Mieczysław Lubański

Algebraiczne aspekty teorii relacji

Studia Philosophiae Christianae 11/2, 103-119

1975

Studia Philosophiae Christianae
ATK
11 (1975) 2

MIECZYSŁAW LUBAŃSKI

ALGEBRAICZNE ASPEKTY TEORII RELACJI

1. Wstęp

Teoria relacji jest jednym z ważnych działów współczesnej logiki. Mówiąc intuicyjnie relacja jest to każdy związek zachodzący między kilkoma dowolnymi obiektami. Od strony formalnej natomiast relacja jest podzbiorem produktu kartezjańskiego zbiorów. Różne rodzaje relacji charakteryzują się specyficznymi własnościami podzbiorów produktu. Nadto operacjom na relacjach można przyporządkować pewne operacje na zbiorach. Postępując konsekwentnie w tym kierunku daje się przyporządkować relacjom pewne charakterystyki algebraiczne.

Zagadnienie sformułowane w tytule artykułu jest bardzo szerokie. Z istniejącej tu bogatej problematyki poruszamy jedynie niektóre tematy. A więc zawęzimy nasze rozważania do pewnych tylko aspektów algebraicznych, mianowicie do aspektów półgrupowych. Nadto zajmować się będziemy jedynie relacjami dwuczłonowymi. Wskażemy w pracy na pewne, jak się wydaje, interesujące związki zachodzące między relacjami dwuczłonowymi a półgrupami. Droga, po której kroczy się w tym artykule może być, przynajmniej w pewnym znaczeniu, nazwana algebraizowaniem teorii relacji przez podawanie charakterystyk algebraicznych odpowiadających relacjom.

2. Relacje dwuczłonowe

Dla wygody rozważań przypomnimy najpierw pewne pojęcia pomocnicze.

Niech A oraz B będą dwoma zbiorami niepustymi. Przez iloczyn kartezjański (lub inaczej: produkt kartezjański, albo krótko: produkt) zbiorów A oraz B rozumie się zbiór wszystkich par uporządkowanych postaci (a, b), gdzie a jest elementem zbioru A, zaś b — elementem zbioru B. Iloczyn kartezjański zbiorów A oraz B oznaczać będziemy symbolem $A \times B$. W szczególności dla $A = B$ można mówić o produkcie $A \times A$, czyli o zbiorze par uporządkowanych postaci (x, y), gdzie x oraz y są elementami zbioru A.

Przykłady: Produkt okręgu koła przez odcinek jest powierzchnią walca. Jeżeli pomnożymy kartezjańsko dwa okręgi przez siebie, to otrzymamy powierzchnię zwaną torusem. Przestrzeń euklidesowa n-wymiarowa jest produktem kartezjańskim n prostych euklidesowych.

Przez relację dwuczłonową (lub: dwuargumentową) w iloczynie kartezjańskim $A \times B$ rozumie się dowolny podzbiór tego produktu. W przypadku kiedy $A = B$ mamy do czynienia z relacją dwuczłonową w produkcie $A \times A$. Wówczas mówi się krótko o relacji dwuczłonowej w zbiorze A.

Przykłady: Podzbiór produktu liczb rzeczywistych przez siebie określony wzorem: $(x, y) \in P \langle = \rangle (x = y)$ definiuje relację równości wśród liczb rzeczywistych. Formuła: *x jest synem y* określa relację synostwa w zbiorze wszystkich ludzi.

Ponieważ w tej pracy zajmować się będziemy jedynie relacjami dwuczłonowymi, dlatego będziemy mówić po prostu „relacja", mając na myśli relację dwuargumentową.

Relacje w produkcie $A \times B$ oznaczać będziemy literami R, S, T. A zatem, jeżeli R, S, T są relacjami w $A \times B$ znaczy to, że R, S, T są podzbiorami iloczynu kartezjańskiego $A \times B$.

Jeżeli między elementami a oraz b zachodzi relacja R znaczy to, że para uporządkowana (a, b) ϵ R. Zamiast pisać (a, b) ϵ R stosuje się również notacje następujące: aRb oraz R (a, b), zależnie od tego, jak jest wygodniej znakować w danym konkretnym przypadku.

Interesować nas będą szczególnie relacje zachodzące w zbiorze A. Zanim wymienimy pewne podstawowe rodzaje relacji, które będą nam potrzebne w dalszych rozważaniach, przypomnimy wpierw pojęcie relacji odwrotnej oraz pojęcie iloczynu dwu relacji.

