Edward Nieznański

16-elemenitowa algebra Boole'a jako model klasycznej teorii de modis essendi

Studia Philosophiae Christianae 19/1, 125-132

1983

Studia Philosophiae Christianae
ATK
19(1983)1

EDWARD NIEZNAŃSKI

16-ELEMENTOWA ALGEBRA BOOLE'A JAKO MODEL KLASYCZNEJ TEORII DE MODIS ESSENDI

1. Klasyczna metafizyka na jej aktualnym etapie rozwoju deklaruje zdecydowaną gotowość filozoficznego badania niemal wyłącznie istnienia bytu. Bez włączania się w dyskusję wokół zagadnienia, czy przedmiotem tych badań ma być tylko istnienie aktualne, czy również możliwe, a może jeszcze i *entia rationis,* zamierzam jedynie rozważyć logiczne związki tzw. sposobów bycia — odmian bytu rozróżnianych w scholastycznej teorii *de modis essendi.* Związki te zamierzam opisać na gruncie teorii algebr Boole'a.

2. TEORIA ALGEBR BOOLE'A

2.1. Algebrę abstrakcyjną (U, +, · ,n) — w której uniwersum U jest niepustym zbiorem dowolnych przedmiotów, +, · są różnymi dwiema dowolnymi dwuargumentowymi operacjami wykonalnymi[1] w zbiorze U oraz n jest jednoargumentową operacją wykonalną w U — nazywamy algebrą Boole'a, gdy operacje + i · spełniają dla wszystkich X,Y,Z należących do zbioru U następujących 5 warunków nałożonych na dowolne dwie różne operacje dwuargumentowe f i g:

(1) warunek przemienności:
XfY = YfX

[1] k-argumentowa operacja wykonalna w zbiorze U to funkcja określona na k-krotnym iloczynie kartezjańskim zbioru U i przyjmująca wartości w zbiorze U.

(2) warunek łączności:
$(XfY)fZ = Xf(YfZ)$
(3) warunek pochłaniania:
$(XfY)gX = X$
(4) warunek rozdzielności:
$(XfY)gZ = (XgZ)f(YgZ)$
(5) warunek jedności i zera:
$(XfnX)gY = Y$.

W każdej algebrze Boole'a możemy wyznaczyć:

1°. relację a słabo-porządkującą uniwersum U (czyli zwrotno-antysymetryczno-przechodnią w zbiorze U):
XaY wtw (wtedy i tylko wtedy gdy) $X \cdot Y = X$,

a także

2°. element pierwszy I (zwany też najmniejszym lub zerem) i
3°. element ostatni V (zwany też największym lub jednością) tej relacji (i tej algebry):
$I = X.nX$ $\quad V = X + nX$ (dla dowolnego elementu X zbioru U).

2.2. Jeśli uniwersum U algebry Boole'a ma jeden tylko element, to tę jednoelementową algebrę Boole'a nazywamy algebrą zdegenerowaną [2]. W takiej algebrze $I = V$.

Niech k reprezentuje liczby naturalne 1,2,3,... Wówczas dla każdej klasy izomorficznych niezdegenerowanych algebr Boole'a 2^k-elementowych możemy wybrać w charakterze reprezentantki algebrę: $(\{0,1\}^k, +, \cdot, n)$, w której uniwersum jest k-członowym iloczynem kartezjańskim zbioru dwu liczb 0 i 1, zaś operacje — dla X_i, Y_i należących do zbioru $\{0,1\}$ przy i z przedziału zamkniętego liczb naturalnych od 1 do k — są określone w następujący sposób:

(1) $(X_1, X_2 \ldots, X_k) + (Y_1, Y_2, \ldots, Y_k) = (\max(X_1, Y_1), \max(X_2, Y_2), \ldots, \max(X_k, Y_k))$, gdzie $\max(1,1) = \max(1,0) = \max(0,1) = 1$ i $\max(0,0) = 0$;
(2) $(X_1, X_2, \ldots, X_k) \cdot (Y_1, Y_2, \ldots, Y_k) = (\min(X_1, Y_1), \min(X_2, Y_2), \ldots, \min(X_k, Y_k))$, gdzie $\min(1,1) = 1$ i
$\min(1,0) = \min(0,1) = \min(0,0) = 0$;

[2] Zob. T. Traczyk, *Wstęp do teorii algebr Boole'a*, Warszawa 1970, s. 16 i 34.

