Mieczysław Lubański

Półgrupy i automaty

Studia Philosophiae Christianae 10/2, 131-149

1974

Studia Philosophiae Christianae
ATK
10/1974/2

MIECZYSŁAW LUBAŃSKI

PÓŁGRUPY I AUTOMATY

1. Wprowadzenie

Pojęcie układu względnie odosobnionego przyjmuje się jako znane. Zamiast „układ względnie odosobniony", mówi się krótko „układ". Wyróżnia się tzw *wejścia* (do układu) oraz *wyjścia* (z układu). Z jednego punktu widzenia mogą one być bądź *wewnętrzne,* bądź *zewnętrzne,* z drugiego zaś — *informacyjne* bądź *zasileniowe.* Ważnym rodzajem układów są tzw. *układy informacyjne.* Przez układ informacyjny rozumie się taki układ, który posiada co najmniej jedno wejście zewnętrzne informacyjne oraz co najmniej jedno wyjście zewnętrzne informacyjne[1].

Drugim ważnym rodzajem układów są tzw. *układy cybernetyczne.* Przez układ cybernetyczny rozumie się taki układ, który jest układem o dużej złożoności, posiada charakter probabilistyczny oraz zdolność do samoregulacji[2]. Przypomnijmy, że charakter probabilistyczny układu polega na tym, że stan jego wyjść w pewnej chwili może być określony jedynie z mniejszym lub większym prawdopodobieństwem.

Przypuśćmy teraz, że mamy dany układ *U. A priori* możliwe

[1] Por. np. J. Gościński, *Cybernetyczne podstawy informatyki,* OBRI, Warszawa 1973, 4.

[2] Zob. tamże, 25.

są następujące dwie różne sytuacje. Po pierwsze, kiedy stan wyjść w pewnej chwili t zależy jedynie od stanu wejść w tej samej chwili t. Po drugie, kiedy stan wyjść w chwili t zależy od stanu wejść w chwilach s takich, że $0 \leqslant s \leqslant t$. Jeżeli mamy do czynienia z sytuacją pierwszą, to wówczas rozpatrywany przez nas układ U zwie się *układem kombinacyjnym*. Jeżeli ma miejsce sytuacja druga, to układ U zwie się *układem sekwencyjnym*. Zamiast *układ sekwencyjny* mówi się także *maszyna sekwencyjna* albo *automat*[3].

Pojęcie *półgrupy* jest pojęciem z zakresu algebry abstrakcyjnej. Stanowi ono szczególny przypadek ogólniejszego pojęcia *grupoidu*. Półgrupą zwie się bowiem grupoid łączny, tzn. grupoid, w którym działanie posiada własność łączności.

Termin „półgrupa" kojarzy się natychmiast z matematyką, zaś termin „automat" — z pewnym urządzeniem, którego działanie w danym momencie czasu zależy zarówno od aktualnego stanu wejść, jak i od jego całej przeszłości. Na pierwszy rzut oka może się więc wydawać, że nie zachodzą żadne relacje między pojęciem półgrupy a pojęciem automatu. Okazuje się, że w rzeczywistości jest inaczej. Artykuł ten stawia sobie za cel przedyskutowanie zasygnalizowanego problemu, w szczególności wskazanie na istniejące, między wspomnianymi pojęciami, pewne proste relacje.

2. Alfabety i operatory abstrakcyjne

Alfabetem abstrakcyjnym nazywa się dowolny skończony zbiór jakichkolwiek przedmiotów. Elementy tworzące alfabet abstrakcyjny zwie się *literami abstrakcyjnymi*. Ze względu na wygodę wysławiania się zwykle opuszcza się przymiotnik „abstrakcyjny" i mówi się krótko „alfabet" oraz „litera".

Uporządkowany układ liter danego alfabetu zwie się *słowem* lub *wyrazem* w danym alfabecie. Długością słowa zwie się liczbę liter, z których ono się składa. Jeżeli alfabet składa się z li-

[3] Por. np. M. A. Harrison, *Wstęp do teorii sieci przełączających i teorii automatów*, Warszawa 1973, 90, 302.

ter ?, &, §, to słowo ??&§§§ posiada długość równą *6*. Długość słowa *S* oznaczać można symbolem *lg(S)*. A zatem, w naszym przypadku, byłoby: *lg*(??&§§§) = 6. Wprowadza się także pojęcie *słowa pustego*. Rozumie się przez nie takie słowo, które nie zawiera żadnej litery. Oznaczać je będziemy literą *E*. Długość słowa pustego *E* jest równa zeru[4].

Pojęcie słowa jest zrelatywizowane do alfabetu. Jeden i ten sam ciąg symboli może być traktowany w jednym alfabecie jako jedno słowo, zaś w innym jako kilka słów. Np. w alfabecie złożonym z dziesięciu cyfr od zera do dziewięciu oraz ze znaku dodawania i znaku równości zapis $7 + 8 = 15$ stanowi jedno słowo, zaś w alfabecie złożonym tylko ze wspomnianych dziesięciu cyfr w zapisie powyższym mieć będziemy trzy słowa.

Niech dany będzie alfabet *A*. Przypuśćmy, że dołączyliśmy do niego nowe przedmioty, które do tej pory nie wchodziły w skład jego elementów. Mówimy wówczas, że nowy alfabet stanowi rozszerzenie alfabetu *A*.

Przypuśćmy teraz, że mamy dane dwa alfabety *A* oraz *B*. Jeżeli każdemu elementowi alfabetu *A* został przyporządkowany dokładnie jeden element alfabetu *B*, to mówimy, że został określony *operator literowy* alfabetu *A* w alfabet *B*. Jeżeli wspomniane przyporządkowanie posiada tę własność, że wszystkie elementy alfabetu *B* zostały wyczerpane, to operator literowy zwie się *operatorem alfabetu A na alfabet B*.