Dla danej relacji R w iloczynie kartezjańskim A $\times$ B określa się relację odwrotną R^{-1} rozumiejąc przez nią relację w iloczynie kartezjańskim B $\times$ A złożoną z tych par uporządkowanych (b, a), dla których spełniony jest warunek (a, b) ϵ R. Inaczej mówiąc zachodzi następująca równoważność: $bR^{-1}a \langle = \rangle aRb$.

Przykłady: Do relacji większości w zbiorze liczb rzeczywistych odwrotną relacją jest relacja mniejszości. Relacją odwrotną do relacji określonej formułą: *x jest synem y* jest relacja *y jest rodzicem x*. Inaczej mówiąc, relacją odwrotną do relacji synostwa jest relacja „być rodzicem".

Niech teraz dane będą dwie relacje R oraz S. Pierwsza z nich niech będzie określona w iloczynie A $\times$ B, zaś druga — w produkcie B $\times$ C. Przez iloczyn R.S rozumie się relację określoną w produkcie A $\times$ C, która spełnia następujący warunek: a(R.S.)c zachodzi wtedy i tylko wtedy, kiedy istnieje taki element b ze zbioru B, dla którego mamy aRb oraz bSc, gdzie a jest elementem zbioru A, zaś c — elementem zbioru C. W szczególności można mówić o iloczynie dwu relacji R oraz S określonych w zbiorze A, tj. wówczas gdy A = B = C.

Skoro relacje są podzbiorami produktu kartezjańskiego, a więc są zbiorami, przeto można z sensem mówić o zawieraniu się relacji rozumiejąc przez to zawieranie się odpowiednich podzbiorów produktu definiujących rozpatrywane relacje. Sensowne więc są wzory postaci: R $\subset$ S.

Wyróżnia się pewne podstawowe rodzaje relacji określonych w zbiorze A.

Relacja identyczności na zbiorze A składa się ze wszystkich par postaci (a, a), gdzie a jest elementem zbioru A. I tylko z takich par. Wyrażając się obrazowo powiemy, że relacja identyczności składa się z „przekątnej" produktu $A \times A$. Relację identyczności w zbiorze A oznaczać będziemy symbolem 1_A lub też krótko (o ile to nie będzie powodowało nieporozumień) symbolem 1.

Jest widoczne, że zachodzi następująca zależność dla dowolnej relacji R w zbiorze A: $R.1_A = 1_A.R$.

Relacja R nazywa się relacją zwrotną, jeżeli dla każdego elementu x należącego do zbioru A zachodzi warunek: xRx. Inaczej można warunek powyższy sformułować następująco: relacja A jest zwrotna w zbiorze R wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi inkluzja: $1_A \subset R$.

Relacja R nazywa się symetryczną, jeżeli dla wszelkich x oraz y należących do zbioru A warunek xRy pociąga za sobą warunek yRx.

Posługując się pojęciem relacji odwrotnej do danej można powyższe sformułowanie przeredagować następująco. Relacja R jest symetryczna wtedy i tylko wtedy, gdy $R^{-1} \subset R$. Ostatni warunek jest równoważny równości: $R^{-1} = R$.

Relacja R nazywa się przechodnią, jeżeli dla wszelkich x, y oraz z należących do zbioru A warunki xRy i y Rz pociągają za sobą warunek xRz.

Korzystając z pojęcia iloczynu relacji powyższe określenie daje się sformułować w postaci następującej. Relacja R jest przechodnia wtedy i tylko wtedy, gdy $R.R \subset R$. Zamiast R.R pisze się także R^2. A więc relacja R jest przechodnia jeśli spełniony jest wzór: $R^2 \subset R$.

Przykłady: Relacja prostopadłości wśród prostych jest symetryczna. Relacja podobieństwa wśród trójkątów jest zwrotna, symetryczna i przechodnia. Relacja mniejszości wśród liczb rzeczywistych jest przechodnia.

Łatwo jest podać przykłady relacji, które spośród trzech własności: zwrotności, symetryczności oraz przechodniości posiadałyby dokładnie jedną z nich, bądź też pewne dwie z nich, nie posiadałyby zaś pozostałych, bądź pozostałej własności.

Wyróżnia się jeszcze dwie specjalne relacje, mianowicie relację pełną oraz relację pustą.

Relacja pełna U to taka relacja, która zachodzi między każdymi dwoma elementami zbioru A. Inaczej mówiąc $U = A \times A$.

Relacja pusta O to taka relacja, która nie zachodzi między żadnymi dwoma elementami zbioru A. Jej odpowiednikiem mnogościowym jest zbiór pusty.

Relacja R, która jest zwrotna, symetryczna i przechodnia nazywa się relacją równoważności. A więc R jest relacją równoważności, jeżeli spełnione są wzory: $1_A (R$, $R^{-1} = R$, $R^2 = R$.

Relacja równości wśród liczb, relacja równoległości wśród prostych, relacja przystawania wśród figur geometrycznych — oto proste przykłady relacji równoważności.

Zanotujmy zachodzenie następującego twierdzenia:

Iloczyn dwu relacji równoważności R oraz S, tj. relacja R.S, jest relacją równoważności wtedy i tylko wtedy, gdy relacje te spełniają warunek przemienności, tj. gdy R.S = S.R.

Łatwy dowód tego faktu pomijamy [1].

3. Działania algebraiczne dwuargumentowe

Przejdziemy obecnie do przypomnienia pojęcia działania oraz pewnych jego własności.

Niech A będzie zbiorem niepustym. Każdą funkcję określoną na iloczynie kartezjańskim $A \times A$, zaś o wartościach w zbiorze A zwie się działaniem dwuargumentowym okre-

[1] Por. np. A. I. Malcew: *Algebraiczeskije sistemy*. Izdatielstwo „Nauka", Moskwa 1970, 26. Nowoczesne ujęcie elementów teorii relacji można znaleźć także w książce: H. Rasiowa: *Wstęp do matematyki współczesnej*, Warszawa 1968.

ślonym w zbiorze A. A zatem działanie przyporządkowuje każdej parze uporządkowanej (a, b), gdzie a oraz b są elementami zbioru A, pewien element c tegoż zbioru A. Oznaczmy wspomniane działanie symbolem &. Wówczas pisze się c = a&b. Ponieważ w tej pracy będziemy rozważać jedynie działania dwuargumentowe, przeto opuszczać będziemy przymiotnik „dwuargumentowe" i mówić krótko: działanie.

Przykłady: W zbiorze liczb (np. rzeczywistych) działaniami są: dodawanie, odejmowanie, mnożenie. W zbiorze macierzy działaniami są dodawanie i mnożenie macierzy jeżeli ograniczymy się do macierzy kwadratowych tego samego rzędu. W zbiorze wszystkich funkcji rzeczywistych, określonych na pewnym ustalonym zbiorze X, działaniami są operacje dodawania i mnożenia funkcji określone w sposób zwykły.

Działanie & określone w zbiorze A nazywa się łączne, jeżeli spełniony jest warunek następujący: (a&b) &c = a& (b&c) dla każdych trzech elementów a, b, c należących do zbioru A.

Przykłady: Dodawanie i mnożenie liczb (powiedzmy całkowitych) jest łączne, natomiast odejmowanie liczb nie jest łączne. Jest przecież: $(7-4)-2 = 3-2 = 1$, $7-(4-2) = 7-2 = 5$. A więc $(7-4)-2 \neq 7-(4-2)$. Mnożenie macierzy jest łączne.

Element e zbioru A nazywa się elementem neutralnym lewostronnym (prawostronnym) działanie &, jeżeli dla każdego a należącego do zbioru A zachodzi wzór: e&a = a (a&e = a). Jeżeli e jest zarazem elementem neutralnym lewostronnym i prawostronnym działania &, to e zwie się elementem neutralnym dwustronnym, lub też krótko elementem neutralnym działania &.

Przykłady: Elementem neutralnym dodawania liczb całkowitych jest liczba zero. Elementem neutralnym mnożenia liczb całkowitych jest liczba jeden. Działanie dodawania w zbiorze liczb całkowitych dodatnich nie posiada elementu neutralnego. Elementem neutralnym mnożenia macierzy jest macierz jednostkowa, tj. macierz posiadająca na głównej przekątnej jedynki, a poza tym same zera.

Element z zbioru A nazywa się elementem zerowym lewostronnym (prawostronnym) działania &, jeżeli dla każdego a należącego do zbioru A zachodzi wzór: z&a = z (a&z = z). Jeżeli element z zbioru A jest jednocześnie elementem zerowym lewostronnym oraz prawostronnym działania &, to zwie się on elementem zerowym tegoż działania. Zamiast mówić element zerowy, mówi się także krótko zero.

Przykłady: Dla mnożenia w zbiorze liczb całkowitych elementem zerowym jest po prostu liczba zero. Dla działania mnożenia macierzy elementem zerowym jest macierz złożona z samych zer, czyli tzw. macierz zerowa. Działanie dodawania w zbiorze liczb całkowitych nie posiada elementu zerowego.

Element e zbioru A nazywa się elementem idempotentnym względem działania &, jeżeli zachodzi wzór: e&e = e.

Przykłady: Elementem idempotentnym dodawania w zbiorze liczb całkowitych jest zero. Mnożenie w zbiorze liczb całkowitych posiada dwa elementy idempotentne; są nimi zero oraz jeden. Dodawanie w zbiorze liczb całkowitych dodatnich nie posiada elementu idempotentnego. W rachunku zadań każdy element jest idempotentny względem operacji brania alternatywy oraz koniunkcji dwu zdań.

Łatwo zauważyć, że każdy element neutralny (jednostronny oraz dwustronny), jak i każdy element zerowy (jednostronny oraz dwustronny) działania & są zarazem elementami idempotentnymi tegoż działania [2].

4. Półgrupy

Rozważać teraz będziemy pewne proste twory algebraiczne. Przypuśćmy, że dany mamy niepusty zbiór A oraz określone w nim pewne działania (dwuargumentowe) &.

[2] Por. np. A. H. Clifford, G. B. Preston: *Algebraiczeskaja tieorija poługrupp*, Izdatielstwo „Mir", Moskwa 1972, 19. Dostępne ujęcie pojęcia działania, jego własności oraz podstawowych typów systemów algebraicznych można znaleźć w pracy: B. Gleichgewicht: *Elementy algebry abstrakcyjnej*, Warszawa 1966.

Grupoidem nazywa się niepusty zbiór z określonym w nim jednym działaniem.

Przykłady: Zbiór liczb całkowitych dodatnich z dodawaniem jest grupoidem. Zbiór liczb rzeczywistych z mnożeniem jest grupoidem. Liczby całkowite z odejmowaniem tworzą grupoid.

Oznaczając zbiór niepusty przez A, zaś działanie w nim określone przez &, powstały w ten sposób grupoid można oznaczyć symbolem (A, &). Jeżeli zbiór A jest skończony, to grupoid (A, &) nazywa się także skończony. Jeżeli zbiór A jest nieskończony, to grupoid zwie się również nieskończony.

Półgrupą nazywa się taki grupoid (A, &), w którym działanie & jest łączne. Krócej mówi się także, że półgrupa to grupoid łączny.

Przykłady: Zbiór liczb całkowitych dodatnich z dodawaniem jest półgrupą. Zbiór liczb rzeczywistych z mnożeniem jest półgrupą. Liczby całkowite z odejmowaniem nie stanowią półgrupy (pamiętamy bowiem, że odejmowanie nie jest działaniem łącznym).

Innym, interesującym, przykładem półgrupy jest przykład następujący. Przypuśćmy, że mamy dany pewien niepusty skończony zbiór X dowolnych elementów. Zwać go będziemy alfabetem. Każdy skończony uporządkowany układ elementów alfabetu zwać będziemy słowem w tym alfabecie. Dozwolone jest powtarzanie się elementów alfabetu. A więc słowami są po prostu wariacje z powtórzeniami. Określamy operację konkatenacji następująco: jeżeli a jest jednym słowem w danym alfabecie, zaś b — drugim tego rodzaju słowem, to przez ich konkatenację rozumie się utworzenie nowego słowa, które składa się ze wszystkich liter występujących w słowie a oraz z następujących po nich bezpośrednio wszystkich liter słowa b. W ten sposób w zbiorze słów utworzonych nad alfabetem X mamy określoną operację, która każdym dwom słowom podporządkowuje nowe słowo należące do słów utworzonych nad danym alfabetem X. Zatem mamy tu do czynienia z grupoidem. Jednakże łatwo jest sprawdzić, że operacja konkatenacji jest operacją łączną. Jeśli bowiem mielibyśmy dane trzy słowa a, b oraz c, to otrzymamy ten sam wynik niezależnie od tego czy najpierw utworzymy nowe słowo ze słów a oraz b, a potem dopiero dołączymy słowo c, czy też do słowa a dołączymy konkatenację słów b oraz c. Zatem wspomniany grupoid jest łączny, czyli jest on półgrupą. Oznaczając zbiór słów utworzonych nad alfabetem X przez X^+ można powiedzieć, że rodzina X^+ jest półgrubą ze względu na operację konkatenacji.

Przypomnijmy, że przez język formalny rozumie się dowolny podzbiór półgrupy X^+. Mówiąc dokładniej są to języki nad alfabetem X. Język jest więc zrelatywizowany do alfabetu. Nadto na elementach danego języka, jak również na zbiorze różnych języków (utworzonych nad danym alfabetem) można określić różnego rodzaju działania. Otrzymuje się, konsekwentnie, różne interesujące przykłady grupoidów oraz półgrup. Tego rodzaju zabiegi algebraiczne są ważne zwłaszcza dla języków programowania. Sygnalizujemy jedynie to zagadnienie nie wchodząc bliżej w szczegóły [3].

Jest widoczne, że w przypadku grupoidów (a tym bardziej w przypadku półgrup) można mówić o elementach neutralnych, zerowych i idempotentnych. Z definicji wynika prosto, że elementy neutralne (jednostronne oraz dwustronne) oraz elementy zerowe (także jedno- i dwustronne) spełniają następujące twierdzenie:

Jeżeli dany jest grupoid (A, &), to wówczas zachodzi dokładnie jeden z następujących czterech warunków:

1° A nie posiada elementów neutralnych (zerowych) jednostronnych, 2° A posiada co najmniej jeden element neutralny (zerowy) lewostronny, nie ma zaś elementów neutralnych (zerowych) prawostronnych, 3° A posiada co najmniej jeden element neutralny (zerowy) prawostronny, nie ma zaś elementów neutralnych (zerowych) lewostronnych, 4° A posiada je-

---

[3] Por. np. M. Gross, A. Lentin: *Tieorija formalnych grammatik*, Izdatielstwo „Mir", Moskwa 1971, 23—26. Zob. także odpowiednie miejsca w pracy: M. A. Harrison; *Wstęp do teorii sieci przełączających i teorii automatów*, Warszawa 1973.

den tylko element neutralny (zerowy) dwustronny, nie ma zaś żadnych innych elementów neutralnych (zerowych) jednostronnych [4].

Przypomnijmy jeszcze pewne podstawowe pojęcie z teorii grupoidów oraz z teorii półgrup.

Niech dany będzie grupoid A. Niepusty podzbiór I zbioru A nazywa się lewostronnym (prawostronnym) ideałem grupoidu A, jeżeli a&x∈I (x&a∈I) dla każdego a∈A oraz każdego x∈I. Podzbiór grupoidu A, który jest zarazem ideałem lewostronnym oraz prawostronnym zwie się ideałem dwustronnym, lub krótko: ideałem danego grupoidu.

Przykład: W półgrupie zbiór wszystkich prawostronnych elementów zerowych jest ideałem dwustronnym danej półgrupy [5].

Przypuśćmy, że dana jest relacja równoważności na grupoidzie (A, &). Oznaczmy ją przez R. Przypuśćmy, że warunek aRb pociąga za sobą zachodzenie warunków a&cRb&c oraz c&aRc&b dla każdego c należącego do A. Wówczas relację R nazywa się kongruencją na grupoidzie A.

Niech dane będą teraz dwa grupoidy A oraz B. Odwzorowanie f zbioru A w zbiór B zwie się homomorfizmem grupoidu A w grupoid B, jeżeli dla wszystkich elementów x oraz y należących do A spełniony jest warunek: f(x&y) = (f(x)) & (f(y)). Można wyrazić go słowami następująco: f jest homomorfizmem, jeżeli obraz złożenia dwu dowolnych elementów zbioru A jest złożeniem obrazów odpowiadających im dwu elementów w zbiorze B. Homomorfizm grupoidu w siebie nazywa się endomorfizmem.

Odwzorowanie wzajemnie jednoznaczne nazywa się injekcją. Homomorfizm f, który jest zarazem injekcją zwie się izomorfizmem jednego grupoidu w drugi. Jeżeli izomorfizm jest także surjekcją, czyli odwzorowaniem na cały zbiór B, to wówczas mówi się, że grupoidy A oraz B są izomorficzne.

Łatwo zauważyć, że relacja izomorfizmu jednego grupoidu

---

[4] Zob. A. H. Clifford, G. B. Preston, Op. cit., 17.

[5] Tamże, 22 (ćwiczenie 6).

na drugi jest zwrotna (każdy grupoid jest izomorficzny ze sobą samym), symetryczna (jeżeli grupoid A jest izomorficzny z grupoidem B, to także grupoid B jest izomorficzny z grupoidem A) oraz przechodnia (jeżeli grupoid A jest izomorficzny z grupoidem B, zaś grupoid B z grupoidem C, to grupoid A jest izomorficzny z grupoidem C), a więc jest relacją równoważności. Izomorfizm grupoidu na siebie zwie się automorfizmem.

Przykłady: Grupoid obrotów kwadratu wokół jego środka, przy których kwadrat przechodzi na siebie jest izomorficzny z grupoidem złożonym z liczb 0, 1, 2, 3, gdzie działaniem jest dodawanie modulo 4. Każdy z wymienionych grupoidów jest izomorficzny z grupoidem pierwiastków czwartego stopnia z jedności, gdzie działaniem jest zwykłe mnożenie liczb zespolonych.

Zachodzi następujące proste twierdzenie:

Obraz homomorficzny półgrupy jest półgrupą [6]. Łatwy dowód tego twierdzenia pomijamy.

Jeżeli (A, &) jest półgrupą, to mają miejsce dwa prawa dla wykładników: $a^n \& a^k = a^{n+k}$, $(a^n)^k = a^{nk}$. Tutaj n oraz k są liczbami naturalnymi [7].

Przypuśćmy, że dany jest niepusty zbiór X. Przypuśćmy dalej, że wyróżniono w nim rodzinę niepustych podzbiorów $X_1, X_2, \ldots X_k$ takich, że $X_i \cap X_j = \emptyset$ dla $i \neq j$ oraz $X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_k = X$. Rodzina podzbiorów zbioru X spełniająca wymienione dwa warunki zwie się podziałem danego zbioru. Wówczas powiemy, że dany podział jest rozbiciem regularnym, jeżeli w zbiorze X można określić działanie dwuargumentowe &, które spełnia następujący warunek: dla każdego $a \in X_i$ oraz dla każdego $b \in X_j$ element a&b należy zawsze do tego samego podzbioru X_m. Każdy podział zbioru generuje pewną relację równoważności. W szczególności rozbicie regularne generuje pew-

---

[6] Zob. np. B. Gleichgewicht; *Elementy algebry abstrakcyjnej*, Warszawa 1966, 41.

[7] Zob. A. H. Clifford, G. B. Preston, Op. cit., 17.

ną kongruencję. Wiadomo, że mając daną relację równoważności można utworzyć odpowiadający jej zbiór ilorazowy. W przypadku kongruencji można mówić o grupoidzie ilorazowym. Jeżeli A będzie oznaczać dany grupoid, zaś E — kongruencję generowaną przez rozbicie regularne danego grupoidu, to powstały tu grupoid ilorazowy oznaczać się będzie symbolem A/E. Istnieje homomorfizm grupoidu A na grupoid ilorazowy A/E. Homomorfizm ten zwie się homomorfizmem naturalnym [8].

5. Relacje dwuczłonowe a półgrupy

Niech dany będzie teraz niepusty zbiór M. Rozważać będziemy rodzinę podzbiorów iloczynu kartezjańskiego zbioru M przez siebie. Innymi słowy rozważać będziemy relacje dwuczłonowe określone w M. Niech R oraz S będą dwoma takimi relacjami. Określimy ich złożenie R&S w następujący sposób. Para uporządkowana (a, b) $\in$ R&S wtedy gdy istnieje taki element x$\in$M, że spełnione są zależności: (a, x) $\in$R oraz (x, b) $\in$S. A zatem widzimy, że rodzina wszystkich relacji dwuczłonowych określonych na zbiorze M jest grupoidem ze względu na operację złożenia. Operacja ta bowiem przyporządkowuje każdym dwom dowolnym relacjom dwuczłonowym na zbiorze M nową relację dwuczłonową określoną także na tym zbiorze. Zgodnie ze stosowanym znakowaniem powiemy, że (R_M, &) jest grupoidem, gdzie R_M oznacza zbiór wszystkich relacji dwuczłonowych określonych na M.

Przyjrzyjmy się bliżej działaniu &. Weźmy trzy relacje R, S, T. Przypuśćmy, że para uporządkowana (a, b) należy do złożenia (R&S)&T. Znaczy to, zgodnie z określeniem operacji &, że istnieją dwa elementy x oraz y należące do zbioru M, które spełniają następujące warunki: para (a, x) należy do R, para (x, y) należy do S oraz para (y, b) należy do T. Ale to znaczy to samo, co powiedzenie, że para uporządkowana (a, b) należy

---

[8] Zob. np. B. Gleichgewicht, Op. cit., 43—47.

do złożenia R&(S&T). Otrzymujemy przeto wniosek, że (R&S)&T = R&(S&T). A to znaczy, że działanie & jest łączne. Wobec tego grupoid (R_M, &) jest półgrupą. Słowami można więc powiedzieć, że zbiór wszystkich relacji dwuczłonowych określonych na zbiorze M jest półgrupą ze względu na działanie złożenia relacji [9].

Jeżeli rozważamy rodzinę wszystkich relacji dwuczłonowych na zbiorze M, to należy do niej zarówno relacja identyczności 1_M, jak i relacja pusta 0. Jest jasne, że zachodzą następujące zależności: 1_M&R = R&1_M = R, 0&R = R&0 = 0 dla każdej relacji R. Znaczy to, że relacja identyczności jest elementem neutralnym ,zaś relacja pusta — elementem zerowym półgrupy (R_M, &).

Otrzymaliśmy w ten sposób charakterystykę algebraiczną relacji identyczności oraz relacji pustej. Postąpmy podobnie z ważną klasą relacji, mianowicie z klasą relacji równoważności.

Jak pamiętamy, relacja równoważności R może być scharakteryzowana przez następujące trzy zależności: $1_M \subset R$, $R^{-1} = R$, R&R = R. A zatem, zgodnie z określeniem elementu idempotentnego, widzimy że każda relacja równoważności jest tego rodzaju elementem w półgrupie (R_M, &).

Rozważmy teraz specjalnego rodzaju relacje równoważności, a mianowicie kongruencje. Zachodzi dla nich następujące interesujące twierdzenie: [10]

Niech h będzie homomorfizmem grupoidu A na grupoid B. Niech k = h&h^{-1}. Wówczas k jest kongruencją na grupoidzie A oraz istnieje izomorfizm f grupoidu ilorazowego A/k na grupoid B taki, że spełniony jest warunek nf = k, gdzie n oznacza homomorfizm naturalny grupoidu A na grupoid ilorazowy A/k.

W dowodzie korzysta się z prostego faktu orzekającego, że jeżeli mamy dowolne odwzorowanie g zbioru X w zbiór Y,

---

[9] Zob. A. H. Clifford, G. B. Preston, Op. Cit., 31.

[10] Tamże, 35.

to wówczas można je traktować jako pewną relację określoną na sumie mnogościowej tych zbiorów. Konsekwentnie złożenie $g \& g^{-1}$ jest relacją w zbiorze X. Co więcej, złożenie to jest relacją równoważności w X. Nazywa je się relacją równoważności generowaną przez odwzorowanie g [11].

Sformułujemy jeszcze jeden interesujący fakt zachodzący dla kongruencji.

Przyjmiemy określenie: powiemy, że kongruencja A na grupoidzie A posiada typ C, gdzie C jest pewną własnością przysługującą grupoidowi A, jeżeli grupoid ilorazowy A/R posiada także własność C. Iloczynem mnogościowym dwu relacji nazywa się część wspólną podzbiorów danego produktu kartezjańskiego, odpowiadających danym relacjom. Teraz możemy już wypowiedzieć twierdzenie.

Niech C będzie własnością przysługującą wszystkim izomorficznym grupoidom z danym grupoidem A. Niech część wspólna wszystkich kongruencji określonych na A posiadających typ C także posiada typ C. Oznaczmy tę kongruencję przez R. Wówczas grupoid ilorazowy A/R jest maksymalnym obrazem homomorficznym grupoidu A posiadającym własność C. Znaczy to, że grupoid A/R posiada własność C oraz każdy obraz homomorficzny grupoidu A posiadający własność C jest obrazem homomorficznym grupoidu ilorazowego A/R [12].

Ostatnie dwa twierdzenia zachodzą dla dowolnych grupoidów. Rozważmy jeszcze pewne konstrukcje odnoszące się do półgrup, a więc do przypadku, kiedy działanie posiada własność łączności.

Przypuśćmy, że mamy daną półgrupę G. Rozważać będziemy jednostronne ideały generowane przez pewien element półgrupy.

Mówimy, że dwa elementy danej półgrupy G są L-równoważne (R-równoważne), jeżeli one generują jeden i ten sam główny ideał lewostronny (prawostronny) w półgrupie G. Można więc mówić o relacjach L oraz R określonych na półgrupie

[11] Tamże, 33—34.

[12] Tamże, 37.

G. Oznaczmy sumę mnogościową relacji L oraz R przez D, zaś iloczyn mnogościowy tych relacji przez H. Zachodzą następujące zależności [13]:

(1) Relacje L oraz R spełniają prawo przemienności, tj. L&R = R&L.

(2) Rodzina relacji L posiada niepustą część wspólną z rodziną relacji R wtedy i tylko wtedy, gdy obie należą do tej samej rodziny D danej półgrupy G.

(3) Relacja H jest relacją równoważności.

(4) Złożenie L&R, dla L oraz R branych z ustalonych klas, należy zawsze do tej samej D-klasy półgrupy G.

(5) Każde dwa elementy dowolnej podgrupy danej półgrupy G są H-równoważne.

6. Uwagi końcowe

Zaprezentowano wyżej pewien algebraiczny aspekt teorii relacji. Wskazano na powiązanie zachodzące między teorią relacji a teorią półgrup. Można posługiwać się aparatem teorii półgrup dla charakteryzowania pewnych własności relacji. Sytuacja tu istniejąca wydaje się być, w pewnym przynajmniej stopniu, analogiczna do sytuacji, która ma miejsce w topologii algebraicznej. W tym ostatnim przypadku bada się przestrzenie topologiczne oraz przekształcenia ciągłe przy pomocy pewnych obiektów algebraicznych takich jak grupy, pierścienie, homomorfizmy [14]. Dzięki temu uzyskuje się sprowadzenie problematyki topologicznej do problematyki algebraicznej, która posiada więcej szans na uzyskanie rozwiązań, aniżeli pierwotna problematyka topologiczna. Tego rodzaju przeredagowanie zagadnień topologicznych, jak wskazuje doświadczenie, okazało się bardzo korzystne. Uzasadnieniem, niejako empirycznym,

---

[13] Tamże, 72—76. Teorię elementów L- oraz R- równoważnych rozwinął J. A. Green, Zob. jego pracę: *On the structure of semigroups*, Ann. of Math. 54 (1951), 163—172.

[14] Zob. E. H. Spanier, *Topologia algebraiczna*, Warszawa 1972, 22.

powyższego wniosku jest właśnie istnienie całego działu matematyki zwanego topologią algebraiczną. Jest zrozumiałe, że wspomniane przeredagowanie zagadnień nie daje automatycznie kompletnych rozwiązań. Jednakże znacznie je przybliża [15]. Wydaje się, że analogiczna sytuacja może mieć miejsce także w przypadku teorii relacji. Możliwie pełna algebraizacja wspomnianej teorii może się przyczynić jedynie do jej pełniejszego ujęcia oraz rozwoju. Pozwoli uchwycić pewne związki o podstawowym znaczeniu, które bez pomocy metod algebraicznych byłyby bardzo trudne do odczytania. Nadto ułatwi pewną systematyzację całej rozważanej dziedziny.

Nasuwa się jeszcze następująca uwaga. Wspomniano przed chwilą o zabiegach algebraizacyjnych w odniesieniu do topologii oraz teorii relacji. Znane są podobnego rodzaju zabiegi w stosunku do innych rodzajów teorii. Wymieńmy przykładowo: teoria automatów, teoria języków formalnych, teoria symulacji. Wszędzie ma miejsce przekład z różnych języków specjalistycznych na język algebry. A zatem mielibyśmy tu do czynienia z pewnego rodzaju unifikacją wiedzy. Jeden podstawowy schemat znajduje cały szereg konkretnych interpretacji. Ten aspekt zagadnienia wydaje się wart dalszej uwagi badawczej.

On the Algebraic Aspects of the Theory of Relations

(Summary)

Theory of relations is an important chapter of contemporary logic. The purpose of this paper is to present some kind of algebraic characteristics of the theory of relations.

Let R be a binary relation between element of the set A. From a formal point of view the relation R is a subset of the Cartesian product of the set A by itself. Let R and S are two binary relations in the set A. The composition R&S of the relations R and S is defined as

[15] Por. np. C. R. F. Maunder, *Algebraic Topology*, London 1970, 23—25.

follows: xR&Sy if and only if there exists an element z of the set A such that holds xRz and zSy for all elements x and y from the set A. So defined operation & is an associative operation. Thus the set of all binary relations in the set A together with the operation & just defined is a semigroup. And the identity relation in the set A is the neutral element, the empty relation — the null element, the equivalence relation (i. e. the reflxive, symmetric and transitive relation) — the idempotent element of the semigroup of all binary relations in the set A.

On this way one obtain the possibility of an application of the theory of semigroups to the theory of relations. It seems to be an interesting thing. And also this gives, in some degree, a reasonable hope to have a background to justify the proposition concerning the hypothesis of the unification of knowledge.