(3) $n(X_1,X_2,...,X_k)=(1—X_1,1—X_2,...,1—X_k)$,
gdzie $1—1=0$ i $1—0=1$.

Jednością tej algebry jest $V=\{1\}^k$ a zerem $I=\{0\}^k$.
Przyjmijmy w dalszym ciągu pisać: $X_1X_2...X_k$ zamiast $(X_1,X_2, ...,X_k)$.

Dla $k=1$ otrzymujemy dwuelementową algebrę Boole'a znaną jako matryca klasycznego rachunku zdań. Dla $k=2$ otrzymujemy 4-elementową algebrę Boole'a, w której uniwersum $\{0,1\}^2=\{00,01,10,11\}$. Dla $k=3$ mamy 8-elementową algebrę Boole'a z uniwersum $\{0,1\}^3=\{000,100,010,001,110,011,101, 111\}$. Dla $k=4$ otrzymujemy 16-elementową algebrę Boole'a z uniwersum $\{0,1\}^4=\{0000,1000,0100,0010,0001,1100,1010,0110, 0101,0011,1001,1110,1101,1011,0111,1111\}$, itd.

Przyjmujemy następujące cztery skróty:

(1) XaY wtw $X.Y=X$,
(2) XoY wtw $X.Y\neq X$,
(3) XeY wtw $X.Y=I$,
(4) XiY wtw $X.Y\neq I$.

3. TEORIA DE MODIS ESSENDI

3.1. Wszystkie przytaczane w dalszym ciągu stałe będą poddawane dwu różnym interpretacjom: intensjonalnej i ekstensjonalnej. I tak: „V" w interpretacji pierwszej to „przedmiot", a w interpretacji drugiej zbiór wszystkich przedmiotów" („klasa przedmiotów"). Zapis „Vx" w interpretacji intensjonalnej czytamy „x jest przedmiotem", w interpretacji ekstensjonalnej — „x jest elementem klasy przedmiotów". Podobnie stała „B" znaczy najpierw „byt", a następnie „klasę bytów". „Bx" znaczy „x jest bytem" („x istnieje") a ekstensjonalnie: „x jest elementem klasy bytów". Stąd zdanie „BaV" w interpretacji intensjonalnej czytamy „Każdy byt jest przedmiotem", a w interpretacji ekstensjonalnej — „Klasa bytów zawiera się w klasie przedmiotów". I podobnie dla wszystkich X,Y należących do U interpretujemy „XaY" jako „każde X jest Y" lub „klasa X zawiera się w klasie Y". Wyrażenie „XeY" znaczy „żadne X nie jest Y" (a w interpretacji ekstensjonalnej — „klasy X i Y są rozłączne"). „XiY" znaczy „ przynajmniej pewne X jest (są) Y" (i ekstensjonalnie — „klasy X i Y są nierozłączne"). „XoY" znaczy „pewne X nie jest (nie są) Y" (lub „klasa X nie zawiera się w klasie Y"). „nX" intensjonalnie znaczy „nie-X" zaś ekstensjonalnie „dopełnienie klasy X do zbioru pełnego V". „X.Y" znaczy intens. „(zarazem) X i Y" a ekstens. „iloczyn zbiorów X i Y". Wreszcie „X+Y" znaczy „X lub Y" i ekstens. „suma zbiorów X i Y".

