Mieczysław Lubański

# Formalna charakterystyka relacji majoryzowania

Studia Philosophiae Christianae 19/1, 109-123

1983

Studia Philosophiae Christianae
ATK
19(1983)1

MIECZYSŁAW LUBAŃSKI

# FORMALNA CHARAKTERYSTYKA RELACJI MAJORYZOWANIA

1. Wprowadzenie. 2. Znakowanie. 3. Warunki dla relacji majoryzowania. 3.1. Majoryzowanie w znaczeniu pierwszym. 3.2. Majoryzowanie w znaczeniu drugim. 3.3. Majoryzowanie w znaczeniu trzecim. 4. Rozwinięcie teorii majoryzowania. 4.1. W odniesieniu do pierwszego majoryzowania. 4.2. W odniesieniu do drugiego majoryzowania. 4.3. W odniesieniu do trzeciego majoryzowania. 5. Przykłady zastosowań.

## 1. WPROWADZENIE

W wielu naukach, jak np. w psychologii, socjologii, pedagogice, mamy do czynienia z relacją dominowania, preferowania, majoryzowania. Jedni autorzy terminów tych używają zamiennie, inni natomiast rozróżniają je między sobą. Intuicja badacza jest źródłem, z którego biorą się konkretne rozumienia wspomnianych terminów. Intuicje bywają różne, toteż nic dziwnego, że spotykamy się z różnymi stanowiskami. Odwołanie się do znaczenia słownikowego nie daje zbyt wiele. Dobry słownik rejestruje jedynie znaczenia zastanych słów; z tego względu znajdziemy w nim uzasadnienie dla różnych sposobów rozumienia. Naukową użyteczność uzyskuje termin z chwilą jego sprecyzowania, uściślenia. Artykuł ten stawia sobie za cel przedstawienie pewnej propozycji uściślenia powyższych terminów. Określimy formalnie pojęcie majoryzowania. Wyróżnimy trzy jego znaczenia, rozważymy związki między nimi zachodzące oraz powiązania z pojęciem dominowania i pojęciem preferowania, sformułujemy twierdzenia i wnioski, jak też wskażemy na szereg zastosowań w odniesieniu do różnych zagadnień.

## 2. ZNAKOWANIE

Relacja dominowania, preferowania, względnie majoryzowania bywa odnoszona do różnych przedmiotów. Mogą nimi być jednostki ludzkie, grupy społeczne, organizmy żywe, poglądy, idee itd. Przedmioty, między którymi zachodzi przynajmniej jedna ze wspomnianych relacji, zwać będziemy obiektami. Obiekty oznaczać będziemy dużymi literami łacińskimi; jeżeli będzie to celowe, bądź wygodne, z ewentualnymi umieszczonymi u ich dołu wskaźnikami liczbowymi. A więc np. A, $A_1$, $A_2$, $A_3$, B, C, D, ... oznaczają obiekty. Nie precyzujemy bliżej czym one są. Jak widzieliśmy mogą być bardzo różnorodne.

Zamiast mówić, że obiekt A majoryzuje obiekt B mówić będziemy krótko AmB.

Wyróżnimy trzy rozumienia relacji majoryzowania: majoryzowanie w znaczeniu pierwszym (oznaczać je będziemy symbolem $m_1$), majoryzowanie w znaczeniu drugim (oznaczać je będziemy symbolem $m_2$) oraz majoryzowanie w znaczeniu trzecim (oznaczać je będziemy symbolem $m_3$). Zrozumiałe więc stają się wyrażenia postaci: $Am_1B$, $Cm_2D$, $Em_3F$. Ze względów stylistycznych, tj. aby uniknąć niemiłej jednostajności w wypowiedziach, mówić będziemy także pierwsze majoryzowanie, drugie majoryzowanie, trzecie majoryzowanie myśląc, odpowiednio, o relacji $m_1$, $m_2$, $m_3$.

Dla wzbogacenia słownika, jak też dla pomocy intuicji, można relację $m_1$ nazywać słabym majoryzowaniem, relację $m_2$ — zwykłym majoryzowaniem, relację $m_3$ — silnym, bądź mocnym, majoryzowaniem. Niekiedy mówić także będziemy $m_1$-majoryzowanie, $m_2$-majoryzowanie, $m_3$-majoryzowanie.

## 3. WARUNKI DLA RELACJI MAJORYZOWANIA

Podamy teraz warunki formalne dla relacji majoryzowania. Przypuśćmy, że dany jest układ złożony z n różnych obiektów. Zakładamy, że między niektórymi przynajmniej spośród nich zachodzi relacja majoryzowania, a więc, że ma miejsce związek AmB.

### 3.1. MAJORYZOWANIE W ZNACZENIU PIERWSZYM

Powiemy, że relacja mojoryzowania jest majoryzowaniem w znaczeniu pierwszym, jeżeli dla dowolnego obiektu nie jest prawdą, aby on majoryzował siebie, tj. aby zachodził związek $Am_1A$.

Jest to jedyny warunek, który nakłada się na relację $m_1$. Zapiszmy go w postaci oddzielnego zdania:

(1.1) Dla dowolnego obiektu A nie jest prawdą $Am_1A$.