Oznaczmy dla danego alfabetu *A* przez *W(A)* zbiór wszystkich słów w danym alfabecie. Przypuśćmy, że mamy dane dwa alfabety *A* oraz *B*, a także zbiory *W(A) i W(B)*. Przypuśćmy dalej, że każdemu elementowi zbioru *W(A)* został przyporządkowany pewien (dokładnie jeden) element zbioru *W(B)*. Mówimy wówczas, że określony został operator alfabetyczny na alfabecie *A* w alfabet *B*.

Operator alfabetyczny bywa nazywany również *operatorem*

---

[4] Gdy idzie o symbol *lg* oznaczający długość wyrazu abstrakcyjnego por. M. A. Harrison, Op. cit., 302.

abstrakcyjnym, a także krótko, jeśli to nie prowadzi do nieporozumień, po prostu operatorem.

Alfabet A nosi nazwę *alfabetu wejściowego*, alfabet B — *alfabetu wyjściowego*. Elementy zbioru $W(A)$ zwą się *słowami wejściowymi*, zaś elementy zbioru $W(B)$ — *słowami wyjściowymi*.

Trzeba określić także tzw. *operatory częściowe*. Rozumie się przez nie jednoznaczne przyporządkowania pewnym tylko słowom wejściowym słów wyjściowych. A zatem nie każdemu słowu wejściowemu, czyli nie każdemu elementowi zbioru $W(A)$, zostaje, w tym przypadku, przyporządkowane słowo wyjściowe, czyli element zbioru $W(B)$. Jeżeli będziemy posługiwać się operatorami częściowymi, to zawsze można zakładać, że alfabet wejściowy jest identyczny z alfabetem wyjściowym. Wystarczy w tym celu, jak łatwo widzieć, utworzyć z danych alfabetów A oraz B nowy alfabet C, będący połączeniem obu wspomnianych alfabetów, a więc stanowiący zarazem rozszerzenie i jednego i drugiego alfabetu. Zakładamy tutaj, że część wspólna alfabetów A oraz B jest zbiorem pustym, zgodnie z podaną nieco wyżej definicją rozszerzenia alfabetu abstrakcyjnego.

Ważną klasę operatorów alfabetycznych stanowią *algorytmy*. Przez algorytm rozumie się operator alfabetyczny, który jest określony przy pomocy skończonej liczby prawideł. Wynika stąd bezpośrednio, iż każdy operator alfabetyczny, który jest określony w sposób możliwy do zrealizowania jest algorytmem[5]. Należy jednak zwrócić uwagę na to, że samo żądanie, aby liczba prawideł, określających operator alfabetyczny, była liczbą skończoną, wydaje się być wymaganiem niekiedy zbyt słabym. Jeżeli bowiem wspomniana liczba prawideł jest skończona, lecz bardzo duża, to z praktycznego punktu widzenia nie zawsze jest możliwe zrealizowanie tego rodzaju algorytmu. Np. gdyby w algorytmie należało wykonać tyle operacji, ile jednostek mieści w sobie liczba parzysta, od której obowią-

---

[5] Por. W. M. Głuszkow, *Wwiedienie w kibernetiku*, Kijew 1964, 17.

zuje już (zgodnie z dowodem podanym przez I. M. Winogradowa w roku 1937) hipoteza Goldbacha[6], to byłby on praktycznie nie do zrealizowania.

Ważną klasę algorytmów stanowią tzw. *algorytmy normalne*. Teoria ich została zbudowana przez A. A. Markowa. Zachodzi następująca zasada normalizacji: każdy konstruktywnie zadany algorytm nad alfabetem skończonym jest równoważny pewnemu algorytmowi normalnemu nad tym alfabetem[7]. A zatem algorytmy normalne stanowią pewnego rodzaju algorytmy uniwersalne w odniesieniu do klasy algorytmów zadanych w sposób konstruktywny.

3. Systemy algebraiczne

Niech teraz a oznacza liczbę porządkową, czyli tzw. *typ porządkowy zbioru dobrze uporządkowanego*. Przez $P(a)$ oznaczać będziemy zbiór wszystkich liczb porządkowych mniejszych od liczby a. W szczególności będziemy mieć: $P(4) = (0, 1, 2, 3)$, $P(7) = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6)$.

Niech dane będą dwie liczby porządkowe a oraz b. *Typem rzędu* (a, b) nazywa się parę odwzorowań, odpowiednio, zbiorów $P(a)$ oraz $P(b)$ w zbiór liczb naturalnych $N = (0, 1, 2, \ldots)$. Typ rzędu (a, b) oznaczać będziemy literą T pisząc:

$T = (m_0, m_1, \ldots, m_x, \ldots; n_0, n_1, n_2, \ldots, n_y, \ldots)$, gdzie $x < a$ oraz $y < b$[8].

Jeżeli liczby porządkowe a oraz b są skończone, to typ T także nazywa się skończony.

Operacją n-argumentową na zbiorze Z nazywa się każdą funkcję o n argumentach, określaną na zbiorze Z i o wartościach także ze zbioru Z. Natomiast *predykatem n-argumentowym na*

[6] Zob. W. Sierpiński, *Arytmetyka teoretyczna*, Warszawa 1968[4], 100.

[7] A. A. Markow, *Tieorija algorifmow*, Trudy matiematiczeskogo instituta im. W. A. Stiekłowa, Izd. AN SSSR, t. 42, 1954. Podstawowe pojęcia z teorii algorytmów normalnych, a także zasadę normalizacji, można znaleźć także w pracy: W. M. Głuszkow, Op. cit., 19—28.