3.2. Ponieważ antonimami (wyrazami mającymi znaczenia przeciwstawne) są: „B" („byt") i „nB" („niebyt") oraz „V" („przedmiot") i „nV" („nieprzedmiot", ekstensjonalnie — „klasa pusta"), przyjąwszy skrót I=nV i oznaczywszy ekstensje pojęć I,V,B,nB przez: I=00, V=11, B=10 i nB=01 uzyskujemy automatycznie 4-elementową algebrę Boole'a, która uwzględnia tylko dwa *modi essendi*: B — *entia realia* i nB — *entia rationis*. W algebrze tej obowiązuje zasada wyłącznego środka: „Każdy przedmiot istnieje lub nie istnieje" [3] czyli V=B+nB oraz zasada niesprzeczności: „Nieprawda, że jakiś przedmiot zarazem istnieje i nie istnieje" [4], tzn. I=B • nB. Obydwie te zasady posiadają dla określonej algebry dowody: B+nB=10+n10=10+01=11=V i B • nB=10 • n10=10 • • 01=00=I. Można tu również wykazać, że BaV, bo B • V= =10 • 11=10=B oraz nBaV, bo nB • V=01 • 11=01=nB. Również VoB, bo V • B=11 • 10=10≠V i VonB, bo V • nB=11 • •01=01≠V. Jest to najprostsza teoria *de modis essendi* i zakłada ona jak widać bardzo elementarne związki logiczne.

3.3 Zauważmy jednak, że „w metafizyce klasycznej obejmowano pojęciem rzeczywistości (*realitas*) zarówno byt aktualny, jak potencjalny, zarówno to, co istnieje, jak to, co zdarzyć się może, i przeciwstawiano tak pojętej rzeczywistości jedynie *entia rationis* jako nierzeczywiste" [5]. Do bytów aktualnych zalicza się również byt konieczny, tj. „byt, który nie może nie istnieć" [6], a także byt przygodny określany na dwa nierównoznaczne sposoby: raz jako byt, który tak istnieje, że może nie istnieć (lub jako byt, który istnieje chociaż nie musi istnieć [7]); drugi raz — jako byt, który może istnieć i może nie istnieć (*contingens est quod potest esse et non esse* [8]). Natomiast niebyty, którymi są przedmioty pomyślane (*entia rationis*) „czyli takie, które można jedynie pomyśleć, lecz które nie są ani aktualne ani potencjalne" [9] dzieli się jeszcze na

[3] T. Czeżowski, *O metafizyce, jej kierunkach i zagadnieniach*, Toruń 1948, s. 78.
[4] T. Czeżowski, dz. cyt., s. 78.
[5] T. Czeżowski, dz. cyt., s. 77.
[6] K. Kłósak, *W poszukiwaniu Pierwszej Przyczyny*, cz. II, Warszawa 1957, s. 106.
[7] Zob.: A. Stępień, *Wprowadzenie do metafizyki*, Kraków 1964, s. 238.
[8] *Summa Theologica*, I, q. 86, a. 3.
[9] T. Czeżowski, dz. cyt., s. 69.

niebyty absolutne i względne [10]. Związki logiczne tej wzbogaconej teorii *de modis essendi* dają się przedstawić na modelu 16-elementowej algebry Boole'a, w której ekstensje pojęć bytu oznaczam za pomocą uporządkowanych czwórek liczb 0 lub 1 w następujący sposób:

(1) przedmiot: V=1111
(2) nieprzedmiot: I=0000
(3) byt: B=1100
(4) niebyt: nB=0011
(5) byt możliwy: MB=1110
(6) nieprzygodny niebyt: nPnB=1101
(7) nieprzygodny byt: nPB=1011
(8) możliwy niebyt: MnB=0111
(9) byt stający się (*ens in statu fieri, ens in motu*): SB=0110
(10) byt niestający się: nSB=1001
(11) możliwy byt nieprzygodny: MnPB=1010
(12) możliwy nieprzygodny niebyt MnPnB=0101
(13) byt konieczny: KB=1000
(14) konieczny niebyt: KnB=0001
(15) byt przygodny: PB=0100
(16) przygodny niebyt: PnB=0010

W teorii algebr Boole'a dowodzimy zarówno twierdzenia jak i definicje należące do teorii *de modis essendi.*

Definicje:

D1. V=B+nB. Przedmiot jest to byt lub niebyt. Niebyt jest przedmiotem tylko pomyślnym (*ens rationis*) i nie istnieje obiektywnie, a więc nie jest bytem. Dowód: B+nB=1100+ +n1100=1100+0011=1111=V.

D2. I=B·nB. Nieprzedmiot jest to zarazem byt i niebyt. Nie istnieje on i nie jest nawet do pomyślenia, dlatego nie jest przedmiotem. Dowód: B·nB=1100·n1100=1100·0011=0000=I.