Innymi słowy relacja częściowa dwuargumentowa zwie się relacją majoryzowania w znaczeniu pierwszym, jeżeli jest relacją przeciwzwrotną [1].

Wygodnie jest prezentować relację majoryzowania przy pomocy macierzy względnie grafu zorientowanego [2]. Ze względów technicznych pominiemy ilustrację przy pomocy grafu; poprzestaniemy jedynie na ilustracji przy pomocy macierzy.

Przypuśćmy więc, że mamy do czynienia z n różnymi obiektami $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Tworzymy macierz kwadratową o n wierszach i n kolumnach, złożoną tylko z liczb zero oraz jeden. Na przecięciu i-tego wiersza oraz j-tej kolumny piszemy zero, jeżeli nie zachodzi relacja $m_1$ między obiektem $A_i$ oraz obiektem $A_j$. Jeżeli natomiast wspomniana relacja zachodzi, to piszemy liczbę jeden. Powstałą w ten sposób macierz zwać będziemy macierzą relacji pierwszego majoryzowania.

Ponieważ zakładamy jedynie warunek (1.1), przeto na „przekątnej głównej" macierzy znajdować się będą tylko liczby zero, pozostałe elementy macierzy złożone będą z zer i jedynek rozmieszczonych w dowolny sposób.

Jeżeli zachodzi relacja $Am_1B$, to mówimy że obiekt A majoryzuje jednoczłonowo obiekt B, bądź też że A majoryzuje B bezpośrednio. Jeżeli natomiast mamy $Am_1B$ oraz $Bm_1C$, to mówimy, że obiekt A $m_1$-majoryzuje pośrednio (lub: dwuczłonowo) obiekt C. Widoczne jest, że elementem „pośredniczącym" jest obiekt B. Należy zwrócić uwagę na to, że czym innym jest pośrednie majoryzowanie obiektu, czym innym zaś bezpośrednie, tj. jeśli $Am_1B$ oraz $Bm_1C$, to wówczas A pośrednio majoryzuje C, nie można zaś twierdzić, że wówczas $Am_1C$; o relacji majoryzowania w znaczeniu pierwszym nie zakłada się bowiem zachodzenia własności przechodniości.

Pośrednie majoryzowanie daje się łatwo przedstawić przy pomocy macierzy kwadratowej. Za punkt wyjścia bierzemy macierz mojoryzowania w znaczeniu pierwszym. Następnie bierzemy jej kwadrat, tzn. mnożymy ją przez siebie. Z własności mnożenia macierzy wynika prosto, że otrzymamy macierz kwadratową o tej samej liczbie wierszy i kolumn co macierz majoryzowania złożoną z liczb całkowitych nieujem-

[1] Relacja przeciwzwrotna bywa nazywana także relacją irrefleksywną. Por. L. Borkowski, *Logika formalna*, Warszawa 1970, 196; K. Kuratowski, A. Mostowski, *Teoria mnogości*, Warszawa 1978, 97.

[2] Czytelnika zainteresowanego teorią grafów odsyłamy do jednego z licznych podręczników z tej dziedziny. Zob. np. H. Noltemeier, *Graphentheorie*, Berlin, 1976; N. Deo, *Teoria grafów i jej zastosowania w technice i informatyce*, Warszawa 1980.

nych. Element znajdujący się na przecięciu i-tego wiersza oraz j-tej kolumny w tej macierzy podawać nam będzie liczbę pośrednich majoryzowań obiektu $A_j$ przez obiekt $A_i$. Wspomniana liczba będzie bowiem różna od zera w tym jedynie przypadku, jeżeli dla jednego chociaż obiektu B będzie: $A_i m_1 B$ oraz $B m_1 A_j$. Jest również widoczne, że kwadrat macierzy majoryzowania może zawierać na „głównej przekątnej" liczby różne od zera. Fakt ten interpretujemy w ten sposób, że obiekt $A_i$ majoryzuje pośrednio (dwuczłonowo) samego siebie. Dowolny obiekt może więc pośrednio $m_1$-majoryzować samego siebie.

### 3.2. MAJORYZOWANIE W ZNACZENIU DRUGIM

Mówimy, że relacja majoryzowania jest majoryzowaniem w znaczeniu drugim, czyli $m_2$-majoryzowaniem, jeżeli spełnione są następujące dwa warunki:

(2.1) Dla dowolnego obiektu A nie zachodzi $A m_2 A$.

(2.2) Jeżeli A oraz B są różnymi obiektami, to bądź $A m_2 B$, bądź $B m_2 A$.

A zatem relacja dwuargumentowa zwie się relacją majoryzowania w znaczeniu drugim, jeżeli jest ona relacją przeciwzwrotną, zaś każde dwa obiekty są w odniesieniu do niej porównywalne. Zwróćmy uwagę na to, że wykluczone jest zachodzenie jednoczesne relacji $A m_2 B$ oraz $B m_2 A$. Mamy tu do czynienia z alternatywą wyłączającą.