[8] Teorię systemów algebraicznych zawiera np. książka: A. I. Malcew, *Algebraiczeskije sistemy*, Moskwa 1970.

zbiorze Z nazywa się każdą funkcję o n argumentach określoną na zbiorze Z o wartościach przyjmowanych ze zbioru dwuelementowego (V, F), gdzie V symbolizuje prawdę, zaś F — fałsz.

Systemem algebraicznym typu T nazywa się obiekt złożony z niepustego zbioru Z, ze zbioru operacji $F_O, F_1, ..., F_x, ...,$ określonych na zbiorze Z dla każdego $x < a$ oraz ze zbioru predykatów $P_O, P_1, ..., P_y, ...,$ określonych na zbiorze Z dla każdego $y < b$, przy czym żąda się, aby F_x była operacją *m_x-argumentową* dla każdego $x < a$, natomiast P_y było predykatem *n_y-argumentowym* dla każdego $y < b$. Zdefiniowany system algebraiczny oznacza się krótko symbolem (Z, F, P). Litera F prezentuje tu cały zbiór operacji, określonych na danym niepustym zbiorze Z, zaś litera P — cały zbiór predykatów określonych także na zbiorze Z.

System algebraiczny (Z, F, P) nazywa się *skończony*, jeżeli jego tzw. zbiór bazowy, tj. zbiór Z, jest skończony.

System algebraiczny typu skończonego można zapisywać w postaci $(Z; F_1, ..., F_r; P_1, ..., P_s)$.

System algebraiczny (Z, F, P) nazywa się *algebrą*, jeśli zbiór predykatów danego systemu jest zbiorem pustym. Jeżeli natomiast zbiór operacji jest zbiorem pustym, to system zwie się *modelem*.

Jest widoczne, że każdej operacji można w sposób wzajemnie jednoznaczny przyporządkować predykat. Mianowicie operacji *k-argumentowej* F_k odpowiada predykat *(k + 1-argumentowy* P_{k+1}. Toteż zastępując w danym systemie algebraicznym (Z, F, P) wszystkie operacje przez odpowiadające im predykaty, otrzymuje się z systemu algebraicznego model, który zwie się modelem reprezentującym dany system. Jeżeli system wyjściowy był typu T rzędu (a, b), to model go reprezentujący będzie posiadał typ rzędu $(a + b)$. Można więc powiedzieć, że pojęcie modelu stanowi pojęcie uniwersalne w stosunku do klasy systemów algebraicznych.

Przypuśćmy, że dane są dwa systemy algebraiczne (Z, F, P) oraz (X, G, Q) tego samego typu T rzędu (a, b). *Izomorfizmem*

pierwszego systemu na drugi nazywa się wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie f zbioru Z na zbiór X, które spełnia następujące dwa warunki:
1) $f(F_x) = G_x(f)$, 2) $P_y \equiv Q_y(f)$.

Jeżeli f jest odwzorowaniem zbioru Z w zbiór X spełniającym warunek 1), to odwzorowanie f nazywa się *homomorfizmem* pierwszego sytemu w drugi.

Zachodzi następujące intuicyjne twierdzenie:

Odwzorowanie f systemu algebraicznego (Z, F, P) w system algebraiczny (X, G, Q) jest homomorfizmem pierwszego systemu w drugi, wtedy i tylko wtedy, gdy f jest homomorfizmem modelu reprezentującego system (Z, F, P) w model reprezentujący system (X, G, Q).

4. Półgrupy

Algebra typu (2), czyli niepusty zbiór z jedną określoną w nim operacją dwuargumentową, nazywa się *grupoidem*. Zatem grupoid może być przedstawiony w postaci $(G, .)$, gdzie G jest niepustym zbiorem, zaś . oznacza operację dwuargumentową.

Grupoid, w którym operacja dwuargumentowa . jest działaniem łącznym, tzn. spełniającym zależność $(x . y) . z = x . (y . z)$ dla wszystkich elementów x, y, z należących do zbioru G, nazywa się *półgrupą*.

Rozważmy alfabet A oraz zbiór wszystkich słów na nim zbudowanych, tj. zbiór $W(A)$. Określmy na zbiorze $W(A)$ operację konkatenacji w sposób następujący. Jeżeli mamy dane dwa słowa s_1, oraz s_2, to przez ich *konkatenację* będziemy rozumieć utworzenie nowego słowa s_3, które otrzymuje się z poprzednich słów przez wypisanie najpierw wszystkich liter słowa s_1, potem zaś wszystkich liter słowa s_2. Jest widoczne, że tak określona operacja konkatenacji posiada własność łączności. Jest bowiem spełniony wymagany wyżej warunek $(x . y) . z = x . (y . z)$, o ile tylko przez x, y, z, będziemy rozumieli słowa nad alfabetem A, czyli elementy zbioru $W(A)$. A zatem zbiór wszystkich słów zbudowanych nad alfabetem A, czyli zbiór $W(A)$, z operacją konkatenacji jest półgrupą[9].

Jeżeli w zbiorze G istnieje element neutralny względem działania ., to półgrupę nazywa się *monoidem*.

Jest widoczne, że w przypadku zbioru $W(A)$ oraz operacji konkatenacji mamy do czynienia z monoidem. Elementem neutralnym jest tutaj słowo puste E. Posiada ono tę własność, że dla każdego słowa x należącego do zbioru $W(A)$ spełniony jest warunek: $E \,.\, x = x \,.\, E = x$.

Podzbiór G' zbioru G, który jest zamknięty ze względu na operację . nazywa się *podpółgrupą półgrupy* G. Przypomnijmy, że przez zamkniętość zbioru G' względem operacji . rozumie się własność polegającą na tym, że $x \,.\, y$ należy do G' o ile tylko x oraz y należą do G'.