D3. MB=nKnB. Byt możliwy jest to niekonieczny niebyt (jest to przedmiot, który nie musi nie istnieć). Dowód: nKnB= =n0001=1110=MB.

D4. MnB=nKB. Możliwy niebyt jest to byt niekonieczny (jest to przedmiot, który nie musi istnieć). Dowód: nKB= =n1000=0111=MnB.

D5. PB=B·MnB. Byt przygodny to przedmiot, który tak

[10] Zob. A. Stępień, dz. cyt., s. 232.

istnieje, że może nie istnieć. Dowód: B·MnB=1100·0111=0100==PB.

D6. PnB=nB·MB. Przygodny niebyt to przedmiot, który tak nie istnieje, że może istnieć. Dowód: nB·MB=0011·1110==0010=PnB.

D7. SB=MB·MnB. Byt stający się[11] to przedmiot, który może istnieć i nie istnieć. Dowód: MB·MnB=1110·0111=0110==SB.

D8. nSB=KB+KnB. Byt niestający się to przedmiot, który musi istnieć lub nie istnieć. Dowód: KB+KnB=1000+0001==1001=nSB.

D9. MnPB=MB·nPB. Możliwy nieprzygodny byt to byt zarazem możliwy i nieprzygodny. Dowód: MB·nPB=1110··1011=1010=MnPB.

D10. MnPnB=MnB·nPnB. Możliwy nieprzygodny niebyt to niebyt zarazem możliwy i nieprzygodny. Dowód: MnB·nPnB==0111·1101=0101=MnPnB.

T w i e r d z e n i a[12]

T 1. KB=nMnB, bo nMnB=n0111=1000=KB.
T 2. KnB=nMB, bo nMB=n1110=0001=KnB.
T 3. BenB, bo B·nB=1100·n1100=1100·0011=0000=I.
T 4. MBeKnB, bo MB·KnB=1110·0001=0000=I.
T 5. MBinB, bo MB·nB=1110·0011=0010≠I.
T 6. MBiB, bo MB·B=1110·1100=1100≠I.
T 7. BaMB[13], bo B·MB=1100·1110=1100=B.
T 8. KBaB, bo KB·B=1000·1100≠1000=KB.
T 9. PBaB, bo PB·B=0100·1100=0100=PB.
T10. BoPB, bo B·PB=1100·0100=0100≠B.

[11] Zob.: F. Rivetti Barbò, *La struttura logica della prima via per provare l'esistenza di Dio. Applicazioni di logica simbolica e nessi di contenuti*, „Rivista di Filosofia Neoscolastica", 52 (1960) z. 2—3, s. 241—320 (polski przekład w „Miscellanea Logica" t. I, Warszawa 1980), zob. paragrafy 19—35. F. Rivetti Barbò *ens in motu* nazywa bytem stającym się, *ens in statu fieri* i twierdzi o nim, iż jest on bytem możliwym, bo nie istnieje jeszcze, lecz dodaje o nim, iż może nie zaistnieć w warunkach niesprzyjających.

[12] Czytanie twierdzeń jako nazbyt łatwe, z oszczędności miejsca pomijam.

[13] *Ab esse ad posse valet consequentia.* Każdy byt jest też bytem możliwym, bo wszystko, co istnieje, jest również „wewnętrznie niesprzeczne, nadające się do istnienia" (definicja „możliwego" w A. Stępień, dz. cyt., s. 230). „Byt możliwy" w używanym tu sensie obejmuje więc swym zakresem nie tylko *possibilia* lecz wszystkie w ogóle *entia realia*.

T11. Ba(KB+PB), bo B·(KB+PB)=1100·(1000+0100)=1100·
·1100=1100=B.
T12. PBaSB, bo PB·SB=0100·0110=0100=PB.
T13. SBoPB, bo SB·PB=0100$\neq$SB.
T14. SB=PB+PnB, bo PB+PnB=0100+0010=0110=SB.
T15. B=KB+PB, bo KB+PB=1000+0100=1100=B.
T16. nB=KnB+PnB, bo KnB+PnB=0001+0010=0011=nB.
T17. KBaMB, bo KB·MB=1000·1110=1000=KB.
T18. KnBanB, bo KnB·nB=0001·0011=0001=KnB.
T19. nBaMnB, bo nB·MnB=0011·0111=0011=nB.
T20. KnBaMnB, bo KnB·MnB=0001·0111=0001=KnB.
T21. MnPnB=PB+KnB, bo PB+KnB=0100+0001=0101=
=MnPnB.