Z warunków (1.1) oraz (2.1) i (2.2) wynika natychmiast, że jeżeli między obiektami A oraz B zachodzi relacja $m_2$, to zachodzi między nimi także relacja $m_1$. Innymi słowy powiemy, że relacja majoryzowania w znaczeniu drugim zawiera się w relacji majoryzowania w znaczeniu pierwszym.

Podobnie jak w przypadku poprzednim, można ilustrować relację drugiego majoryzowania przy pomocy macierzy kwadratowej zerowojedynkowej. Na przecięciu i-tego wiersza oraz j-tej kolumny piszemy liczbę jeden o ile zachodzi $A_i m_2 A_j$, w przeciwnym razie piszemy liczbę zero. Warunek (2.1) pociąga za sobą występowanie na „głównej przekątnej" macierzy samych liczb zero. Warunek (2.2) natomiast powoduje pewną asymetrię macierzy majoryzowania; jeżeli na przecięciu i-tego wiersza oraz j-tej kolumny znajduje się liczba jeden, to na przecięciu j-tego wiersza oraz i-tej kolumny musi znajdować się liczba zero i odwrotnie. Liczby jeden oraz zero muszą więc sobie odpowiadać asymetrycznie w odniesieniu do przekątnej macierzy.

Jeżeli zachodzi relacja $Am_2B$, to mówimy, że obiekt A majoryzuje bezpośrednio (lub też jednoczłonowo) obiekt B. Jeśli natomiast mamy jednocześnie $Am_2B$ oraz $Bm_2C$, to mówimy, że obiekt A $m_2$-majoryzuje pośrednio (lub dwuczłonowo) obiekt C. Jest widoczne, że majoryzowanie pośrednie nie pociąga za sobą majoryzowania jednoczłonowego; relacja $m_2$-majoryzowania nie jest bowiem relacją przechodnią.

Analogicznie jak w przypadku $m_1$-majoryzowania, możemy także dla zwykłego majoryzowania przedstawić liczbę dwuczłonowych majoryzowań przy pomocy macierzy. Bierzemy w tym celu macierz $m_2$-majoryzowania i mnożymy ją przez siebie. Liczba znajdująca się na przecięciu i-tego wiersza oraz j-tej kolumny w tej ostatniej macierzy daje ilość dwuczłonowych zwykłych majoryzowań obiektu $A_j$ przez obiekt $A_i$. Z warunku (2.2) wynika, że w macierzy tej elementy na głównej przekątnej są równe zeru. Znaczy to, że żaden obiekt nie może dwuczłonowo $m_2$-majoryzować samego siebie. Własność ta odróżnia relację słabego majoryzowania od relacji zwykłego majoryzowania.

### 3.3. MAJORYZOWANIE W ZNACZENIU TRZECIM

Mówimy, że relacja majoryzowania jest majoryzowaniem w znaczeniu trzecim, czyli $m_3$-majoryzowaniem, jeżeli spełnione są następujące trzy warunki:

(3.1) Dla dowolnego obiektu A nie zachodzi relacja $Am_3A$.

(3.2) Dla pewnych dwu różnych obiektów A oraz B jest bądź $Am_3B$, bądź $Bm_3A$.

(3.3) Jeżeli zachodzą związki $Am_3B$ oraz $Bm_3C$, to zachodzi także związek $Am_3C$.

A więc relacja częściowa dwuargumentowa zwie się majoryzowaniem w znaczeniu mocnym, jeżeli jest ona relacją przeciwzwrotną, częściowo porównywalną i dla obiektów porównywalnych relacją przechodnią.

Z definicji relacji słabego majoryzowania oraz mocnego majoryzowania wynika, że zachodzenie między dwoma obiektami tej ostatniej pociąga za sobą zachodzenie pierwszej z nich. Innymi słowy relacja mocnego majoryzowania zawiera się w relacji słabego majoryzowania.

Widzimy więc, że relacja majoryzowania w znaczeniu pierwszym zawiera w sobie zarówno relację majoryzowania w znaczeniu drugim, jak i relację majoryzowania w znaczeniu trzecim. Konsekwentnie więc każde twierdzenie zachodzące dla relacji $m_1$ będzie zachodziło zarówno dla relacji $m_2$, jak też i dla relacji $m_3$.

Jeśli chodzi o związek zachodzący między relacjami $m_2$ oraz $m_3$, to można go wyrazić w postaci stwierdzenia orzekającego, że część wspólna obu wspomnianych relacji nie jest pusta. Istnieją bowiem konkretne relacje dwuargumentowe, które spełniają jednocześnie warunki (2.1), (2.2) oraz (3.1), (3.2), (3.3).

Zwróćmy uwagę na różnicę zachodzącą między warunkami (2.2) i (3.2). W pierwszym z nich występuje duży kwantyfikator, w drugim natomiast — mały kwantyfikator. Jeśli pierwszy z tych warunków nazwalibyśmy spójnością relacji $m_2$, to drugi z nich należałoby nazwać własnością częściowej spójności relacji $m_3$.

