

Michał Heller

Mach's Principle and the Principle of Equivalence

Studia Philosophiae Christianae 11/2, 93-101

1975

Artykuł został zdigitalizowany i opracowany do udostępnienia w internecie przez Muzeum Historii Polski w ramach prac podejmowanych na rzecz zapewnienia otwartego, powszechnego i trwałego dostępu do polskiego dorobku naukowego i kulturalnego. Artykuł jest umieszczony w kolekcji cyfrowej bazhum.muzhp.pl, gromadzącej zawartość polskich czasopism humanistycznych i społecznych.

Tekst jest udostępniony do wykorzystania w ramach dozwolonego użytku.

MICHAŁ HELLER

MACH'S PRINCIPLE AND THE PRINCIPLE OF EQUIVALENCE.

O. Abstract. 1. Introduction. 2. Concepts and Terminology. 3. Argument.
4. Comment.

O. ABSTRACT.

Recent discussions concerning mutual relations between Mach's Principle and the Principle of Equivalence are briefly reviewed. It is shown that Mach's Principle and the Principle of Equivalence are incompatible (at least in their geometrical form) not only within the frame of General Relativity but also within the frame of any physical theory using Riemannian geometry for the geometrization of gravity.

1. INTRODUCTION.

Mutual relations between Mach's Principle (MP) and the Principle of Equivalence (EP) have been discussed in the recent years. It seems that EP, being valid only locally, should follow from MP¹, on the other hand, however, serious doubts have been raised against compatibility of both principles².

¹ F. M. Gomide: "Revista Brasileira de Física", 3, 3, 1973.

² J. F. Woodward, W. Yourgrau; "British Journal for the Philosophy of Science", 23, 111, 1972.

According to Woodward and Yourgrau MP may be stated as follows: „the global distribution of matter in the universe (Mach's 'fixed stars') causally determines by itself the properties of the local inertial field and thus the inertial properties of local bodies and the local inertial frame of reference”³; and EP „simply asserts that the effects of acceleration and gravitation are physically indistinguishable [strong form of EP] or, that inertial and passive gravitational mass are identically the same [weak form of EP].”⁴

Usually it is assumed that if gravitational field equations could be found which globally yield no solution in an empty space-time, MP would be incorporated into these equations. In opinion of Woodward and Yourgrau, for the two principles to be compatible, the non-existence of empty-solutions is merely a necessary, but not a sufficient, condition. The both necessary and sufficient condition appears to be — in their view — that the gravitational field equations (and hence the inertial field equations) must be null for one body in an otherwise empty universe. The reason is rather simple: according to MP, it is impossible to define a state of motion (inertial or accelerated) for a single isolated body. Therefore, as EP demands that a gravitational field has to be treated as indistinguishable (locally) from an „acceleration field”, no gravitational field can be uniquely specified, as well.

For the current theories of gravitation neither this compatibility criterion, nor even necessary (but not sufficient) condition of compatibility is fulfilled. Thus, one may infer that MP and either form of EP cannot be true together within the frame of presently known theories of gravitation.

The reasoning of Woodward and Yourgrau was criticized by Newburgh⁵. He has formulated MP after Pauli: "it has to be postulated that the inertia of matter is solely determined by the surrounding masses. It must therefore vanish when all

³ Ibid.

⁴ Ibid.

⁵ R. G. Newburgh: "Brit. Journ. for the Phil. of Sci.", 24, 263, 1973.

other masses are removed" ⁶. Woodward and Yourgrau have postulated an extended body with a finite mass density in an otherwise empty universe. According to Newburgh, if the only surrounding masses are those which are parts of the given body, then these alone will determine the inertia of the considered body. The argument of Woodward and Yourgrau remains valid only for the isolated point particle, but this implies all problems connected with the possibility of an infinite mass density.

Owing to this criticism Woodward and Yourgrau were able to express the Machian criterion in a more strict form: „Given a neutral body of finite mass density and radius alone in a universe, for the gravitational inertial field equations to be consistent with Mach's Principle they must satisfy the condition that in the limit as the radius of the body goes to zero, the magnitude of the field goes everywhere (except at the matter singularity) to zero. That is,

$$\begin{aligned} \text{limit } m &= 0 \\ r &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

for an external (massless) observer" ⁷.

It seems, that all arguments must remain more or less vague as long as they are not formulated in a mathematical language. Fortunately, all modern theories of gravitation (including Newton's theory) may be formulated in terms of geometry. In geometrical language EP simply asserts that in any space-time (which is a Riemannian space) it is always possible to choose a geodesical system of coordinates at any (non-singular) point (or along any given curve, the so-called Fermi coordinates). It is a trival consequence of the existence of a (pseudo) Euclidean tangent space T_p at any point p of (pseudo) Riemannian space. In such systems of coordinates $\Gamma^a_{bc} = 0$, what does mean that "true" and "apparent" gravitational forces are locally identi-

⁶ Ibid.

⁷ J. F. Woodward, W. Yourgrau: "Brit. Journ. for the Phil. of Sci.", 24, 246, 1973.

cal⁸. Although MP still resists its geometrization, some geometrical structures defined in any (pseudo) Riemannian space are known which are certainly anti-Machian. It turns out that one of such anti-Machian structures is just a tangent space T_p ⁹. It is therefore evident that MP and EP are incompatible not only within the frame of General Relativity but also within the frame of any physical theory using Riemannian geometry for the geometrization of gravity. In the following we will put this argument into a more detailed form.

2. CONCEPTS AND TERMINOLOGY

For the mathematical model of space-time we assume a pair (M, g) , where M is a C^r 4-dimensional manifold (usually $r \geq 2$), and g is a pseudo-Riemannian /Lorentzian/ metric on M . It is assumed that the components of the metric tensor g represent gravitational potentials. Timelike curves are histories of material points, null geodesics are histories of zero-mass particles. To this model of space-time we shall refer as to the Principle of Geometrization (PG). More detailed properties of this model may be found in the book of Hawking and Ellis¹⁰.

There are different versions of MP¹¹. For the present purposes, however, we shall need only the following formulations. The strong form of Mach's Principle (SMP): The properties of the local inertial field are entirely and uniquely determined by the global distribution of matter in space-time. The weak form of Mach's Principle /WPM/: the same as the strong form without the words „entirely and uniquely”. Of course: $SMP \Rightarrow WPM$, the converse is not true.

⁸ M. Heller: „Roczniki Filozoficzne” (Ann. Phil.), **21**, 3, 43, 1973 (in Polish).

⁹ M. Heller: „Acta Physica Polonica”, **B1**, 131, 1970.

¹⁰ S. W. Hawking, G. F. R. Ellis: *The Large Scale Structure of Space-Time*, Cambridge 1973.

¹¹ M. Heller: „Acta Phys. Pol.”, **B1**, 131, 1970.

We have: $SMP \wedge PG \Rightarrow$ "Space devoid of all matter should be devoid of geometrical structure" /geometrical form of MP: GMP/.

We shall speak also about the strong /SEP/ and weak /WEP/ forms of the Principle of Equivalence in the sense stated by Woodward and Yourgrau /see beginning of the present paper/. SEP extends proportionality of the passive gravitational mass and inertial mass from the bodies with a non-zero rest mass /as postulated by WEP/ to zero rest-mass particles. Of course: $SEP \Rightarrow$ WEP, but the converse is not true.

Wheelon has shown that if the photon has a non-zero rest-mass the deflection of light near massive body must depend on the frequency of light ¹². In turn, Woodward and Yourgrau have shown ¹³, that if the deflection of light is a function of frequency, then it is possible, at least in principle, to distinguish between gravitational and acceleration fields. In such a case SEP is false, whereas WEP may remain valid. In the following we shall discuss only the strong form of EP. For other forms of EP consult the book of Treder ¹⁴.

We have: $SEP \wedge PG \langle = \rangle$ „There is a pseudo-Euclidean space T_p tangent to any /non-singular/ point p of space-time". For this statement we shall use the abbreviation GEP /geometrical formulation of EP/.

3. ARGUMENT

Having a space-time manifold M , it is possible to define in a natural way the tangent bundle: $T(M) \equiv (E, M, \pi)$, where:

$$E = \cup_{p \in M} T_p$$

¹² A. D. Wheelon: "The Physical Review", 85, 383, 1952.

¹³ See the reference in their paper in "Brit. Journ. for the Phil. of Sci.", 23, 111, 1972.

¹⁴ H. J. Treder: *Gravitationstheorie und Äquivalenzprinzip*, Berlin 1971.

with its natural manifold structure and its natural projection π :

$$\pi: E \rightarrow M$$

defined as: $\pi(p, v) = p$, where: $p \in M, v \in T_p$ ¹⁵.

Let $U_i \subset M$ be an open set, then a map $\varphi: U_i \rightarrow E$, such that $\pi \circ \varphi = \text{id}$, is called a local cross-section of a fibre bundle. A local cross section is an assignment of an element $\varphi(p) \in \pi^{-1}(p)$ to each point $p \in U_i$. Such local cross-sections always exist ¹⁶. (M is parallelizable, therefore a cross-section φ may be also defined globally ¹⁷.) It is therefore evident that there is a local well defined pseudo-Euclidean structure, resulting only from the definition of (M, g) , without any reference to the "material contents" filling the space-time. So GMP is false, whereas GEP is trivially valid. Therefore the strong version of MP and the strong version of EP are incompatible within the frame of considered geometrical model of space-time.

4. COMMENT

Woodward and Yurgrau write. „On aesthetic grounds Mach's Principle is also very appealing — in our opinion compelling — by reason of its being an immediate consequence of the most general statement of the principle of relativity: for a single body in an otherwise empty universe no state of motion, and hence acceleration (translational or angular), can be specified.” ¹⁸ Indeed, Mach's Principle seems to be "very appealing", nevertheless it is possible to show that mathematical model of space-time, currently in use, cannot be fully Machian.

¹⁵ See for instance: D. Husemoller: *Fibre Bundles*, Mc Graw-Hill Comp. 1966.

¹⁶ A. Trautman: *Metody geometryczne w fizyce i technice*, Warszawa 1968, (in Polish), p. 48.

¹⁷ S. W. Hawking, G. F. R. Ellis: *The Large Scale Structure of Space-Time*, p. 52.

¹⁸ J. F. Woodward, W. Yourgrau: "Brit. Journ. for the Phil. of Sci.", 23, 111, 1972.

The essence of the above presented argument consists in stating that any pseudo-Riemannian /Lorentz/ space may be locally approximated by the tangent pseudo-Euclidean space. "In the space-time of General Relativity, the null-geodesic structure is that of the tangent flat space-time to a first approximation. Local features are therefore just the same as in special relativity and, in particular, local inertial properties do not depend on the curvature of space-time elsewhere and so they do not depend on the distribution of matter in the universe."¹⁹ Thus, Mach's Principle may be accepted only "on aesthetic grounds".

ZASADA MACHA A ZASADA RÓWNOWAŻNOŚCI

Streszczenie.

1. Zasada Macha — mówiąc najogólniej — postuluje zależność fizyki lokalnej od globalnej struktury Wszechświata. Zasada równoważności głosi lokalną nieodróżnialność pola grawitacyjnego od „pola przyspieszeń”. Trwa dyskusja dotycząca relacji pomiędzy tymi zasadami.

Niektórzy przypuszczają, że zasada równoważności — biorąc zasadę lokalną — powinna być konsekwencją zasady Macha.^{1*} Inni wysuwają poważne argumenty przemawiające za wzajemnym wykluczeniem się obu zasad.

J. F. Woodward i W. Yourgrau² sądzą, że warunkiem koniecznym i wystarczającym zgodności obu zasad jest istnienie tylko zerowych rozwiązań równań pola grawitacyjnego dla pojedynczego ciała znajdującego się w pustym Wszechświecie. Uzasadnienie: zgodnie z zasadą Macha, nie da się określić stanu ruchu (bezwładnego lub przyspieszonego) pojedynczego ciała, całkowicie izolowanego od reszty świata. Zasada równoważności postuluje lokalną nierozróżnialność pola przyspieszeń od pola grawitacyjnego. A zatem nie da się również określić pola grawitacyjnego pochodzącego od pojedynczego ciała, odizolowanego od reszty świata.

Jak wiadomo, we współczesnych teoriach grawitacji (także w ogólnej teorii względności) powyższe kryterium zgodności nie jest spełnione.

¹⁹ W. H. Mc Crea, "Nature", vol. 230, no 5289, 95, 1971.

* Numery odsyłają do odpowiednich przypisów w tekście angielskim.

Praca Woodwarda i Yourgraua spotkała się z zarzutami ze strony R. G. Newburgha.⁵ Według niego argumentacja Woodwarda i Yourgraua pozostaje słuszna, ściśle rzecz biorąc, tylko w odniesieniu do pojedynczej punktowej cząstki (a nie w odniesieniu do ciała rozciągniętego) w całkowicie pustym Wszechświecie. Z kolei rozważanie punktowej cząstki prowadzi do problemów związanych z nieskończonymi gęstościami. W odpowiedzi na zarzuty Woodward i Yourgrau uściślili swoją argumentację.⁷

Wydaje się, że wszystkie argumenty pozostaną mniej lub bardziej subiektywne, dopóki nie zostanie im nadana postać matematyczna.

2. Za matematyczny model czasoprzestrzeni przyjmiemy parę (M, g) , gdzie M jest 4-wymiarową mnogością klasy C^r (zwykle $r \geq 2$), a g — pseudoriemannowską (lorentzowską) metryką na M .¹⁰ Model ten będziemy nazywać Zasadą Geometryzacji (PG).

Istnieją liczne sformułowania zasady Macha (MP).¹¹ W dalszym ciągu wykorzystamy tylko następujące: mocna zasada Macha (SMP): lokalne pole bezwładności jest całkowicie i jednoznacznie określone przez globalny rozkład materii w czasoprzestrzeni. Słaba zasada Macha (WMP) powstaje z SMP przez usunięcie słów „całkowicie i jednoznacznie”. Oczywiście zachodzi: $SMP \Rightarrow WMP$, odwrotne twierdzenie nie jest słuszne.

Mamy także: $SMP \wedge PG \Rightarrow$ „czasoprzestrzeń bez materii powinna być pozbawiona geometrycznej struktury” (geometryczna postać zasady Macha: GMP).

Mocna zasada równoważności stwierdza, że pola przyspieszeń i pola grawitacyjne są fizycznie nierozróżnialne. Słaba zasada równoważności (WEP): masa bezwładna i passywna masa grawitacyjna są sobie równe.

WEP stwierdza równość obu mas dla cząstek o masie spoczynkowej różnej od zera, SEP rozciąga tę równość także i na cząstki o zerowej masie spoczynkowej. Oczywiście zachodzi: $SEP \Rightarrow WEP$, ale odwrotne twierdzenie nie jest słuszne.

3. W ramach przyjętego przez nas matematycznego modelu czasoprzestrzeni (PG) zasada równoważności (w dalszym ciągu będziemy mieć na myśli tylko jej mocną wersję) sprowadza się do twierdzenia, że zawsze można wprowadzić geodezyjny układ współrzędnych w każdym (nieosobliwym) punkcie (lub wzdłuż każdej krzywej tzw. współrzędnych Fermiego) czasoprzestrzeni. Jest to trywialną konsekwencją istnienia w każdym (nieosobliwym) punkcie p przestrzeni (pseudo) Riemanna przestrzeni stycznej T_p o strukturze (pseudo) euklidesowej.

Mamy zatem: $SEP \wedge PG \Rightarrow$ „w każdym (nieosobliwym) punkcie czasoprzestrzeni istnieje pseudoeuklidesowa przestrzeń styczna”. Na oznaczenie tego stwierdzenia będziemy używać skrótu: GEP (geometryczne sformułowanie zasady równoważności).

4. Do dziś nie udało się w pełni zmatematyzować zasady Macha. Znane są jednak pewne struktury geometryczne określone na czasoprzestrzeni o charakterze wybitnie antymachowskim. Jedną z takich struktur jest właśnie pseudoeuklidesowa przestrzeń styczna T_p w każdym punkcie czasoprzestrzeni.⁹ Geometria przestrzeni T_p określa bowiem lokalną strukturę czasoprzestrzeni bez odwoływania się do jakichkolwiek własności globalnych (np. do globalnego rozkładu materii).

Skoro istnienie przestrzeni stycznych T_p z jednej strony jest trywialną konsekwencją zasady równoważności, a z drugiej strony — typowym elementem antymachowskim, stąd wniosek, że zasada równoważności i zasada Macha (ściślej GEP i GMP) nawzajem się wykluczają.

W tekście angielskim powyższy argument został sformułowany bardziej elegancko w języku przestrzeni włóknistych.