Można również łatwo wykazać, że:

T22. B=KB+B=B·MB=MB·nPnB.
T23. MB=B+MB+KB=B+MnPB=B+SB=B+PnB.
T24. nPnB=B+nSB=B+MnPnB=B+KnB.
T25. nPB=MnPB+nB=KB+nB=nSB+nB.
T26. MnB=nB+MnPnB=nB+SB=nB+PB.
T27. MnPB=KB+PnB.
T28. nB=PnB+nB=KnB+nB=MnB·nPB.
T29. PB=B·SB=B·MnPnB=B·nKB.
T30. PnB=nB·SB=nB·MnPB=nB·nKnB.

Ostatnia grupa twierdzeń pozwala również poczynić pewną uwagę natury ogólnej, że nader liczne tu „sposoby bycia" dają się sprowadzić jedynie do 16 zakresowo różnych pojęć [14]. Biorąc mianowicie za podstawę relację równości zakresowej pojęć uzyskujemy 16-elementową klasę ilorazową tej relacji, a więc i 16 ekstensjonalnie różnych modos essendi (jeśli do tych modos zgodzimy się zaliczyć również „sprzeczność" nieprzedmiotu I i „niesprzeczność" przedmiotu V) lub 14 — jeśli wykluczymy „sposoby bycia" I i V.

W zakończeniu dodajmy może tylko uwagę, że w sposób

[14] W 8-elementowej algebrze Boole'a dla teorii *de modis essendi* mogą być określone np. następujące modi: przedmiot V=111, nieprzedmiot I=000, byt B=100, niebyt nB=011, byt realny RB=110, byt racjonalny (fikcyjny) FB=001, przygodny niebyt PnB=010 i nieprzygodny niebyt nPnB=101. Dają się wówczas dowieść definicje: V=B+nB, I=B.nB, FB=nRB, PnB=nB.RB, nPnB=B+FB i np. twierdzenia: RB=nFB, I=nV, V=nI, RBeFB, BenB, BaRB, FBanB, BanPnB, FBanPnB.

analogiczny do przedstawionych wyżej konstrukcji można by ewentualnie było w miarę potrzeb rozszerzać teorię *de modis essendi* i budować dla niej algebry jeszcze wyższej mocy.

16-ELEMENTRIGE BOOLESCHE ALGEBRA ALS MODELL EINER KLASSISCHEN THEORIE „DE MODIS ESSENDI"

(Zusammenfassung)

In diesem Aufsatz möchte ich eine 16-elementrige boolesche Algebra für die von der klassischen Metaphysik her bekannte *modos essendi* bestimmen. Zu diesem Zweck definiere ich zuerst ein allgemeines arithmetisches Schema für die 2^k-elementrigen booleschen Algebras $(\{0,1\}^k, +, \cdot, n)$. Dann zeige ich, daβ wir gleich, wenn wir für „B" („ein Seiendes") als seine Extension (die alle *entia realia* enthält) das geordnete Paar 10 und für „nB" („ein nicht-Seiendes") 01 (diese Extension enhält alle entia rationis), dann noch für „V" („eie Gegenstand") 11 und für „I" („ein nicht-Gegenstand") 00 annehmen, auf diese Weise die 4-elementrige boolesche Algebra als Modell der einfachsten Theorie *de modis essendi* bekommen. Jede reichere Theorie de modis essendi setzt eine boolesche Algebra der höheren Machtzahl voraus. Ich erwähne nur eine 8-elementrige Algebra für eine reichere Theorie *de modis essendi*, dann zeige ich aber näher eine 16-elementrige boolesche Algebra für die klassische Theorie *de modis essendi*, die 16 solch verschiedene *modos* enthält. Ich erreiche damit die Formalisierung einer Theorie *de modis essendi*. Diese formalisierte Theorie bringt zugleich mit, eine einfache Logik, die wie ich hoffe auch für manche metaphysische Vorschungen verwendbar sein könnte.