Podobnie jak w obu poprzednich przypadkach można relację mocnego majoryzowania ilustrować przy pomocy macierzy kwadratowej zerowojedynkowej. Elementy na głównej przekątnej macierzy utworzone są wyłącznie z liczb równych zeru. Pozostałe elementy mogą być zerami, bądź jedynkami jednakże pod warunkiem częściowej asymetryczności (bierze się to z warunku (3.2) ), tj. asymetryczności dla pewnych tylko obiektów, oraz warunkiem przechodniości (3.3) zharmonizowanego z warunkiem (3.1) oraz warunkiem (3.2). Jeżeli więc zachodzi relacja $A_i m_3 A_j$ oraz relacja $A_j m_3 A_k$, to zachodzi również relacja $A_i m_3 A_k$, jednakże pod warunkami: $i \neq k$ oraz nieprawda, że $A_k m_3 A_i$.

Jest widoczne, że dla relacji $m_3$ majoryzowanie dwuczłonowe zachodzące między obiektami A oraz B pociąga za sobą majoryzowanie jednoczłonowe między tymi obiektami. Własność ta jest specyficzna dla majoryzowania w znaczeniu trzecim. Nie przysługuje ona dwu pozostałym rodzajom majoryzowania.

## 4. ROZWINIĘCIE TEORII MAJORYZOWANIA

Przejdziemy obecnie do sformułowania oraz uzasadnienia pewnych prostych związków, które mają miejsce dla wyróżnionych rodzajów majoryzowania. Związki te ujmiemy w postaci twierdzeń, które zostaną wypowiedziane w dwu językach: macierzowym oraz „zwykłym”. Dzięki pierwszemu z nich otrzymamy łatwą metodę rachunkową umożliwiającą bliższy wgląd w strukturę zachodzących związków, dzięki drugiemu natomiast — wzbudzenie pewnych intuicji tyczących się trzech typów majoryzowania. Posługiwanie się dwoma językami stanowi wzbogacenie oraz rozbudowę interesujących nas teorii. Po tych uwagach wstępnych przystępujemy do wykonania założonego zadania.

4.1. W ODNIESIENIU DO PIERWSZEGO MAJORYZOWANIA

Jak pamiętamy dla relacji $m_1$ wymagamy jedynie spełnienia warunku (1.1). Konsekwencją jego jest to, że główna przekątna macierzy $m_1$-majoryzowania złożona jest z samych zer; pozostałe elementy macierzy są zerami, bądź jedynkami. Jeżeli zachodzi związek $Am_1B$, zaś nie zachodzi relacja $Bm_1A$, to mówimy, że między obiektami A oraz B ma miejsce majoryzowanie jednostronne. Jeżeli byłoby zarazem $Am_1B$ oraz $Bm_1A$, to mówimy, że między wspomnianymi obiektami zachodzi majoryzowanie dwustronne.

Przypuśćmy, że dane mamy obiekty $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Zakładamy, że są to różne obiekty. Przypuśćmy dalej, że między tymi obiektami zachodzi co najmniej majoryzowanie jednostronne, tzn. dla każdej pary różnych obiektów $A_i$ oraz $A_j$, gdzie wskaźniki i oraz j są liczbami zawartymi między 1 oraz n, zachodzi przynajmniej jedna z relacji $A_im_1A_j$, względnie $A_jm_1A_i$. Wówczas ma miejsce następujące twierdzenie [3]:

(1) Jeżeli obiekt $A_i$ nie majoryzuje słabo obiektu $A_j$, dla $i \neq j$, ani bezpośrednio, ani pośrednio, to suma elementów j-tego wiersza macierzy majoryzowania jest co najmniej o jeden większa od sumy elementów i-tego wiersza tej macierzy.

Dowód. Jeżeli nie zachodzi relacja $A_im_1A_j$, przeto zgodnie z założeniem zachodzi relacja $A_jm_1A_i$. Podobnie, jeżeli dla wszystkich wskaźników k nie zachodzi jednocześnie $A_jm_1A_k$ oraz $A_km_1A_j$, to jeżeli jest $A_im_1A_k$, wówczas jest także $A_jm_1A_k$. Znaczy to, że liczba jedynek w j-tym wierszu macierzy majoryzowania jest co najmniej o jeden większa od liczby jedynek w wierszu i-tym rozważanej macierzy. A to jest innym sformułowaniem tezy (1). W ten sposób dowód twierdzenia został zakończony.

Powyższe twierdzenie można w języku „zwykłym" wypowiedzieć następująco:

(1') Jeżeli obiekt $A_i$ nie majoryzuje słabo obiektu $A_j$, dla $i \neq j$, ani bezpośrednio, ani pośrednio, to liczba obiektów majoryzowana jednoczłonowo przez $A_j$ jest co najmniej o jeden większa od liczby obiektów majoryzowanych jednoczłonowo przez $A_i$.

[3] Por. J.G. Kemeny, J.L. Snell, G.L. Thompson, *Wwiedienie w konieczuju matiematiku*, Moskwa 1965, 425.