Przypuśćmy, że dane są dwie półgrupy G_1 oraz G_2. Odwzorowanie h półgrupy G_1 w półgrupę G_2 nazywa się *homomorfizmem* półgrupy G_1 w półgrupę G_2, jeżeli h spełnia warunek: $h(g \,.\, g') = h(g) \,.\, h(g')$ dla wszystkich g oraz g' należących do G_1.

Jeżeli mamy dane dwa monoidy G_1 oraz G_2, zaś odwzorowanie h przekształca element neutralny pierwszego monoidu na element neutralny drugiego monoidu i spełnia przy tym podany przed chwilą warunek, to h nazywa się *homomorfizmem pierwszego monoidu w drugi*[10].

Powróćmy jeszcze na chwilę do monoidu $W(A)$. W rozważanym przypadku stosuje się następującą terminologię. Monoid $W(A)$ zwie się *swobodnym* (albo: wolnym) *monoidem indukowanym* przez alfabet A.

---

[9] Por. np. M. Gross, A. Lentin, *Tieorija formalnych grammatik*, Izdatielstwo „Mir", Moskwa 1971, 15—16.

[10] Podstawowe pojęcia z teorii półgrup oraz teorii monoidów można znaleźć np. w pracy: R. E. Kalman, P. L. Falb, M. A. Arbib, *Oczerki po matiematiczeskoj tieorii sistem*, Izdatielstwo „Mir", Moskwa 1971, 211—217. Pełny wykład teorii półgrup zawiera pozycja: A. H. Clifford, G. B. Preston, *Ałgebraiczeskaja tieorija poługrup*, Izdatielstwo „Mir", t. 1, Moskwa 1972, t. 2, Moskwa 1972.

Niech dany będzie dowolny zbiór niepusty Z. Niech f będzie przekształceniem tego zbioru w siebie. Wówczas można określić dwie półgrupy :$F_L(Z)$ oraz $F_R(Z)$. Pierwsza z nich składa się ze wszystkich funkcji f przekształcających Z w siebie, gdzie operacją półgrupową jest złożenie funkcji określone wzorem $(f_1 \cdot f_2)(x) = f_1(f_2/x/)$. Druga zaś składa się także ze wszystkich powyżej określonych funkcji f, gdzie operacja półgrupowa dana jest wzorem: $(x)(f_1 \cdot f_2) = (/x/f_1)f_2$. Widzimy zatem, że różnica między zdefiniowanymi półgrupami polega na innym porządku superponowania funkcji. Jeżeli wspomniane superponowanie dwu funkcji f_1 oraz f_2 rozumie się w porządku $f_1f_2(x)$, to mamy do czynienia z półgrupą $F_L(Z)$, jeśli zaś w porządku $f_2f_1(x)$, to mieć będziemy półgrupę $F_R(Z)$[11].

Reprezentacją półgrupy G nazywa się homomorfizm h, który odwzorowuje półgrupę G w półgrupę $F_T(Z)$, gdzie Z jest pewnym zbiorem, zaś T jest identyczne bądź z L, bądź z R.

Każda półgrupa G posiada dwie reprezentacje szczególnie proste. Zwie się je, odpowiednio, *lewostronną regularną reprezentacją* oraz *prawostronną regularną reprezentacją*. Reprezentacje te związane są z odwzorowaniem półgrupy G w siebie. Z pierwszą z nich będziemy mieć do czynienia wówczas, gdy dokonujemy operacji mnożenia półgrupowego ze strony lewej, z drugą natomiast — gdy mnożymy ze strony prawej[12].

5. Automaty abstrakcyjne

Automatem abstrakcyjnym (lub krótko: automatem) nazywa się układ $M = (X, Y, Q, p, w)$, gdzie X oraz Y są pewnymi zbiorami skończonymi (X zwie się alfabetem wejściowym, Y — alfabetem wyjściowym), Q jest zbiorem stanów, zaś p — funkcją bezpośredniego przejścia, a w — funkcją bezpośredniego wyjścia[13].

Wyróżnia się *automaty bez wyjścia* oraz *automaty z wyjściem* nad danym alfabetem wejściowym X.

---

[11] Por. R. E. Kalman, P. L. Falb, M. A. Arbib, Op. cit., 213.

[12] Tamże, 214.

[13] Tamże, 217.

Przypomnijmy te określenia.

Automatem bez wyjścia nad alfabetem X nazywa się układ $M = (X, Q, q, p)$, gdzie q jest stanem początkowym. Pozostałe symbole posiadają to samo znaczenie, jakie mają w definicji ogólnej[14].

Automatem z wyjściem nad alfabetem X nazywa się układ $M = (X, Y, Q, q, p, w)$, gdzie wszystkie wymienione symbole posiadają to samo znaczenie, jak podano wyżej. Zakłada się tu, że funkcja w realizuje pewne elementy wyjściowe dla określonego podzbioru Q' zbioru stanów wewnętrznych Q[15].

Dla prostoty rozważań przyjmuje się zwykle, że dozwolone są jedynie dwa elementy wyjściowe, które oznacza się przez zero oraz jeden. Mamy więc tu do czynienia z przypadkiem *binarnym*. Ważne jest to, że ograniczenie się do powyższego przypadku nie zmniejsza ogólności otrzymywanych wyników[16].

W definicji automatu zakłada się, że oba alfabety wejściowy oraz wyjściowy są zbiorami skończonymi. Natomiast o zbiorze Q, zwanym *zbiorem stanów wewnętrznych*, nie zakłada się tego. Może on więc być zarówno *zbiorem skończonym*, jak *i nieskończonym*. Jeżeli zbiór Q jest zbiorem skończonym, to wówczas także automat M nazywa się *automatem skończonym*.

Funkcja bezpośredniego przejścia p jest określona na iloczynie kartezjańskim zbiorów Q oraz X. Wartości jej należą do zbioru Q. Można więc powiedzieć, że funkcja p przyporządkowuje określonemu stanowi wewnętrznemu oraz określonemu elementowi wejściowemu pewien stan wewnętrzny. Funkcja bezpośredniego wyjścia w jest określona na tym samym zbiorze, co funkcja p. Natomiast wartościami jej są elementy alfabetu wyjściowego Y. Zatem funkcja w przyporządkowuje określonemu stanowi wewnętrznemu oraz określonemu elementowi wejściowemu pewien element wyjściowy.

---

[14] Por. M. A. Harrison, Op. cit., 303.

[15] Tamże, 324—325.

[16] Tamże, 324.

Jest widoczne, że można łatwo rozszerzyć funkcje p oraz w na iloczyn kartezjański zbioru Q przez monoid swobodny $W(X)$. A więc w miejsce alfabetu wejściowego X brać zbiór wszystkich słów abstrakcyjnych utworzonych nad alfabetem X, czyli zbiór $W(X)$. Nawet w przypadku binarnym stanowi to istotne poszerzenie dziedziny obu rozważanych funkcji. W tym bowiem przypadku n-literowych wyrazów mieć będziemy 2^n dla każdego naturalnego n[17].

Oznaczmy $p(q, x)$ symbolem $M_q(x)$ dla każdego stanu wewnętrznego q oraz każdego elementu wejściowego x. Mamy więc $p(q, x) = M_q(x)$.

Dwa stany wewnętrzne q_1 oraz q_2 automatu M nazywa się równoważnymi, jeżeli zachodzi równość $M_{q_1} = M_{q_2}$, przy czym funkcje M_q, traktujemy jako funkcje określone na zbiorze $W(X)$ o wartościach w zbiorze Y.

Przypuśćmy teraz, że rozważamy odwzorowanie przyporządkowujące stanowi wewnętrznemu q funkcję M_q. Jeśli wspomniane odwzorowanie jest odwzorowaniem wzajemnie jednoznacznym, to automat M nazywa się *redukowalny*.

Niech dane będą dwa automaty $M = (X, Y, Q, p, w)$ oraz $M' = (X, Y, Q', p', w')$, a więc automaty o tych samych alfabetach wejściowych oraz wyjściowych. Mówimy, że automaty te są mocno równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy każdemu stanowi $q \varepsilon Q$ odpowiada taki stan $q' \varepsilon Q'$, iż spełniona jest równość $M_q = M_{q'}$ oraz na odwrót.

Zachodzi następujące twierdzenie:

Każdy automat $M = (X, Y, Q, p, w)$ jest mocno równoważny pewnemu automatowi redukowalnemu $M^\circ = (X^\circ, Y^\circ, Q^\circ, p^\circ, w^\circ)$[18].

Zauważmy, od strony intuicyjnej, że podane wyżej określenie automatu pozwala interpretować go jako urządzenie, które znajdujdując się w chwili t w stanie wewnętrznym q oraz otrzymując oddziaływanie wejściowe x *przejdzie* w chwili

[17] Tamże, 218.

[18] Tamże, 218.

$(t + 1)$ do stanu $p(q, x)$ generując zarazem na wyjściu wartość $w(q, x)$. Dodajmy jeszcze, że we wszystkich powyższych definicjach milcząco zostało przyjęte założenie co do charakteru zbioru chwil. Orzeka ono, że zbiór momentów czasu posiada postać $T = (0, 1, 2, ...)$. Jest więc zbiorem nieciągłym.

6. Półgrupy a automaty

Zajmiemy się obecnie omówieniem relacji zachodzących między półgrupami a automatami. Wskażemy, w jaki sposób wychodząc od danego automatu można dojść do półgrupy, a także jak określona półgrupa wyznacza pewien automat.

Wprowadzimy najpierw jeszcze pewne znakowanie.

Niech dany będzie automat $M = (X, Y, Q, p, w)$. Zakładamy, że jest to automat redukowalny, przy czym wszystkie jego stany wewnętrzne są osiągalne z pewnego ustalonego stanu q_0. Tego rodzaju automat będziemy oznaczać symbolem $M(f)$, gdzie $f = p(q_0, x)$.

Weźmy teraz tzw. relację równoważności Myhilla[19], którą oznaczać będziemy znakiem $:=$. Niech f będzie dowolną funkcją odwzorowującą zbiór $W(X)$ w zbiór Y. Utwórzmy klasy równoważności relacji $:=$. Określmy między nimi działanie rozumiejąc przez nie kolejne wzięcie przekształceń stanu. W ten sposób ze zbioru $W(X)$ powstaje półgrupa, którą oznaczać będziemy przez $G(f)$. Jest widoczne, że elementy półgrupy $G(f)$ odpowiadają ciągom utworzonym z alfabetu wejściowego, które są traktowane jako funkcje przejścia automatu $M(f)$. W ten sposób przechodzi się od pojęcia automatu do pojęcia półgrupy. Zachodzi przy tym następujące proste twierdzenie[20]:

Automat $M(f)$ jest automatem skończonym wtedy i tylko wtedy, gdy półgrupa $G(f)$ jest półgrupą skończoną.

Przypuśćmy, że mamy daną dowolną półgrupę G. Zdefiniu-

---

[19] Definicję równoważności Myhilla można znaleźć np. w pracy R. E. Kalman, P. L. Falb, M. A. Arbib, Op. cit., 221.

[20] Tamże, 223.

jemy teraz automat, który oznaczać będziemy symbolem $M(G)$, zwany automatem wyznaczonym przez półgrupą G. W tym celu wystarczy przyjąć zarówno za alfabet wejściowy, wyjściowy oraz zbiór stanów wewnętrznych zbiór bazowy półgrupy G, zaś za funkcję p i funkcję w wziąć operację półgrupową, oznaczaną przez kropkę. Toteż określony automat można zapisać następująco: $M(G) = (G, G, G, \cdot, \cdot)$.

Z definicji automatu $M(G)$ wynika, że jeżeli automat ten w pewnej chwili t znajduje się w stanie g oraz otrzymuje na wejściu wartość g', to wówczas w chwili późniejszej o jednostkę, tj. w chwili $(t + 1)$, zarówno jego stan wewnętrzny, jak i wartość na wyjściu będą równe $g \cdot g'$.

W podany wyżej sposób przechodzi się od automatu $M(f)$ do półgrupy $G(f)$ oraz od półgrupy G do automatu $M(G)$. W naturalny sposób nasuwa się pytanie następujące. Weźmy mianowicie półgrupę $G(f)$ oraz odpowiadający jej, opisany na drugiej drodze, automat $M(G/f/)$. Zapytujemy czy automaty $M(f)$ oraz $M(G/f/)$ są indentyczne?

Aby na to pytanie odpowiedzieć potrzebne będzie jeszcze pewne pojęcie pomocnicze.

Mówimy, że automat $M = (X, Y, Q, p. w)$ modeluje automat $M' = (X', Y', Q', p', w')$ jeżeli istnieją trzy odwzorowania h_1, h_2, h_3 takie, że h_1 przekształca zbiór $W(X')$ w zbiór $W(X)$, h_2 przekształca zbiór Q' w zbiór Q, zaś h_3 przekształca zbiór Y w zbiór Y', przy czym od $W(X')$ do Y' można iść w dowolny sposób (innymi słowy znaczy to, że odpowiedni diagram dla rozpatrywanych tu funkcji jest przemienny).

Jeżeli zarówno automat M modeluje automat M', jak i automat M' modeluje automat M, to mówimy, że automaty M oraz M' są *słabo równoważne*.

Określmy teraz dla danej półgrupy $G(f)$ funkcję i_f, która przekształca $G(f)$ w zbiór Y i posiada tę własność, że jeśli x przeprowadza automat ze stanu początkowego do stanu g, to wówczas $i_f(g) = f(x)$. Oznaczmy następnie przez $M(G/f/, i_f)$ automat postaci $(G/f/, Y, G/f/, \cdot , i_f)$. Wówczas zachodzi następujące twierdzenie:

Automaty $M(f)$ oraz $M(G/l/, i_f)$ są słabo równoważne[21].

Powyższe twierdzenie korzysta z pojęcia modelowania. Można pozbyć się tego terminu przez przeredagowanie wspomnianego pojęcia na język półgrup. Konsekwentnie otrzyma się odpowiednik interesującego nas twierdzenia wypowiedziany w języku półgrupy. Sygnalizujemy jedynie tę sprawę i nie będziemy bliżej się nią zajmować[22].

Zanotujemy jeszcze, że ważnym zagadnieniem w odniesieniu do teorii automatów jest zagadnienie ich tzw. *minimalizacji*. Chodzi tu o rzecz następującą. Nazwijmy funkcją odpowiedzi automatu $M = (X, Y, Q, p, w)$ funkcję $p(q_O, x)$, gdzie q_O jest stanem początkowym, zaś x jest słowem nad alfabetem wejściowym X. Zbiór wszystkich tych słów wejściowych, które są argumentami funkcji $p(q_O, x)$, tj. funkcji odpowiedzi automatu M, nazywa się zachowaniem się automatu M. Problem minimalizacji polega na tym, aby dla danego automatu M o określonym zachowaniu zdefiniować automat N, który miałby możliwie najmniejszą liczbę stanów wewnętrznych, zaś jego zachowanie byłoby identyczne z zachowaniem automatu M. Okazuje się, że automat minimalny jest jeden z dokładnością do izomorfizmu[23].

7. Różne sposoby zadania automatu

Istnieją co najmniej trzy sposoby, przy pomocy których może zostać określony automat. Zwie się je, odpowiednio, metodą *analityczną, geometryczną* oraz *algebraiczną*.

Analityczne określenie automatu polega na zdefiniowaniu go jako układu złożonego z pięciu elementów X, Y, Q, p oraz w w sposób podany wyżej. Zatem analityczny sposób określenia automatu jest nam już znany. W ten bowiem sposób postępowano we wcześniejszej części artykułu.

---

[21] Tamże, 227.

[22] Szczegóły można znaleźć np. w pracy R. E. Kalman, P. L. Falb, M. A. Arbib, Op. cit., 228—229.

[23] Problem minimalizacji ujęty przystępnie można znaleźć w pracy M. A. Harrison, Op. cit., 339—348.

Dwie dalsze metody: geometryczna oraz algebraiczna są równoważne metodzie analitycznej. Polegają one na tym, że w przypadku metody geometrycznej korzysta się z *grafu zorientowanego* (który bywa nazwany *grafoidem),* zaś w przypadku algebraicznym — z *macierzy*. Można więc, mówiąc prościej, określić automat przy pomocy pewnego grafoidu, bądź przy pomocy pewnej macierzy.

Wspomniany grafoid buduje się następująco. Za jego wierzchołki przyjmuje się stany wewnętrzne automatu. Natomiast wzdłuż boku, łączącego stan q ze stanem q', umieszcza się ten element alfabetu wejściowego, względnie funkcję p dla danego argumentu wziętego z alfabetu wejściowego, przy którym następuje przejście ze stanu q do stanu q', oraz ten element alfabetu wyjściowego, który dany jest, w rozpatrywanym przypadku przez funkcję w.

Metoda macierzowa polega na zbudowaniu dwu macierzy prostokątnych, mianowicie macierzy dla funkcji przejść oraz dla funkcji wyjść. W macierzach tych występują także, oczywiście, elementy obu alfabetów: wejściowego oraz wyjściowego i elementy zbioru stanów wewnętrznych. Dzięki temu otrzymujemy określenie automatu równoważne zarówno z określeniem analitycznym, jak i geometrycznym.

Jeżeli mamy do czynienia z automatami skończonymi, w których wszystkie zbiory, a więc i zbiór elementów alfabetu wejściowego, jak i zbiór elementów alfabetu wyjściowego oraz zbiór stanów wewnętrznych automatu, a także zbiory wszystkich wartości funkcji p oraz w są skończone, to zarówno i grafoid, jak i macierze są tworami skończonymi. W przypadku automatu o nieskończonym zbiorze stanów wewnętrznych trzeba by posługiwać się grafoidami oraz macierzami nieskończonymi. Wspominamy jedynie o tych zagadnieniach nie wchodząc w bliższe rozważania. Chodziło bowiem jedynie o poinformowanie Czytelnika o istniejącej tu problematyce w celu możliwie pełnego przedstawienia całego zagadnienia związanego z rodzajami automatów oraz sposobami ich określania

Literatura odnosząca się do wspomnianych zagadnień jest obfita[24].

Dodajmy jeszcze, że gdy posiadamy grafoid określający dany automat, to wówczas można od grafoidu przejść do *dendrytu*. Może on być skończony, bądź nieskończony. Wspomniany dendryt buduje się w następujący sposób. Ustala się wierzchołek wyjściowy, który odpowiada stanowi początkowemu automatu. Następnie z tego wierzchołka prowadzi się tyle odcinków, ile jest elementów w alfabecie wejściowym. Końce wspomnianych odcinków dają wierzchołki pierwszego rzędu. Niech ich będzie n. Z każdego z tych wierzchołków prowadzimy dalej po n odcinków, otrzymując w następnym, drugim rzędzie, n^2 wierzchołków drugiego rzędu. I tak postępujemy dalej. Każdemu odcinkowi z dowolnego rzędu przypisujemy odpowiedni element z alfabetu wejściowego i alfabetu wyjściowego, zaś wierzchołkowi odpowiedni element ze zbioru stanów wewnętrznych automatu zgodnie z danym grafoidem. Jest widoczne, że grafoid wyznacza jednoznacznie opisany przed chwilą dendryt. Posiadając więc zdefiniowany automat przy pomocy grafoidu, otrzymamy łatwo jego przedstawienie przy pomocy dendrytu. I, oczywiście, także odwrotnie. Mając dany dendryt, możemy utworzyć odpowiadający mu grafoid[25].

8. Uwagi zamykające

W przedstawionych wyżej rozważaniach wskazano na pewne proste relacje łączące półgrupy z automatami. Mówiąc najkrócej — okazuje się, że półgrupa generuje pewien automat i odwrotnie, automat generuje pewną półgrupę. Jest widoczne, że każda półgrupa stanowi szczególny przypadek systemu al-

---

[24] Zob. np. A. I. Malcew, *Algoritmy i rekursiwnyje funkcii*, Moskwa 1965; A. N. Mielichow, *Orientirowannyje grafy i koniecznyje awtomaty*, Moskwa 1971; M. Minsky, *Wyczislenija i awtomaty*, Moskwa 1971; Cz. Fajsi, *Ob otliczimosti bieskoniecznych awtomatow*, Problemy Kibernetiki 23 (1970), 209—212. W pracach tych można znaleźć dalsze wskazówki bibliograficzne.

[25] Zob. np. A. N. Mielichow, Op. cit., 160—161.

gebraicznego. Jeśli bowiem coś jest półgrupą, to jest tym samym i systemem algebraicznym. W ten sposób dochodzimy do pewnego powiązania zachodzącego między systemami algebraicznymi oraz automatami. Fakt ten wydaje się interesujący, ponieważ wskazuje na praktyczną stosowalność abstrakcyjnych tworów matematyki do opisywania rzeczywistych tworów istniejących w świecie realnym. Posiada to wyraźny wydźwięk teoriopoznawczy, metodologiczny, jak i ogólno-filozoficzny.

Pojęcie automatu abstrakcyjnego nie podpada pod pojęcie systemu algebraicznego. Jednakże stanowi także pojęcie typu matematycznego. W pracy rozważano tzw. automaty abstrakcyjne, które są szczególnym przypadkiem ogólniejszego pojęcia systemu dynamicznego. Toteż chcemy zakończyć obecne rozważania przytoczeniem określenia wspomnianego pojęcia. Zarazem będzie to stanowić powien argument świadczący o przenikaniu metod matematycznych do różnych dziedzin wiedzy, a więc argument świadczący o matematyzowaniu się nauk. A oto wspomniane określenie[26]:

Systemem dynamicznym S nazywa się układ $S = (T, Q, X, C, Y, D, j, k)$, gdzie

1. T jest czasem, Q jest zbiorem stanów wewnętrznych, X — — zbiorem wartości chwilowych oddziaływań wejściowych, C — zbiorem dopuszczalnych oddziaływań wejściowych, czyli $C = \{c: T \rightarrow X\}$, Y — zbiorem wartości chwilowych oddziaływań wyjściowych, D — zbiorem wielkości wyjściowych, tj. $D = \{d: T \rightarrow Y\}$,

