongly causal, and almost every strongly causal space-time has no closed trips.

[10] See: D. Lerner: *Techniques of Topology...*, pp. 18—19.

[11] This is shown in paper: M. Heller: *Mach's Principle and Differentiable Manifolds*, „Acta Physica Polonica", B1 (1970) 131—138.