Oznaczmy przez $M_1$ macierz relacji pierwszego majoryzowania w odniesieniu do obiektów $A_1, A_2, ..., A_n$. Oznaczmy dalej przez $S_1$ sumę macierzy $M_1$ oraz jej kwadratu $M_1^2$, czyli niech $S_1 = M_1 + M_1^2$. Wykażemy, że zachodzi następujące twierdzenie [4]:

(2) Niech dana będzie relacja słabego majoryzowania między n obiektami $A_1, A_2, ..., A_n$ taka, że między każdymi dwoma różnymi obiektami zachodzi przynajmniej majoryzowanie jednostronne. Wówczas w macierzy $S_1$ istnieje co najmniej jeden wiersz (jedna kolumna), którego (której) wszystkie elementy (z wyjątkiem być może elementu znajdującego się na głównej przekątnej) są różne od zera.

Dowód. Oznaczmy przez $s_i$ sumę elementów i-tego wiersza macierzy $S_1$ dla $i = 1, 2, ..., n$. Przypuśćmy, że $s_k$ jest niemniejsze od pozostałych $s_j$ dla $j = 1, ..., k-1, k+1, ..., n$. Wówczas k-ty wiersz macierzy $S_1$ spełnia tezę twierdzenia. Istotnie, gdyby jakiś element k-tego wiersza rozważanej macierzy był równy zeru (pomijamy element znajdujący się na głównej przekątnej), niech to będzie element m-ty, wtedy zgodnie z założeniem (w myśl twierdzenia (1) dla $A_i = A_k$ oraz $A_j = A_m$) suma $s_m$ byłaby co najmniej o jeden większa od sumy $s_k$. A to przeczy temu, że $s_k$ jest niemniejsze od wszystkich pozostałych $s_j$.

Dowód wykazujący istnienie kolumny o wskazanej własności jest analogiczny do przeprowadzonego przez chwilą.

Uwzględniając charakterystykę macierzową relacji bezpośredniego i pośredniego słabego majoryzowania podaną w punkcie 3.1 powyższe twierdzenie daje się wysłowić następująco [5]:

(2') Niech dana będzie relacja słabego majoryzowania między pewną skończoną liczbą obiektów taka, że między każdymi dwoma różnymi obiektami zachodzi przynajmniej $m_1$-majoryzowanie jednostronne. Wówczas istnieje co najmniej jeden obiekt, który majoryzuje (jest majoryzowany) bezpośrednio lub pośrednio wszystkie (przez wszystkie) pozostałe obiekty.

Jest bezpośrednio widoczne, że obiekt majoryzujący wszystkie pozostałe obiekty jest tym obiektem, któremu odpowiada maksymalna suma elementów pewnego wiersza macierzy $S_1$. Podobnie, obiektem majoryzowanym przez wszystkie po-

[4] Tamże, 425—426.
[5] Tamże, 425.

zostałe obiekty jest ten, któremu odpowiada w macierzy $S_1$ maksymalna suma elementów pewnej kolumny.

Rozważmy raz jeszcze macierz $M_1$. Jak wiemy jest to macierz kwadratowa o n wierszach i tyluż kolumnach. Toteż można tworzyć nie tylko jej kwadrat, ale dowolną skończoną jej potęgę. Z przeprowadzonych wyżej rozważań wynika, że element znajdujący się na przecięciu i-tego wiersza oraz j-tej kolumny k-tej potęgi wspomnianej macierzy $M_1$ daje liczbę k-wyrazowych (k-członowych) słabych majoryzowań obiektu $A_j$ przez obiekt $A_i$. Konsekwentnie można podać analogon twierdzenia (2) dla przypadku k-członowych (łącznie z niższymi aż do jednoczłonowego) słabych majoryzowań. Sygnalizujemy tylko nasuwające się tutaj uogólnienia, nie zajmując się nimi bliżej, gdyż nie wchodzą w sposób zasadniczy do tematu artykułu.

### 4.2. W ODNIESIENIU DO DRUGIEGO MAJORYZOWANIA

W punkcie 3.2 zauważyliśmy, że relacja zwykłego majoryzowania jest szczególnym przypadkiem relacji słabego majoryzowania. Konsekwentnie będzie dla niej zachodzić twierdzenie (2). Warunek (2.2) pociąga za sobą niemożliwość dwuczłonowego $m_2$-majoryzowania obiektu przez samego siebie. Znaczy to, że kwadrat macierzy majoryzowania zwykłego zawiera na głównej przekątnej tylko liczby równe zeru. Oznaczmy przez $M_2$ macierz zwykłego majoryzowania. Niech $S_2 = M_2 + M^2_2$. Twierdzenie (2) przyjmie następujące sformułowanie[6]:

(3) Niech dana będzie relacja zwykłego majoryzowania zachodząca między n różnymi obiektami. Wówczas w macierzy $S_2$ istnieje co najmniej jeden wiersz (jedna kolumna) taki (taka), którego (której) wszystkie elementy, z wyjątkiem elementu znajdującego się na głównej przekątnej, są różne od zera.

Podajmy jeszcze analogon twierdzenia (2'). Ma on postać:

(3') Niech dana będzie relacja zwykłego majoryzowania między pewną skończoną liczbą obiektów. Wówczas istnieje co najmniej jeden obiekt taki, który $m_2$-majoryzuje (jest $m_2$-mojaryzowany) bezpośrednio lub pośrednio wszystkie (przez wszystkie) pozostałe obiekty.

Z przeprowadzonych do tej pory rozważań wynika łatwo, że można dla macierzy zwykłego majoryzowania $M_2$ tworzyć do-

[6] Por. J.G. Kemeny, J.L. Snell, G.L. Thompson, dz. cyt., 418.

wolne skończone jej potęgi, a więc wyrażenia postaci $M_2 + M^2_2 + M^3_2 + ... + M^r_2$. Interpretacja r-tej potęgi macierzy $M_2$ jest jasna, konsekwentnie zrozumiała jest interpretacja powyższej sumy. Toteż w łatwy sposób nasuwa się uogólnienie twierdzenia (3) na przypadek sumy r składników. Czytelnik obeznany z elementami rachunku macierzowego bez trudu dokona wspomnianego zabiegu.

Twierdzenie (3) orzeka m.in. istnienie przynajmniej jednego wiersza w macierzy $S_2$, którego wszystkie elementy, oprócz elementu znajdującego się na głównej przekątnej, są różnę od zera. Nie jest wykluczone, że tego rodzaju wierszy jest więcej. Innymi słowy jest możliwe istnienie kilku obiektów, które majoryzują bezpośrednio lub pośrednio wszystkie obiekty poza nim samym. Nasuwa się pytanie, czy można określić między nimi jakąś hierarchię, czy można przypisać im pewną rangę, aczkolwiek każdy z rozważanych obiektów $m_2$-majoryzuje jedno- lub dwuczłonowo wszystkie pozostałe obiekty poza nim samym. Odpowiedź na postawione pytanie jest pozytywna. Ale nie jednoznaczna. Podamy dwie propozycje porangowania dyskutowanych obiektów. Wyglądają one następująco [7]:

Niech dana będzie relacja zwykłego majoryzowania w odniesieniu do n różnych obiektów. Niech $M_2$ oznacza macierz tej relacji majoryzowania. Niech $M^2_2$ oznacza kwadrat wspomnianej macierzy, zaś $0{,}5.M^2_2$ — połowę jej kwadratu, tj. macierz otrzymnaą z macierzy $M^2_2$ przez podzielenie każdego jej elementu przez liczbę dwa. Niech $A_i$ będzie jednym z obiektów, między którymi określona jest relacja zwykłego majoryzowania. Przez rangę w znaczeniu pierwszym tego obiektu (oznaczać ją będziemy symbolem ranga $_1A_i$) rozumieć będziemy sumę elementów i-tego wiersza macierzy $M_2 + M^2_2$, zaś przez rangę w znaczeniu drugim tegoż obiektu (oznaczać ją będziemy symbolem ranga $_2A_i$) — sumę elementów i-tego wiersza macierzy $M_2 + 0{,}5.M^2_2$. W następnym punkcie artykułu wspominamy o możliwych aplikacjach określonych pojęć.

### 4.3. W ODNIESIENIU DO TRZECIEGO MAJORYZOWANIA

Niech $M_3$ oznacza macierz relacji mocnego majoryzowania zachodzącej między n różnymi obiektami $A_1, A_2, ..., A_n$. Macierz ta jest macierzą zerowojedynkową, spełniającą pewne proste warunki wymienione w punkcie 3.3. Wiemy także już, że zachodzenie $m_3$-majoryzowania dwuczłonowego implikuje

[7] Tamże, 419, 422.

zachodzenie majoryzowania jednoczłonowego. Z tego względu uszczegółowienie twierdzenia (2) dla relacji $m_3$-majoryzowania nie przedstawia większej wartości naukowej. Można oczywiście, podobnie jak w przypadkach wcześniejszych, rozważać macierz $S_3 = M_3 + M^2_3$. Jednakże wszystko to, co mówi nam macierz $S_3$ daje się odczytać z macierzy $M_3$. Toteż nie będziemy bliżej zajmować się badaniem macierzy $S_3$.

Uczynione przed chwilą uwagi były podyktowane zasadą ekonomii; zbędne jest rozważanie majoryzowania dwuczłonowego, skoro pociąga ono za sobą majoryzowanie jednoczłonowe; wystarczy zająć się tylko tym ostatnim.

Interesujący wydaje się być przypadek szczególny, kiedy obiektami są zdarzenia [8]. Wówczas celowe jest wprowadzenie pojęcia loterii. Przypomnijmy je teraz [9].

Przypśćmy, że A oraz B są zdarzeniami. Niech p oznacza liczbę zawartą w domkniętym odcinku od zera do jedności. Innymi słowy p jest ułamkiem właściwym, bądź zerem, bądź też jednością.

Przez loterię, która ma dwa możliwe wyniki: zdarzenie A zachodzące z prawdopodobieństwem p oraz zdarzenie B zachodzące z prawdopodobieństwem równym 1-p, rozumiemy zdarzenie postaci $pA + (1-p)B$.

Z określenia wynika, że dla $p = 1$ loteria jest po prostu równa zdarzeniu A, zaś dla $p = 0$ redukuje się do zdarzenia B. Można przeto zdarzenia A oraz B uważać za szczególne przypadki loterii.