2. Zbór T jest pewnym uporządkowanym podzbiorem zbioru liczb rzeczywistych,

3. Zbiór C spełnia następujące dwa warunki:

a) Zbiór C jest niepusty,

b) Jeżeli dane są dwie funkcje c_1 oraz c_2, określone odwiednio na podzbiorze zbioru T dla $t_1 < t \leqslant t_2$ oraz $t_2 < t \leqslant t_3$, gdzie $t_1 < t_2 < t_3$, to istnieje funkcja c_3, która jest iden-

[26] Podajemy je za R. E. Kalman, P. L. Falb, M. A. Arbib, Op. cit., 13—15.

tyczna z funkcją c_1 na odcinku pierwszym, zaś identyczna z funkcją c_2 na odcinku drugim,

4. Istnieje funkcja przejścia j, określona na iloczynie kartezjańskim $T \times T \times Q \times C$ o wartościach w zbiorze Q, czyli funkcja $j(t; t', q, c) = q(t)$, która spełnia następujące 4 warunki:

a) Funkcja j jest określona dla wszystkich $t \geqslant t'$, gdzie t' jest tzw. początkowym momentem czasu,

b) Dla każdego $q \varepsilon Q$, każdego $c \varepsilon C$ oraz każdego $t \varepsilon T$ zachodzi równość $j(t; t, q, c) = q$,

c) Spełniony jest wzór: $j(t ; \cdot t_1, q, c) = j(t ; t_2, j/t ; t, q, c/, c)$,

d) Jeżeli $c_1 = c_2$, to $j(t; t', q, c_1) = j(t; t', q, c_2)$,

5. k jest funkcją określoną na iloczynie kartezjańskim $T \times Q$, o wartościach w Y.

Jak widać, z przytoczonej definicji, pojęcie to jest dość złożone. Jest ono jednakże także pojęciem bardzo ogólnym. Każdy automat jest systemem dynamicznym, ale nie odwrotnie. Aby otrzymywać bardziej konkretne twory należy specyfikować powyższą definicję. Toteż odróżnia się np. systemy dynamiczne stacjonarne, systemy dynamiczne z czasem dyskretnym, bądź ciągłym, systemy dynamiczne skończenie wymiarowe, systemy dynamiczne skończone, liniowe, gładkie[27].

Matematyka, jej metody, problematyka badawcza ustawicznie się powiększają. To samo odnosi się również do zastosowań matematyki. Toteż nic dziwnego, że nie potrafimy odpowiedzieć ściśle na pytanie, co to jest matematyka. Jedyną drogą, prowadzącą do uzyskania odpowiedzi na postawione pytanie wydaje się być czynne doświadczenie w dziedzinie samej matematyki[28]. I to doświadczenie w różnych jej działach. Nie otrzyma się bowiem pełnego obrazu całości matematyki, jeżeli ograniczymy się do pewnych tylko jej dziedzin. Bo przecież, mówiąc jedynie przykładowo, teoria liczb, topologia ogólna, algebra abstrakcyjna, analiza funkcjonalna, rachunek

---

[27] Por. R. E. Kalman, P. L. Falb, M. A. Arbib, Op. cit., 16—20.

[28] Zob. R. Courant i H. Robbins, *Co to jest matematyka*, Warszawa 1967[3], 16.

prawdopodobieństwa to nie tylko ważne działy współczesnej matematyki, ale zarazem działy o odmiennych metodach badań, odmiennej problematyce. Poprzestawanie na jednym tylko z nich nie może dać adekwatnego obrazu całej ogromnej i bogatej w myśli matematyki.

HALBGRUPPEN UND AUTOMATEN

(Zusammenfassung)

Das Wort „Halbgruppe" sofort die Mathematik und das Wort „Automat" ein Gerät, welches ohne menschliche Ingerenz arbeitet, erwähnt. Darum, auf den ersten Blick, es scheint nur so, dass zwischen den Begriffen der Halbgruppe und des Automaten keine interessante Relationen gelten. Doch in Wirklichkeit ist es ganz anders. Im Aufsatz die Wechselbeziehungen zwischen Halbgruppen und Automaten besprochen worden sind. Es zeigt sich, dass jede Halbgruppe einen Automaten und jeder Automat eine Halbgruppe erzeugt. Erzeuge der Automat M die Halbgruppe G und die Halbgruppe G den Automaten N. Es gilt dann der Satz: Die Automaten M und N schwach äquivalent sind, das heisst: sie zueinander Wechselmodelle sind. Man kann auch zeigen, dass der Automat ist dann und nur dann endlich, wenn die durch ihm erzeugte Halbgruppe endlich ist. Man erwähnt auch über die drei Weisen des Definierens des Automaten. Das sind solche Methoden: die analytische, geometrische und algebraische Methode. Analytisch definiert man den Automaten als ein System, welches 5 Objekte enthält, die einigen Eigenschaften genügen. Geometrisch definiert man den Automaten mit Hilfe des orientierten Graph, welchen nennt man den Graphoid. Algebraisch definiert man den Automaten mit Hilfe der zwei Martizen, nämlich des Martizes der Durchgangsfunktionen und des Martizes der Ausgangsfunktionen. Zum Schluss die Definition des dynamischen Systems gegeben worden ist. Der Begriff des dynamischen Systems enthält den Begriff des Automaten. Aus der Inhalt des Aufsatzes ergibt sich die grundlegende Idee: die Mathematisation des menschlichen Wissens wurde immer allgemeinere Erscheinung. Das ist zugleich ein Zeugnis der grossen Entwicklung der Mathematik. Sie kann nicht in alten, unaktuellen Schemata abschliessen werden. Diese Schemata die Mathematik in Grenzen von Zahlen und geometrischen Figuren abgeschlossen würden. Doch die Mathematik von heute ohne Zweifel dezisiv über diese Grenzen hinausgeht.