Mieczysław Lubański

Zbiory i algebry

Studia Philosophiae Christianae 18/1, 199-207

1982

Studia Philosophiae Christianae
ATK
18(1982)1

MIECZYSŁAW LUBAŃSKI

ZBIORY I ALGEBRY

1. Wprowadzenie. 2. Oznaczenia i terminologia. 3. Kraty i algebry. 4. Funkcyjna interpretacja algebry de Morgana. 5. Funkcje a zbiory rozmyte. 6. Analogie i problemy otwarte.

1. WPROWADZENIE

Historia nauki poucza, że ważnym osiągnięciem badawczym było podanie różnych interpretacji algebry Boole'a, w szczególności zinterpretowanie jej w rachunku zbiorów. W r. 1965 L. A. Zadeh zaproponował uogólnienie pojęcia zbioru nadając mu nazwę zbioru rozmytego. Okazuje się, że rachunek zbiorów rozmytych może być traktowany jako interpretacja algebry de Morgana. Celem artykułu jest wskazanie na relacje zachodzące między wymienionymi algebrami oraz ich mnogościowymi (względnie funkcyjnymi) interpretacjami, jak też na otwierające się nowe horyzonty badawcze w zakresie przedmiotowym, metodologicznym i filozoficznym.

2. OZNACZENIA I TERMINOLOGIA

Niech K oznacza dowolny zbiór niepusty. Jego elementy oznaczać będziemy literami x, y, z.

Niech S oraz I oznaczają dwa działania dwuargumentowe określone i wykonalne w zbiorze K; znaczy to, że każdym dwom elementom x oraz y ze zbioru K jest przyporządkowany dokładnie jeden element tegoż zbioru oznaczany, odpowiednio, przez Sxy względnie Ixy.

Niech D oznacza działanie jednoargumentowe określone i wykonalne w zbiorze K, a więc funkcję, która każdemu elementowi x ze zbioru K przyporządkowuje dokładnie jeden element oznaczany przez Dx również należący do zbioru K.

Przypuśćmy, że w zbiorze K istnieją dwa wyróżnione elementy e oraz u, dla których zachodzą następujące wzory:

SO. Sxe = x, Sxu = u, IO. Ixe = e, Ixu = x.

Wówczas elementy te zwie się, odpowiednio, zerem oraz jednością.

Rozważmy dla działań S, I, D poniższe warunki:

S1. Sxy = Syx	
S2. SxSyz = SSxyz	I1. Ixy = Iyx
S3. Sxx = x	I2. IxIyz = IIxyz
S4. SxIxy = x	I3. Ixx = x
S5. IxSyz = SIxyIxz	I4. IxSxy = x
D1. DDx = x, De = u, Du = e	I5. SxIyz = ISxySxz
D2. SxDx = u, IxDx = e	

Wzory S1 oraz I1 zwie się prawami przemienności, wzory S2 oraz I2 — prawami łączności, wzory S3 oraz I3 — prawami idempotencji, wzory S4 oraz I4 — prawami pochłaniania, zaś wzory S5 oraz I5 — prawami rozdzielności w odniesieniu do działań S oraz I.

Zależność dana wzorem D1 mówi o związku zachodzącym między dowolnym elementem x ze zbioru K i wynikiem dokonania na nim dwukrotnie operacji D oraz o relacjach zachodzących między zerem i jednością przy dokonaniu na nich działania D.

Warunek D2 wiąże dowolny element x ze zbioru K poprzez dokonanie na nim działań S (względnie I) oraz D z zerem i jednością w K.

3. KRATY I ALGEBRY

Zbiór K wraz z (określonymi i wykonalnymi w nim) działaniami S oraz I zwie się kratą, jeżeli wymienione działania spełniają warunki S1—S4 oraz I1—I4.

Innymi słowy kratą [1] zwie się niepusty zbiór z dwoma działaniami, które są przemienne, łączne, mają własność idempotencji oraz pochłaniania.

Jeżeli w kracie K istnieją zero oraz jedność, a więc gdy istnieją w niej dwa wyróżnione elementy e oraz u spełniające wzory SO i IO, to kratę zwie się kratą z zerem i jednością.

Krata K zwie się kratą dystrybutywną, jeżeli spełnione są warunki S5 oraz I5, czyli gdy zachodzą prawa rozdzielności w odniesieniu do działań S oraz I.

---

[1] Niektórzy posługują się w tym przypadku nazwą struktura. Zob. np. K. Kuratowski, A. Mostowski, *Teoria mnogości wraz ze wstępem do opisowej teorii mnogości*, Warszawa 1978, 49—54, 57—58.

Przypuśćmy teraz, że rozpatrujemy kraty, w których jest określone jeszcze działanie jednoargumentowe D.

Algebrą de Morgana zwie się kratą dystrybutywną z zerem i jednością, w której działanie D spełnia warunek D1.

W pełniejszym sformułowaniu powiemy, że algebrą de Morgana [2] nazywa się niepusty zbiór dowolnych elementów wraz z określonymi i wykonalnymi w nim dwoma działaniami dwuargumentowymi S oraz I i jednym działaniem jednoargumentowym D oraz wyróżnionymi w nim dwoma elementami e oraz u, przy czym spełnione są wzory S0—S5, I0—I5, D1.

Algebra de Morgana zwie się algebrą Boole'a, jeżeli spełniony jest warunek D2.

Innymi słowy algebra Boole'a jest to krata dystrybutywna z zerem i jednością, w której zachodzą wzory D1 oraz D2.

Po ustaleniu terminologii oraz oznaczeń, a także przyjętych określeniach algebr (de Morgana i Boole'a) przejdziemy teraz do zagadnienia ich interpretacji.

4. FUNKCYJNA INTERPRETACJA ALGEBRY DE MORGANA

Niech A będzie dowolnym zbiorem niepustym, zaś M domkniętym odcinkiem od zera do jedności, czyli zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych zawartych między zerem i jednością z włączeniem krańców. Niech f, g, h oznaczają dowolne funkcje określone na zbiorze A przyjmujące wartości ze zbioru M. Umówmy się, że symbol $:=$ oznacza „równe z definicji".

Określmy na zbiorze powyższych funkcji następujące działania:

$$(f + g)(a) := \max[f(a), g(a)]$$
$$(f \cdot g)(a) := \min[f(a), g(a)]$$
$$f(a) := 1 - f(a),$$

gdzie a jest dowolnym elementem zbioru A.

Pierwsze z powyższych działań będziemy nazywać sumą funkcji, drugie z nich — iloczynem funkcji, zaś trzecie — do-

[2] Por. C. V. Negoita, D. A. Ralescu, *Applications of fuzzy sets to systems analysis*, Basel und Stuttgart 1975, 13—14, 16. Gdy idzie o wykład teorii algebr Boole'a i ich zastosowań zob. T. Traczyk, *Wstęp do teorii algebr Boole'a*, Warszawa 1970, 20, 27, 28; M. A. Harrison, *Wstęp do teorii sieci przełączających i teorii automatów*, Warszawa 1973, 59—63; F. L. Bauer, G. Goos, *Informatyka*, Warszawa 1977, 186—192.

pełnieniem danej funkcji. Sensowne są więc wyrażenia postaci: $f + g$, $f \cdot g$, $\bar{f}$.

Niech teraz K będzie dowolną algebrą de Morgana. Przyjmijmy, że elementami zbioru K będą wszystkie funkcje określone na zbiorze A przyjmujące wartości ze zbioru M. Przyjmijmy dalej, że

$Sxy := Sfg := f + g$
$Ixy := Ifg := f \cdot g$
$Dx := Df := \bar{f}$

Jest widoczne, że działania sumy, iloczynu oraz dopełnienia funkcji są działaniami określonymi i wykonalnymi w zbiorze wszystkich funkcji zdefiniowanych na A o wartościach z M; wynik dokonanego działania należy bowiem dalej do zbioru funkcji odwzorowujących zbiór A w zbiór M.

Łatwo jest dalej sprawdzić, że zachodzą następujące wzory:

+ 1. $f + g = g + f$ · 1. $f \cdot g = g \cdot f$
+ 2. $f + (g + h) = (f + g) + h$ · 2. $f \cdot (g \cdot h) = (f \cdot g) \cdot h$
+ 3. $f + f = f$ · 3. $f \cdot f = f$
+ 4. $f + (f \cdot g) = f$ · 4. $f \cdot (f + g) = f$

Stanowią one, przy rozważanej interpretacji, odpowiedniki wzorów S1—S4 oraz I1—I4. Zatem zbiór wszystkich funkcji określonych na zbiorze A przyjmujących wartości ze zbioru M z działaniami dodawania oraz mnożenia funkcji jest kratą.

Krata ta posiada także zero oraz jedność. Zerem będzie w tym przypadku funkcja równa tożsamościowo zeru, tj. przyporządkowująca każdemu elementowi a ze zbioru A liczbę zero, natomiast jednością — funkcja równa tożsamościowo jedności, a więc przyporządkowująca każdemu elementowi zbioru A liczbę jeden. Tak rozumiane elementy e oraz u spełniają bowiem warunki:

+0. $f + e = f$, $f + u = u$, ·0. $f \cdot e = e$, $f \cdot u = f$,
będące odpowiednikiem wzorów S0 oraz I0.

Nie jest także trudno zauważyć, że działanie dopełnienia spełnia wzór:

—1. $\overline{(\bar{f})} = f$, $\bar{e} = u$, $\bar{u} = e$.
Jest on odpowiednikiem warunku D1.

Nadto, znając relacje zachodzące między max oraz min, sprawdzamy, że spełnione są wzory:

$$+5. \; f \cdot (g + h) = (f \cdot g) + (f \cdot h)$$
$$.5. \; f + (g \cdot h) = (f + g) \cdot (f + h),$$

które stanowią odpowiedniki warunków S5 oraz I5.

Dochodzimy przeto do wniosku orzekającego, że rozważana przez nas krata jest algebrą de Morgana.

Inaczej można powiedzieć, że zbiór wszystkich funkcji określonych na dowolnym zbiorze niepustym A przyjmujących wartości z odcinka domkniętego od zera do jedności wraz z działaniami dodawania funkcji, mnożenia funkcji i dopełnienia funkcji jest algebrą de Morgana, względnie iż jest interpretacją funkcyjną abstrakcyjnej algebry de Morgana.

Rozważmy przypadek specjalny, gdy mianowicie zbiór M wartości funkcji redukuje się do dwu elementów: liczby zero oraz liczby jeden, czyli gdy mamy do czynienia z funkcjami określonymi na dowolnym zbiorze niepustym A przyjmującymi tylko jedną z wymienionych wartości zero lub jeden. Jest widoczne, że wówczas spełnione są wzory +0 — +5, .0 — .5 oraz wzór —1. Nadto jednak zachodzi wzór

$$—2. \; f + \bar{f} = u, \; f \cdot \bar{f} = e,$$

co znaczy, iż mamy do czynienia z algebrą Boole'a (wzór —2 jest bowiem odpowiednikiem wzoru D2).

Zwróćmy uwagę na to, że w przypadku ogólnym, kiedy rozważamy funkcje o wartościach z domkniętego odcinka od zera do jeden, wzór —2 nie zachodzi. Wystarczy wziąć np. funkcję $f(a) = 1/3$. Wówczas $\bar{f}(a) = 2/3$. Natomiast $\bar{f} + f = 2/3$, a więc nie jest suma ta równa 1, $f \cdot f = 1/3$, czyli iloczyn powyższy nie jest równy zeru.

A zatem klasa algebr Boole'a jest istotnie węższa od klasy algebr de Morgana. Każda algebra Boole'a jest algebrą de Morgana. Istnieją jednak algebry de Morgana nie będące algebrami Boole'a.

Przedstawiona funkcyjna interpretacja algebry de Morgana (a także algebry Boole'a) prowadzi w prosty sposób do interpretacji mnogościowej wspomnianych algebr, a także do jednolitego ujęcia klasycznego pojęcia zbioru oraz zbioru rozmytego w sensie Zadeha. Zajmiemy się teraz tym zagadnieniem.

5. FUNKCJE A ZBIORY ROZMYTE

Niech A oznacza zbiór uniwersalny, poza który nie wychodzimy w naszych rozważaniach. Niech f będzie dowolną funkcją określoną na zbiorze A o wartościach ze zbioru M, tj. z odcinka domkniętego od zera do jedności.

Interpretujmy funkcję f jako podzbiór rozmyty w zbiorze uniwersalnym A. Dla krótkości mówić będziemy po prostu: zbiór rozmyty [3]. Wielkość f(a) interpretujmy jako stopień przynależności elementu a do danego zbioru rozmytego. Zgodnie z przyjętymi umowami stopień przynależności zawiera się między zerem oraz jednością. W szczególności, jeżeli stopień ten jest równy zeru, to mówimy że dany element nie należy do zbioru rozmytego; jeżeli natomiast jest równy jedności, to mówimy o pełnej przynależności rozważanego elementu do danego zbioru rozmytego.

Nie jest trudno zauważyć, że „naturalną" interpretacją działań f + g, f • g oraz f będzie, odpowiednio, suma mnogościowa, iloczyn mnogościowy zbiorów rozmytych oraz dopełnienie zbioru rozmytego do zbioru uniwersalnego A.

Element zerowy, czyli funkcję równą tożsamościowo zeru, interpretujemy jako zbiór pusty, zaś element jelnostkowy, a więc funkcję równą tożsamościowo jedności, interpretujemy jako zbiór uniwersalny A.

Wówczas wzory +0 — +5, • 0 — • 5 oraz wzór —1 przyjmą następującą treść:

+0. Suma mnogościowa dowolnego zbioru rozmytego oraz zbioru pustego jest równa temu zbiorowi. Suma mngościowa dowolnego zbioru rozmytego oraz zbioru uniwersalnego jest równa zbiorowi uniwersalnemu.

• 0. Iloczyn mnogościowy dowolnego zbioru rozmytego oraz zbioru pustego jest równy zbiorowi pustemu. Iloczyn mnogościowy dowolnego zbioru rozmytego oraz zbioru uniwersalnego jest równy danemu zbiorowi.

+1. Suma mnogościowa zbiorów rozmytych jest działaniem przemiennym.

• 1. Iloczyn mnogościowy zbiorów rozmytych jest działaniem przemiennym.

+2. Suma mnogościowa jest działaniem łącznym.

• 2. Iloczyn mnogościowy jest działaniem łącznym.

+3. Suma mnogościowa danego zbioru rozmytego i jego samego jest równa temu zbiorowi.

---

[3] Zob. L. A. Zadeh, *Fuzzy sets*, Information and Control 8 (1965), 338—353. Jest to historycznie pierwsza praca poświęcona teorii zbiorów rozmytych. Obecnie literatura poświęcona tej teorii oraz jej zastosowaniom jest olbrzymia. Zob. np. bibliografię podaną w C. V. Negoita, D. A. Ralescu, dz. cyt.

• 3. Iloczyn mnogościowy danego zbioru rozmytego i jego samego jest równy temu zbiorowi.

+4. Suma mnogościowa danego zbioru rozmytego oraz iloczynu mnogościowego tegoż zbioru przez dowolny zbiór rozmyty jest równa temuż zbiorowi rozmytemu.

• 4. Iloczyn mnogościowy danego zbioru rozmytego przez sumę mnogościową tegoż zbioru i dowolnego zbioru rozmytego jest równy danemu zbiorowi rozmytemu.

+5. Iloczyn mnogościowy zbiorów rozmytych jest rozdzielny względem sumy mnogościowej zbiorów.

• 5. Suma mnogościowa zbiorów rozmytych jest rozdzielna względem iloczynu mnogościowego zbiorów.

—1. Dopełnienie dopełnienia dowolnego zbioru rozmytego jest równe zbiorowi wyjściowemu. Dopełnienie zbioru pustego jest zbiorem uniwersalnym. Dopełnienie zbioru uniwersalnego jest zbiorem pustym.

Mamy więc do czynienia z rachunkiem zbiorów rozmytych, który stanowi interpretację algebry de Morgana.

Rozważmy jeszcze przypadek szczególny, kiedy mianowicie bierzemy pod uwagę funkcje przyjmujące wartości ze zbioru $\{0, 1\}$. Jest jasne, że warunki +0 — +5, .0 — .5 oraz warunek —1 będą spełnione, nadto spełniony będzie również wzór —2 orzekający, że suma mnogościowa zbioru (w znaczeniu zwykłym) i jego dopełnienia jest równa zbiorowi uniwersalnemu, zaś iloczyn mnogościowy zbioru i jego dopełnienia jest zbiorem pustym.

Funkcje określone na zbiorze uniwersalnym A przyjmujące wartości równe bądź jedności, bądź zeru, interpretujemy jako zbiory w rozumieniu cantorowskim. A zatem klasyczny rachunek zbiorów stanowi interpretację algebry Boole'a.

6. ANALOGIE I PROBLEMY OTWARTE

Jest bezpośrednio widoczne, że funkcje (określone na zbiorze A) przyjmujące wartości ze zbioru $\{0, 1\}$ stanowią szczególne przypadki funkcji przyjmujących wartości ze zbioru M. Konsekwentnie zbiory w znaczeniu zwykłym (klasycznym, cantorowskim) są szczególnym przypadkiem zbiorów rozmytych. Jest jasne także, że klasa zbiorów rozmytych jest istotnie szersza od klasy zbiorów w znaczeniu klasycznym. Wspominaliśmy także, że klasa algebr de Morgana jest istotnie szersza od klasy algebr Boole'a. Otrzymujemy w ten sposób następujące zależności:

(1) Algebra de Morgana tak się ma do algebry Boole'a, jak klasa zbiorów rozmytych ma się do klasy zbiorów w znaczeniu zwykłym.

(2) Tak jak algebrze de Morgana odpowiadają zbiory rozmyte, tak podobnie algebrze Boole'a odpowiadają zbiory w znaczeniu zwykłym.

Stwierdzenia powyższe otrzymaliśmy w oparciu o posiadaną wiedzę w odniesieniu do algebr i zbiorów, a więc dysponując zarówno pojęciem algebry de Morgana i algebry Boole'a oraz pojęciem zbioru rozmytego i zbioru w znaczeniu klasycznym.

Przypuśćmy, że znamy jedynie trzy z występujących w (1) oraz (2) czynników. Przypuśćmy dalej, że dysponujemy ogólnym pojęciem symetrii. Wówczas w oparciu o zasadę symetrii można postulować istnienie czynnika czwartego.

Na tej drodze uzyskuje się interesujące wyniki. Mogą nimi być zarówno uogólnienia, jak też specjalizacje, uszczegółowienia. Wskazuje to na heurystyczny aspekt zasady symetrii.

Jednocześnie zasadzie tej można przypisać aspekt metodologiczny. Służy ona przecież niewątpliwie do budowania nauki zarówno w znaczeniu funkcjonalnym, jak i przedmiotowym. Zasada symetrii może bowiem być przewodnikiem (i istotnie bywa nim) w postępowaniu badawczym, a także w teoretycznym ujmowaniu, formułowaniu wiedzy.

W naturalny sposób nasuwa się pytanie o związek zachodzący między pojęciem analogii i pojęciem symetrii, jak też zasady analogii i zasady symetrii. Sprawa ta wydaje się być warta uwagi badawczej.

Do dalszych problemów otwartych można zaliczyć zagadnienie relacji zachodzących między takimi pojęciami jak analogia i symetria a dwoistość, przeciwieństwo. Interesująco też prezentuje się sprawa zależności zachodzących między symetrią a daną logiką nieklasyczną. Ta ostatnia łączy się z teorią zbiorów rozmytych. Jeżeli wziąć pod uwagę istnienie uogólnienia zbiorów rozmytych (tzw. zbiory L-rozmyte [4]), to powstaje cały szereg nowych zagadnień zarówno ściśle przedmiotowych, jak też rzutujących na płaszczyznę filozoficzną. W ten sposób wchodzimy na rozległe tereny badań o charakterze także filozoficznym.

Jeżeli spojrzeć na nasze poznanie, w szczególności na poznanie naukowe, z systemowego punktu widzenia, to przedstawia

[4] Zob. J. A. Goguen, *L-fuzzy sets*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 18 (1967), 145—174.

się nam ono jako zespół dwu nieodłącznych od siebie procesów: konstrukcji i rekonstrukcji, które zachodzą w czasie nieustannej wymiany między podmiotem i jego otoczeniem zarówno fizycznym, jak i społecznym. A zatem gnoseologia nie daje się ograniczyć do poziomu jednostki. Niezbędne jest odniesienie się do poziomu grupy społecznej, a więc złożonego systemu. Konsekwentnie następuje przezwyciężenie stanowiska solipsystycznego, jak też niepełności ujęcia tradycyjnego. Systemowe ujmowanie poznania nakazuje pozostawienie w słowniku naukowym otwartych pojęć i takich samych konstrukcji teoretycznych [5]. Nie trzeba dodawać, że harmonizuje ono z konkretną praktyką badawczą. Wyraźnym tego przejawem jest wypracowanie teorii zbiorów rozmytych, jak też L-rozmytych.

MENGEN UND ALGEBREN

(Zusammenfassung)

Die Hinweisung der verschiedenen Interpretationen für die Boolesche Algebra, insbesondere das Interpretieren ihrer im Mengenkalkül, wie lehrt die Geschichte der Wissenschaft, hat sich als eine wichtige Errungenschaft der Forschung gezeigt. Im Jahre 1965 gab L. A. Zadeh eine Verallgemeinerung des Mengenbegriffs; er nannte sie die verschwommene (unscharfe) Menge (fuzzy set). Es erweist sich, dass der Kalkül von verschwommenen Mengen als eine Interpretation für die de Morgansche Algebra gelten kann.

Der Aufsatz beschäftigt sich mit der Angabe der Relationen, welche zwischen diesen Algebren und deren Mengen- (oder Funktionen-) interpretationen gelten. Man erwägt auch die neuen Forschungshorizonte in dem gegenständlichen, methodologischen und philosophischen Bereich.

---

[5] W. Buckley, *Epistemologia w ujęciu systemowym*, w: *Ogólna teoria systemów, Tendencje rozwojowe*, pod red. G. J. Klira, Warszawa 1976, 188—191, 194—195, 198.