Zakłada się, że loteria spełnia następujący, intuicyjnie zrozumiały, warunek:

Przypuśćmy, że zdarzenie A mocno majoryzuje zdarzenie C, a więc iż zachodzi związek $Am_3C$. Wówczas dla dowolnego zdarzenia B oraz dla każdego p dodatkowego, nie większego od jedności, spełniona jest zależność $(pA + /1-p/B)\ m_3\ (pC + + /1-p/B)$.

Można wykazać, że zachodzi następujące twierdzenie:

(4) Istnieje funkcja rzeczywista f określona na zbiorze wszystkich zdarzeń, która dla każdych dwu zdarzeń A oraz B i dla dowolnego p zawartego w domkniętym odcinku od zera do jedności spełnia następujące dwa warunki:

[8] W tym artykule poprzestajemy na intuicyjnym rozumieniu terminu zdarzenie. Formalnie zdarzenie określa się przy pomocy pojęcia ciała zbiorów zbudowanego na tzw. przestrzeni zdarzeń elementarnych. Zob. np. S. Zubrzycki, *Wykłady z rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej*, Warszawa 1966, 13—16.

[9] Zob. np. G. Owen, *Teoria gier*, Warszawa 1975, 112—113.

1° $f/A/ > f/B/$ jest równoważne $Am_3B$,
2° $f(pA+/1-p/B) = pf/A/+/1-p/f/B/$.

Dowód tego twierdzenia pomijamy ze względów czysto technicznych. Zainteresowanego Czytelnika odsyłamy do jakiegokolwiek podręcznika z zakresu teorii gier [10].

Funkcja f, o której mowa w twierdzeniu (4), bywa nazywana funkcją użyteczności. Zgodnie z własnością 2° funkcja f jest funkcją liniową względem loterii, chociaż nie jest ona określona jednoznacznie. Dwie funkcje użyteczności różnią się między sobą, mówiąc obrazowo, odmiennym położeniem punktu zerowego oraz różną wielkością jednostki skali; innymi słowy dają one różne skale, aczkolwiek odnoszące się do tej samej dziedziny. Użyteczność, o której była do tej chwili mowa, może być nazwana użytecznością względną. Zwróćmy uwagę na to, że otwarte pozostaje zagadnienie użyteczności bezwzględnej, które w naturalny niejako sposób nasuwa się przy rozważaniach związanych z teorią użyteczności [11].

## 5. PRZYKŁADY ZASTOSOWAŃ

Podamy obecnie kilka przykładów zastosowań wprowadzonych trzech pojęć majoryzowania.

Pojęcie słabego majoryzowania znajduje w naturalny sposób ilustrację w dziedzinie komunikacji, czyli przekazywania informacji. Chodzi tutaj o przekazywanie informacji w znaczeniu ścisłym, nie obejmuje ono więc tworzenia, zdobywania informacji. Relację $Am_1B$ czytamy: obiekt A przekazuje informację obiektowi B. Warunek (1.1) zakłada, że żaden obiekt nie przekazuje informacji sam sobie. I tyle tylko zakłada się o relacji $m_1$. Przykładami komunikowania mogą służyć: sygnalizacja drogowa, słuchanie radia, czytanie książki, rozmowa telefoniczna. Widzimy więc, że komunikowanie może być zarówno jednostronne, jak i dwustronne. Może ono być także jednoczłonowe, czyli bezpośrednie, jak i dwuczłonowe, czyli pośrednie. Jeżeli mamy do czynienia z taką relacją komunikowania, która spełnia założenia twierdzenia (2), to wówczas jego teza orzeka, że istnieje co najmniej jeden obiekt taki, który może przekazać jedno- lub dwuczłonowo informację każdemu z pozostałych obiektów, jak też istnieje co najmniej jeden taki obiekt, któremu może każdy z pozostałych obiektów prze-

[10] Może nim być książka cytowana w poprzednim przypisie. Dowód omawianego twierdzenia zawarty jest na stronach 114—116.
[11] Por. G. Owen, dz. cyt.; 116, 118—119.

kazać informację jedno- lub dwuczłonowo. Mówiąc skrótowo twierdzenie powyższe głosi istnienie co najmniej jednego obiektu, który ma maksymalną możność komunikacji, jak też obiektu, z którym może się komunikować maksymalna liczba obiektów. Ta interpretacja twierdzenia (2) wydaje się być interesująca. Nie jest ona także pozbawiona pewnych aspektów praktycznych. W licznych zastosowaniach mamy do czynienia z wielkim bogactwem konkretów. W każdym z nich schemat abstrakcyjny jest identyczny, odmienna natomiast jest jego konkretna treść [12].

Rozważmy teraz relację majoryzowania w znaczeniu drugim. Wzór $Am_2B$ czytajmy: obiekt A dominuje nad obiektem B. A więc np. drużyna sportowa A dominuje nad drużyną B, jeżeli wygrała z nią mecz, zwierzę A dominuje nad zwierzęciem B, jeżeli jest bardziej sprawne od tego drugiego w zdobywaniu pokarmu itd. Dominacja lub hierarchia socjalna w grupowym życiu zwierząt jest innym przykładem relacji zwykłego majoryzowania. Pamiętamy, że w przypadku relacji $m_2$ zakładamy zachodzenie dwu warunków (2.1) oraz (2.2.). Wykluczone są więc dla dwu różnych obiektów sytuacje remisowe. Jeżeli między pewną liczbą obiektów zachodzi relacja dominowania, to wówczas, zgodnie z twierdzeniem (3), istnieje co najmniej jeden taki obiekt, który dominuje nad wszystkimi pozostałymi obiektami, jak też istnieje taki obiekt nad którym dominują wszystkie pozostałe obiekty. Mówiąc obrazowo, istnieje wówczas co najmniej jeden obiekt najbardziej „uprzywilejowany" i co najmniej jeden obiekt najmniej „uprzywilejowany". We wszystkich konkretnych ilustracjach mamy do czynienia z tym samym schematem abstrakcyjnym. Bogactwo konkretów jest olbrzymie [13].

W przypadku relacji zwykłego majoryzowania określiliśmy pojęcie rangi obiektu. Dzięki temu rozważane obiekty występujące w stosunku dominowania dają się ponumerować. Oto prosty przykład zastosowania pojęcia rangi w znaczeniu pierwszym [14].

---

[12] Zob. liczne przykłady przekazywania informacji referowane w jakimkolwiek podręczniku informatyki, np. F.L. Bauer, G. Goos, *Informatyka*, Warszawa 1977, 29—31. Por. także. J.G. Kemeny, J.L. Snell, G.L. Thompson, dz. cyt., 423—428.

[13] Por. P. Trojan, *Ekologia ogólna*, Warszawa 1975, 204—205; także, J.G. Kemeny, J.L. Snell, G.L. Thompson, dz. cyt., 415.

[14] Przykład został zaczerpnięty z książki: J.G. Kemeny, J.L. Snell, G.L. Thompson, dz. cyt., 420.

Przypuśćmy, że mamy do czynienia z czteroma drużynami sportowymi: I, II, III, IV. Przypśćmy dalej, że drużyna I wygrała z drużyną II oraz z drużyną III, zaś drużyna IV, wygrała z drużyną III, natomiast drużyna III wygrała z drużyną I, nadto drużyna IV wygrała z drużyną II oraz III. Wówczas macierz $M_2$, jej kwadrat oraz macierz $S_2$ wyglądają następująco:

$$M_2 = \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{Bmatrix}, \quad M^2_2 = \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{Bmatrix}, \quad S_2 = \begin{Bmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{Bmatrix}$$

Otrzymujemy przeto:

$$\begin{aligned} \text{ranga}_1 \ (\text{I}) &= 5 \\ \text{ranga}_1 \ (\text{II}) &= 2 \\ \text{ranga}_1 \ (\text{III}) &= 3 \\ \text{ranga}_1 \ (\text{IV}) &= 4 \end{aligned}$$

Konsekwentnie więc przypiszemy wymienionym drużynom następującą kolejność: I, IV, III, II.

Majoryzowanie w znaczeniu mocnym, o ile nadto ma własność porównywalności, wiąże się w widoczny sposób ze stosunkiem preferowania, który może być odnoszony do zagadnień związanych z podejmowaniem ryzyka, z teorią użyteczności. Podejmowanie ryzyka ma miejsce w wielu sytuacjach życia codziennego, jak również w problematyce ekonomicznej itd. Dziedzina zastosowań jest tu niezwykle obszerna. Jeżeli zakładamy jedynie częściową porównywalność, a więc warunek (3.2), otrzymujemy słabsze wprawdzie twierdzenia, lecz bardziej ogólne, obejmujące wiele sytuacji, w których występuje, nazwijmy to tak, pseudouporządkowanie liniowe [15]. Wydaje się, że pojęcie majoryzowania w znaczeniu trzecim okaże się wygodne także w przypadku pewnych rozważań o tematyce filozoficznej.

Związki zachodzące między wyróżnionymi rodzajami majoryzowania, jak też szerokie spektrum ich zastosowań w licznych naukach nasuwają niewątpliwie, w sposób pośredni, wniosek o istotnej jedności wszystkich nauk. Nie ma absolutnie wyizolowanych nauk, nie ma też bezwzględnie wyodrębnionych metod naukowych.

[15] Por. G. Owen, dz. cyt., 111, 119—120. Zob. także R.L. Ackoff, *Decyzje optymalne w badaniach stosowanych*, Warszawa 1969, 57—61.

## FORMALE CHARAKTERISTIK DER MAJORISATIONSRELATION

(Zusammenfassung)

Verschiedene Wissenschaften, wie z.B. Ökologie, Soziologie, Psychologie, Pädagogik, wenden Relationen wie Domination, Präferenz, Majorisation an. Einige Verfasser verwenden diese Begriffe als Synonyme, andere aber unterscheiden zwischen ihnen. Dieser Aufsatz schlägt eine formale und präzise Charakterisierung dieser Begriffe vor und verdeutlicht deren unterschiedliche Bedeutung. Es wird auch betrachtet die Wechselwirkung zwischen ihnen und eine Reihe von Anwendungen in konkreten Disziplinen.