Mieczysław Lubański

Zagadnienie istnienia w matematyce, I

Studia Philosophiae Christianae 19/2, 182-186

1983

ogrodów, krajów, rozmowa, marzenie jako myślenie możliwościami, rozpoznanie swych zalet, i zgoda na siebie, szacunek dla czyjejś własności, przezwyciężanie próżności, niekiedy gniew, przerażenie, brzydota, wreszcie łagodna zgoda na los osób niekochanych.

Nadzieja jest więc swoistą równowagą wewnętrzną, tym, co najlepsze między właśnie rozpaczą i miłością. Jest przezwyciężeniem uznawania celów bliższych za ostateczne, uczeniem się rzeczywistości, wiązania decyzji i emocji z prawdą i dobrem poprzez piękno.

Najkrócej mówiąc, piękno wprowadza nas w nadzieję, nigdy w rozpacz i nigdy w miłość. Wyrywa nas z rozpaczy, lecz nie ma siły wniesienia nas w miłość. Zatrzymuje przy sobie w pogodnej kontemplacji nie dopuszczając do spełnień: do nieszczęścia śmierci z rozpaczy i do szczęścia trwania w miłości. Budząc jednak oczekiwanie, które jest nadzieją, kieruje do prawdy i dobra, wiary i miłości, gdy nadzieję ożywi cierpienie i tęsknota.

MIECZYSŁAW LUBAŃSKI

ZAGADNIENIE ISTNIENIA W MATEMATYCE, I

Jednym z centralnych problemów w filozofii matematyki jest zagadnienie istnienia, a więc pytanie o sposób, czy sposoby, istnienia obiektów matematycznych. Problem ten jest zarazem jednym z najstarszych problemów filozoficznych i do dziś problemem otwartym. Przyczynę tego stanu rzeczy można upatrywać zarówno w specyficznej naturze matematyki, jak też w niemożności pojęciowego ujęcia istnienia [1]. Matematyka może być uznana za wyjątkową dziedzinę wiedzy, z tego choćby powodu, że bywają jej przypisywane cechy wykluczające się. Jedno ze skrajnych stanowisk uważa ją za jedyną niepowątpiewalną naukę, w której mamy do czynienia z twierdzeniami w pełnym tego słowa znaczeniu, drugie zaś traktuje ją tylko za język nauki, zwłaszcza fizyki. Prawda o matematyce nie jest łatwa do odkrycia. Ujawnia się ona najbardziej przy analizowaniu badań matematycznych, ewentualnie ich wyników, a więc twierdzeń matematycznych, ich dowodów, jak też celu uprawiania matematyki. Dużo światła może tu rzucić również rozważanie genezy pojęć matematycznych. Sam termin istnienie nie należy również do terminów prostych i łatwych. W przypadku spraw dnia codziennego nie budzi on najmniejszych wątpliwości. Jeśli jednak chcemy przyjrzeć mu się bliżej, staje się prawie że nieuchwytny. Nic więc dziwnego, że problem istnienia w matematyce, choć dawno już postawiony, pozostaje i dziś aktualny [2].

---

[1] Por. M. A. Krąpiec, *Metafizyka, Zarys podstawowych zagadnień*, Poznań 1966, 417.

[2] Problem sposobu istnienia obiektów matematycznych jest zaliczany do centralnych zagadnień filozofii matematyki; uchodzi on za problem niezwykle złożony i trudny. Zob. np. J. Such, *Wstęp do metodolgii ogólnej nauk*, Poznań 1973, 106; *Mała Encyklopedia Logiki*, Wrocław 1970, 205, 208; A. Mostowski, *The present state of investigations on the foundations of mathematics*, Rozprawy Matematyczne 9, Warszawa 1955.

Jest rzeczą niewątpliwą, że w matematyce mówi się o istnieniu różnego rodzaju obiektów. Powstaje pytanie co się przez to w tej dyscyplinie rozumie; innymi słowy, co znaczy istnieć w matematyce. Poniższe rozważania stawiają sobie za cel wychwycenie znaczeń terminu istnieć w matematyce. W tym celu przeanalizuje się dowody twierdzeń, w których orzeka się istnienie pewnych obiektów matematycznych. Analiza ta pozwoli ujrzeć sposób rozumienia interesującego nas terminu; znajomość samych bowiem sformułowań twierdzeń nie wystarcza do tego celu. Analizy nasze obejmą podstawowe dziedziny matematyki. Obecne opracowanie ogranicza się do algebry. Za podstawę analiz bierze się typowe współczesne podręczniki algebry [3].

Żeby rozważania nasze były konkretne i jednocześnie dostępne dla filozofa zostaną podane możliwie proste w formie twierdzenia orzekające o istnieniu pewnych obiektów w zakresie rozważań algebraicznych. Z namysłu unika się szczegółów technicznych, które zaciemniłyby tylko rozważania. Spośród wielu twierdzeń odpowiadających podanym warunkom wybieramy kilka najbardziej, jak się zdaje, reprezentatywnych. Oto wspomniane twierdzenia zebrane w trzech grupach:

Grupa I.

Twierdzenie 1. Dla każdej liczby całkowitej a i dowolnej liczby naturalnej n *istnieje* dokładnie jedna taka liczba r, która jest resztą z dzielenia liczby a przez n i jest mniejsza od n.

Twierdzenie 2. Niech d będzie największym wspólnym dzielnikiem liczb całkowitych a oraz b. *Istnieją* takie liczby całkowite x oraz y, że zachodzi równość $d=ax+by$.

Grupa II.

Twierdzenie 3. Niech A będzie podzbiorem ciała K. *Istnieje* najmniejsze podciało L ciała K zawierające A.

Twierdzenie 4. Niech A będzie dowolnym podzbiorem przestrzeni liniowej V. *Istnieje* najmniejsza podprzestrzeń W przestrzeni V zawierająca A.

Twierdzenie 5. Niech A będzie podzbiorem pierścienia P. *Istnieje* najmniejszy podpierścień R pierścienia P zawierający A.

Twierdzenie 6. Niech A będzie podzbiorem pierścienia P. *Istnieje* najmniejszy ideał zawierający A.

Twierdzenie 7. Dla dowolnego podzbioru A grupy G *istnieje* najmniejsza podgrupa H grupy G zawierająca zbiór A.

Grupa III.

Twierdzenie 8. Jeżeli I jest ideałem pierścienia P, to *istnieje* homomorfizm pierścienia P, którego jądrem jest I.

Twierdzenie 9. Jeżeli H jest dzielnikiem normalnym grupy G, to *istnieje* homomorfizm grupy G, którego jądro jest równe H.

---

[3] S. Balcerzyk, *Wstęp do algebry homologicznej*, Warszawa 1970; A. Białynicki-Birula, Algebra, Warszawa 1976; G. Birkhoff i S. Mac Lane, *Przegląd algebry współczesnej*, Warszawa 1966; J. Browkin, *Teoria ciał*, Warszawa 1977; B. L. van der Waerden, Algebra I, Berlin 1971. Podane niżej twierdzenia algebraiczne są zaczerpnięte z wymienionych podręczników. Nie podajemy dokładnych danych bibliograficznych ze względu na łatwość odszukania ich w cytowanych książkach. Same twierdzenia zaliczyć należy do bardzo elementarnych.

Twierdzenie 10. Jeżeli f jest R-homomorfizmem modułu M w moduł N, to *istnieje* izomorfizm R-modułu Imf na R-moduł Coimf.

Nie zamieszczamy tutaj dowodów powyższych twierdzeń, gdyż byłoby to nużące dla Czytelnika nie-matematyka. Z tego też względu nie podajemy ich analiz *in extenso*. Wychodzimy z założenia, że wystarczy przedstawić podsumowanie przeprowadzonych analiz. Czytelnik zainteresowany bliżej problematyką znajdzie teksty dowodów w cytowanych podręcznikach. Ich analiza przekona go o poprawności zaprezentowanych podsumowań.

Weźmy teraz pod uwagę grupę I twierdzeń, składającą się z dwu twierdzeń. Orzekają one o istnieniu pewnych liczb. Analizując ich dowody zauważamy, że stwierdzanie istnienia wspomnianych liczb dokonuje się przez wskazanie spośród istniejących liczb takich, które posiadają dane właściwości. To wskazanie, z reguły, polega na wykonaniu pewnych działań, czy operacji, na liczbach wyjściowych. Ich wykonalność jest zagwarantowana przyjętymi warunkami nałożonymi na działania. Można by powiedzieć, że tworzy się pewne liczby, przedstawiając je przy pomocy odnośnych wzorów, a następnie wykazuje iż posiadają żądane własności. Przy tym postępowaniu nie wychodzi się poza rozważany zakres liczb. Wskazanie zatem odnośnej liczby polega na przedstawieniu jej w postaci, z której da się wywnioskować tezę twierdzenia.

Z podobną sytuacją mamy do czynienia w przypadku II grupy twierdzeń. Składa się ona z pięciu twierdzeń mających analogiczne wysłowienie. Orzeka się w nich o istnieniu najmniejszego obiektu o pewnej własności. Ten najmniejszy obiekt otrzymuje się biorąc część wspólną obiektów o rozważanej własności, a więc obiektów będących ciałami, pierścieniami, przestrzeniami liniowymi, ideałami, grupami. Istnienie najmniejszego obiektu wynika z istnienia części wspólnej odnośnych zbiorów. Operacja wzięcia części wspólnej jest pewnym działaniem, które w oczach matematyka prowadzi od obiektów istniejących do nowych obiektów również istniejących. Można więc powiedzieć, że tutaj także wskazuje się odnośny obiekt przez wykonanie pewnego szeregu działań na obiektach już istniejących. To wskazanie polega na przedstawieniu go w postaci, z której daje się wywnioskować rozważane twierdzenie. Ideowo rzecz biorąc mamy więc postępowanie takie, jak w poprzedniej grupie twierdzeń. Różnica polega na tym, że w grupie I rozważa się liczby, w grupie II zaś zbiory o pewnej własności i konsekwentnie w przypadku pierwszym występują zwykłe działania na liczbach (choć nie muszą to być zawsze działania arytmetyczne), zaś w drugim abstrakcyjne działania mnogościowe. Zauważmy także, że w przypadku II grupy twierdzeń nie wychodzimy również poza zakres rozważanych zbiorów. Koncentrujemy jedynie swą uwagę na zbiorach posiadających interesujące nas własności.

Rozważmy teraz grupę III twierdzeń. Zawiera ona trzy twierdzenia, z których dwa (twierdzenie 8 oraz 9) mają analogiczne sformułowania, zaś twierdzenie ostatnie (twierdzenie 10) nieco od nich odbiega orzekając zachodzenie izomorfizmu pomiędzy pewnymi obiektami. W każdym ze wspomnianych twierdzeń głosi się istnienie odpowiedniego przekształcenia; jest nim bądź homomorfizm, bądź izomorfizm. Można więc by sądzić, że chodzi tu tylko i jedynie o istnienie pewnych przekształceń, czyli funkcji. A funkcja to zbiór par uporządkowanych; zatem sytuacja zdaje się być podobna do sytuacji wcześniejszych, z którymi mieliśmy do czynienia w przypadku dwu pierwszych grup twierdzeń. Tak można by sądzić poprzestając na powierzchownym ujęciu samego sformułowania twierdzeń grupy III. Jeżeli jednak przyjrzeć się dowodom rozważanych twierdzeń, to zauważamy że orzekanie istnienia odnośnych homomorfizmów jest równoważne przyjęciu istnienia obiektów o wyższym poziomie abstrakcji. Nieco konkretniej. Twierdzenie 8 jest równoważne skonstruowaniu tzw. pierścienia ilorazowego, zaś twierdzenie 9 skonstruowaniu tzw. grupy ilorazowej z jednoczesnym przyjęciem ich istnienia. Można więc powiedzieć, że dyskutowane twierdzenia głoszą istnienie pierścienia ilorazowego oraz istnienie grupy ilorazowej. Każdy zaś z tych obiektów jest zbiorem pewnych zbiorów, a więc tworem o niewątpliwie wyższym poziomie abstrakcji w porównaniu do tworów wyjściowych. Elementami grupy ilorazowej (żeby pozostać tylko przy tym przykładzie) są tzw. warstwy, czyli odpowiednie podzbiory grupy wyjściowej. Na warstwach tych określa się działanie grupowe oraz wykazuje, że zbiór warstw z określonym na nim działaniem tworzy grupę. