Edward Nieznański

Łańcuchy, cykle i grafy

Studia Philosophiae Christianae 11/2, 121-129

1975

Studia Philosophiae Christianae
ATK
11 (1975) 2

EDWARD NIEZNAŃSKI

ŁAŃCUCHY, CYKLE I GRAFY

I. Pojęcie łańcucha jako relacji mocno-porządkującej liniowo własne pole jest spożytkowane zwłaszcza w teorii liczb porządkowych. Pojęcie grafu skierowanego (przydatne do uzyskiwania poglądowości w prezentowaniu abstrakcyjnych rozważań formalnych) jest znane przede wszystkim z zastosowań do modelowania teorii struktur i algebr Boole'a. Znane jest w teorii mnogości również pojęcie grafu symetrycznego. Ale pojęcie cyklu wprowadzane jest dopiero w topologii [1], choć intuicje wiązane z cyklicznością dają się zdefiniować również w teorii relacji w oparciu o pojęcie relacji mocno-ancestralnej. W niniejszym artykule zamierzam właśnie określić relacje cykliczne i opisać zasadnicze związki formalne zachodzące między łańcuchami, cyklami i grafami symetrycznymi.

II. Łańcuchy, cykle, grafy — ich określenia i opis powiązań

1. Określenia

1.1 W zamierzonych rozważaniach będę stosował niektóre

[1] Nie tylko pojęcie cyklu, ale także — łańcucha, bywa również określane w terminologii topologicznej. Zob. np. K. Kuratowski: *Wstęp do teorii mnogości i topologii*, wyd. 2, Warszawa 1962, rozdz. XXI, §§ 2 i 3

pojęcia znane z teorii relacji, przyjmując do ich reprezentowania:

symbol „PR" na oznaczenie pola relacji R;

„$\breve{R}$" — dla konwersu relacji R;

„I_Z" — na oznaczenie relacji identyczności ograniczonej do zbioru Z, którą określa definicja:

D1. $xI_Zy \equiv (x, y \in Z \;\&\; x = y)$.

Szczególnie pożyteczne dla dalszych ustaleń jest pojęcie — dla którego przyjmuję symbol „R_{po}" — tj. relacji mocno-ancestralnej utworzonej z relacji R. Tę złożoną relację przyjmijmy też nazywać (dla językowej wygody) mocno-ancestralną potęgą [2] relacji R, definiując:

D2. $xR_{po}y \equiv \Pi X\, [x \in X \;\&\; R(X) \subset X \rightarrow y \in R(X)]$.

Niech — dalej — symbol „I(R)": oznacza zbiór wszystkich elementów pierwszych w polu relacji R, tzn.:

D3. $x \in I(R) \equiv x \in PR \;\&\; \Pi y\, (y \in PR \;\&\; x \neq y \rightarrow xRy)$,

a symbol „II(R)" niech oznacza zbiór wszystkich elementów ostatnich (największych) w polu relacji R:

D4. $x \in II(R) \equiv x \in PR \;\&\; \Pi y\, (y \in PR \;\&\; x \neq y \rightarrow yRx)$.

Symbol „min(R)" przyjmijmy na oznaczenie zbioru wszystkich elementów minimalnych w polu relacji R, tj.:

D5. $x \in \min(R) \equiv x \in PR \;\&\; \Pi y\, (yRx \rightarrow x = y)$,

a „max(R)" — dla zbioru wszystkich elementów maksymalnych w polu relacji R:

D6. $x \in \max(R) \equiv x \in PR \;\&\; \Pi y\, (xRy \rightarrow x = y)$.

Przyjmuję wreszcie oznaczenia: „zwr" — dla zbioru relacji zwrotnych we własnym polu; „przeciwzwr" — dla zbioru relacji przeciwzwrotnych we własnym polu; „sym" — ...symetrycznych...; „przech" — ...przechodnich...; „sp" — ...spójnych... i „równ" — ...równoważnościowych we własnym polu.

[2] Wygodnie jest relację R_{po} nazywać mocno-ancestralną potęgą relacji R, chociaż nie moglibyśmy jej nazwać po prostu potęgą relacji R, gdyż — jak wiadomo — mocno-ancestralna relacja utworzona z R nie jest jej potęgą, lecz sumą wszystkich potęg tej relacji (przy czym potęgi relacji R są iloczynami względnymi R; R;...; R).

1.2 Pojęcie łańcucha

W teorii mnogości są wprowadzane dwa zasadniczo różne pojęcia łańcucha. Wedle jednego sposobu rozumienia: łańcuch jest relacją słabo-porządkującą liniowo (czyli relacją zwrotnie-antysymetryczno-przechodnio-spójną), a wedle innego — jest relacją mocno-porządkującą liniowo (czyli relacją asymetryczno lub przeciwzwrotnie-przechodnio-spójną). Posłużymy się pojęciem łańcucha jako relacji mocno-porządkującej liniowo własne pole zawarte w zbiorze Z:

D7. $R \in Ł(Z) \equiv R \subset Z \times Z \;\&\; \Pi x\, (\sim xRx) \;\&\; \Pi x, y, z\, (xRy \;\&\; yRz \rightarrow xRz) \;\&\; \Pi x, y \in PR\, (x = y \vee xRy \vee yRx)$.

Definicja ta określa, że relacja R jest łańcuchem w zbiorze Z, gdy jest podzbiorem iloczynu kartezjańskiego $Z \times Z$ i jest relacją we własnym polu przeciwzwrotną, przechodnią i spójną.

Zbiór wszystkich łańcuchów w zbiorze Z jest słabo-uporządkowany (niekoniecznie liniowo) przez relację inkluzji. Zbiór wszystkich elementów maksymalnych ze względu na inkluzję obciętą do rodziny wszystkich łańcuchów zbioru Z, czyli zbiór wszystkich łańcuchów maksymalnych w zbiorze Z, oznaczamy symbolem „Ł(Z, max)" i określamy:

D8. $R \in Ł(Z, max) \equiv R \in Ł(Z) \;\&\; \Pi S\, [S \in Ł(Z) \;\&\; R \subset S \rightarrow R = S]$.

1.3 Pojącie relacji cyklicznej

Relację cykliczną we własnym polu zawartym w zbiorze Z (relację cykliczną w zbiorze Z) możemy określić korzystając z pojęcia relacji mocno-ancestralnej.

D9. $R \in cykl\, (Z) \equiv R \subset Z \times Z \;\&\; R \neq \Lambda \;\&\; \Pi x, y \in PR\, (xR_{po}y \;\&\; yR_{po}x)$.

Gdy $Z = PR$ piszemy $R \in$ cykl zamiast $R \in$ cykl (Z) i wiadomo wtedy, że relacja R jest elementem zbioru relacji cyklicznych o polu równym PR. W takiej też sytuacji jest oczywiste, że: $R \in cykl \equiv R \neq \Lambda \;\&\; \Pi x, y \in PR\, (xR_{po}y \;\&\; yR_{po}x)$ jak również i to, że: $R \in cykl \equiv R_{po} \in$ cykl. Zauważmy od razu, że:

L1. $Z \neq \Lambda \rightarrow Z \times Z \in cykl(Z)$.

Dla dowodu tego lematu wystarczy dostrzec, że gdy $Z \neq \Lambda$, to $Z \times Z \neq \Lambda$, a ponieważ — jak to łatwo ustalić na podstawie definicji D2 — dla dowolnego R: $R \subset R_{po}$, przeto każda para uporządkowana $\langle x, y\rangle$ i $\langle y, x\rangle$ elementów zbioru Z — należąc do iloczynu $Z \times Z$ — należy do ancestralnej potęgi iloczynu $Z \times Z$. Tym samym lemat L1 — zgodnie z definicją D9- jest ważny.

Z lematu L1 i definicji D9 wnosimy również, że dla dowolnego niepustego zbioru Z, zbiór cykl (Z) — wszystkich relacji cyklicznych w Z — uporządkowany przez inkluzję ma element ostatni — cykl największy: $Z \times Z$. Pewną osobliwością relacji cyklicznej R jest to, że każdy element jej pola jest elementem pierwszym ze względu na mocno-ancestralną jej potęgę R_{po}. Można bowiem wykazać, że: $R \in \text{cykl} \equiv R \neq \Lambda \ \& \ PR = I(R_{po})$. Natomiast w przypadku, gdy pole relacji cyklicznej posiada przynajmniej dwa różne elementy, to relacja ta nie posiada w ogóle elementów minimalnych: $R \in \text{cykl} \ \& \ \Sigma x, y(x, y \in PR \ \& \ x \neq y) \rightarrow \rightarrow \min(R) = \Lambda$. Ponieważ $\Pi x, y \in PR(xR_{po}y \ \& \ yR_{po}x) \equiv R_{po} = = PR \times PR$, relację cykliczną można by też definiować w ten sposób: $R \in \text{cykl} \equiv R \neq \Lambda \ \& \ R_{po} = PR \times PR$. Można by także wykazać, że: $R \in \text{cykl} \equiv PR = \cap A[A \neq \Lambda \ \& \ R(A) \subset A \subset PR]$.

Porównajmy jeszcze relacje cykliczne z podobnymi do nich relacjami symetrycznymi i równoważnościowymi.

L2. $\mathbf{R \in \text{cykl} \rightarrow R \neq \Lambda \ \& \ R_{po} \in \text{sym} \cap \text{sp}}$

Wykazanie tej zależności jest proste. Udowodnimy zależność odwrotną:

L3. $\mathbf{R \neq \Lambda \ \& \ R_{po} \in \text{sym} \cap \text{sp} \rightarrow R \in \text{cykl}}$

1. $R \neq \Lambda$ } założenia
2. $R_{po} \in \text{sym} \cap \text{sp}$ } założenia
3. $\Pi x, y(xR_{po}y \rightarrow yR_{po}x)$ } 2
4. $\Pi x, y \in PR(x = y \text{ v } xR_{po}y \text{ v } yR_{po}x)$ } 2

   1.1 $x, y \in PR$, założenie dodatkowe
   1.2 $xR_{po}y \rightarrow \sim yR_{po}x$, założenie dowodu niewprost
   1.3 $xR_{po}y \rightarrow yR_{po}x \ \& \sim yR_{po}x$, bo 1.2 i 3
   1.4 $\sim xR_{po}y$, bo 1.3 i $[p \rightarrow (q \ \& \sim q)] \rightarrow \sim p$
   1.5 $\sim yR_{po}x$, bo 3 i 1.4
   1.6 $x = y$, bo 4, 1.1, 1.4 i 1.5
   1.7 $R_{po} \in \text{zwr}$, bo 2, $R_{po} \in \text{przech}$, $R \in \text{przech} \cap \text{sym} \rightarrow R \in \text{zwr}$
   1.8 $xR_{po}x$, bo 1.7 i 1.1

1.9 $xR_{po}y$, bo 1.8 i 1.6
sprzeczność: 1.9 i 1.4
5. $\Pi x,y \in PR(xR_{po}y \ \& \ yR_{po}x)$, bo 1.1—1.9
6. $R \in cykl$, bo 1, 5.

Na podstawie lematów L2 i L3 przyjmujemy zatem, że:

L4. $\mathbf{R \in cykl \equiv R \neq \Lambda \ \& \ R_{po} \in sym \cap sp.}$

Lemat L4 stwierdza, że relacja cykliczna jest taką niepustą relacją, której mocno-ancestralna potęga jest relacją symetryczną i spójną. Ponieważ ponadto mocno-ancestralna potęga każdej relacji jest relacją przechodnią, a każda relacja przechodnio-symetryczna jest relacją zwrotną, przeto na podstawie L4 ważny jest również lemat:

L5. $\mathbf{R \in cykl \equiv R \neq \Lambda \ \& \ R_{po} \in r\acute{o}wn \cap sp.}$

Lemat ten stwierdza, że relacja cykliczna jest taką niepustą relacją, której mocno-ancestralna potęga jest ralacją równoważnościową i spójną.

1.3 Pojęcie grafu symetrycznego

Graf symetryczny można też nazywać grafem nieskierowanym. „Każdy zbiór, którego elementami są pary nieuporządkowane o różnych elementach, nazywamy grafem" [3]. Dla dowolnego zbioru Z posiadającego co najmniej dwa różne elementy — czyli, gdy $\Sigma x,y \in Z(x \neq y)$ — zbiór wszystkich grafów (nieskierowanych) w zbiorze Z oznaczamy symbolem „G(Z)" i definiujemy:

D10. $F \in G(Z) \equiv F \neq \Lambda \ \& \ F \subset \{\{x,y\}: x,y \in Z \ \& \ x \neq y\}.$

Z definicji D10 wynika oczywiście, że dla każdego zbioru Z mającego przynajmniej dwa różne elementy, w zbiorze G(Z) ze względu na inkluzję obciętą do zbioru Z elementem ostatnim — grafem największym jest: $\{\{x,y\} : x,y \in Z \ \& \ x \neq y\}$. Po-

---

[3] K. Kuratowski i A. Mostowski: *Teoria mnogości*, wyd. 2, Warszawa 1966, cytat ze strony 107. Zob. także: L. Koncewicz: *Najprostsze wyrażenia rachunku predykatów definiujące klasy grafów symetrycznych bez pętli*, w: *Prace Naukowe Instytutu Matematyki i Fizyki Teoretycznej Politechniki Wrocławskiej* Nr 3, seria: *Studia i Materiały* Nr 3, *Teoria grafów*, Wrocław 1970, 23—42.

lem grafu F jest {x : Σy{x,y}∈F}. Elementy pola grafu nazywamy jego wierzchołkami, a pary nieuporządkowane będące elementami grafu są nazywane krawędziami grafu. Łatwo możemy zauważyć, że gdy F jest grafem, to relacja R określona jako: R={⟨x,y⟩ : {x,y}∈F} jest relacją symetryczno-przeciwzwrotną i odwrotnie: dla każdej niepustej relacji symetryczno-przeciwzwrotnej R, zbiór F — określony jako F = { {x,y} : ⟨xy⟩∈R} — jest grafem.

2. Związki formalne zachodzące między łańcuchami, cyklami i grafami

Wykażemy na początek, że:

Ł.6. R∈Ł & y∉PR→R ∪ PR×{y}∈Ł.

1 R∈Ł } założenia
2 y∉PR }
3 R∪PR×{y}∈przeciwzwr, bo
  1.1 Σx(xRx v x∈PR & x=y), założ. dow. niewprost
  1.2 aRa v a∈PR & a=y, z opuszczenia Σ w 1.1
    1.1.1 aRa, założ. dodatkowe
    1.1.2 ∼aRa, 1
    sprzeczność: 1.1.1 i 1.1.2
    1.2.1. a∈PR } założ. dodatkowe
    1.2.2 a=y }
    1.2.3 y∈PR, 1.2.1 i 1.2.2
    sprzeczność: 1.2.3 i 2
4. R∪PR×{y}∈przech, bo:
  2.1 xRz v(x∈PR & z=y) } założ. dodatkowe
  2.2 zRw v(z∈PR & w=y) }
  2.3 (xRz & zRw) v (xRz & z∈PR & w=y) v v (zRw & x∈PR & z=y) v (x,z∈PR & z=y=w), 2.1, 2.2
  2.4 xRw v (x∈PR & w=y), 2.3, 1, 2
5. R∪PR×{y}∈sp, bo:
  3.1 x,z∈PR∪{y}, założ. dodatkowe
  3.2 x,z∈PR v (x∈PR & z=y) v (z∈PR & x = y) v

v $x=y=z$, 3.1

3.3 $x=z$ v $x(R\cup PR\times\{y\})z$ v $z(R\cup PR\times\{y\})x$, 3.2 i 1

6. $R\cup PR\times\{y\}\in Ł$, bo 3, 4, 5.

W oparciu o dotychczasowe ustalenia możemy już udowodnić tezę, która ma podstawowe znaczenie dla rozważań prezentowanych w niniejszym artykule:

T1. $\mathbf{R\in Ł(Z, max)\rightarrow Z\times Z=R\cup \breve{R}\cup I_Z}$

1. $R\in Ł(Z, max)$, założenie
2. $R\subset Z\times Z$, bo 1
3. $R\in Ł$, bo 1
4. $\Pi S(S\subset Z\times Z \;\&\; S\in Ł \;\&\; R\subset S\rightarrow R=S)$, bo 1
5. $PR\subset Z$, bo 2
6. $Z\subset PR$, bo:

   1.1 $x\in Z$, założ. dodatkowe

   1.2 $x\notin PR$, założ. dow. niewprost

   1.3 $R\cup PR\times\{x\}\in Ł$, L6, 3 i 1.2

   1.4 $R\cup PR\times\{x\}\subset Z\times Z$, 2, 5 i 1.1

   1.5 $R=R\cup PR\times\{x\}$, 4, 1.4, 1.3

   1.6 $x\in PR$, 1.5

   sprzeczność: 1.6 i 1.2

7. $PR=Z$, bo 5 i 6
8. $\Pi x,y\in PR(xRy$ v yRx v $x=y)$, bo 3
9. $\Pi x,y\in Z(xRy$ v $x\breve{R}y$ v $x=y)$, bo 8 i 7
10. $Z\times Z\subset R\cup\breve{R}\cup I_Z$, bo 9
11. $R\cup\breve{R}\cup I_Z\subset Z\times Z$, bo:

    2.1 $x(R\cup\breve{R}\cup I_Z)y$, założ. dodatkowe

    2.2 xRy v yRx v$(x=y \;\&\; x,y\in Z)$, 2.1

    2.3 $x,y\in Z$, 2.2 i 7

12. $Z\times Z=R\cup\breve{R}\cup I_Z$, bo 10 i 11.

Na podstawie twierdzenia T1 można opisać podstawowe stosunki formalne zachodzące między łańcuchami, cyklami i grafami. Jeżeli bowiem z największego w niepustym zbiorze Z cyklu $Z\times Z$ eliminujemy $\{\langle x,y\rangle\in Z\times Z : x=y\}$, czyli I_Z, to otrzymamy symetryczno-przeciwzwrotną relację $(Z\times Z)—I_Z$, która — jak wiemy — wyznacza graf $F = \{\ \{x,y\} : \langle x,y\rangle\in(Z\times$

$\times Z)-I_Z\}$. Z twierdzenia T1 wynika poza tym, że relacja $(Z\times Z)-I_Z$ wyznaczająca graf F jest sumą dowolnego łańcucha maksymalnego w zbiorze Z i konwersu tegoż łańcucha, czyli $\Pi R\in Ł(Z, \max)\ [(Z\times Z)-I_Z=R\cup\check{R}]$. Wreszcie cykl największy w niepustym zbiorze Z jest sumą maksymalnego w Z łańcucha, konwersu tego łańcucha i relacji identyczności obciętej do zbioru Z.

Dla poglądowego jeszcze zilustrowania opisanych zależności przyjmijmy na przykład, że $Z=\{a, b, c\ d, e\}$. Wówczas relacja $I_Z=\{\langle a,a\rangle, \langle b,b\rangle, \langle c,c\rangle, \langle d,d\rangle, \langle e,e\rangle\}$. Niech relacja $R=\{\langle b, a\rangle, \langle c,a\rangle, \langle c,b\rangle, \langle d,a\rangle, \langle d,b\rangle, \langle d,c\rangle, \langle e,a\rangle, \langle e,b\rangle, \langle e,c\rangle, \langle e,d\rangle\}$. W takim razie $R,\check{R}\in Ł(Z, \max)$, $(Z\times Z)-I_z=R\cup\check{R}$, $Z\times Z$ jest największym cyklem w Z, itd. W przedstawionej niżej tabeli umieszczenie litery „i" na przecięciu wiersza x z kolumną y wskazuje, że $x=y$; umieszczenie „r" (względnie „ř") na przecięciu wiersza x z kolumną y — wskazuje, że xRy (bądź odpowiednio $x\check{R}y$):

	a	b	c	d	e
a	i	ř	ř	ř	ř
b	r	i	ř	ř	ř
c	r	r	i	ř	ř
d	r	r	r	i	ř
e	r	r	r	r	i

Z tabeli tej w łatwy sposób możemy odczytać opisane zależności. Zauważamy przy okazji, że po obu stronach linii I_Z są ułożone funkcje różnowartościowe: $\{\langle e,d\rangle, \langle d,c\rangle, \langle c,b\rangle, \langle b,a\rangle\}$ i $\{\langle a,b\rangle, \langle b,c\rangle, \langle c,d\rangle, \langle d,e\rangle\}$, których mocno-ancestralnymi potęgami są właśnie wyżej zdefiniowane łańcuchy w Z maksymalne: R i $\check{R}$.

III. Chains, Cycles and Graphs

In this paper notions of chains, cycles and symmetrical no loop graphs are studied. The main results there are: definitions for a notion of cyclical relations, in a language of the theory of relations (not

in topology) and theorem T1 which is giving an account of the formal connexions between chains, cycles and graphs: for every non-empty set Z there exists the greatest graph $\{\{x,y\} : \langle x,y\rangle \in (Z\times Z - I_Z\}$ — where I_Z is the restriction identity relation to Z — and for every R which is a maximal chain in Z — equality $(Z\times Z) - I_Z = R \cup \breve{R}$ is valid.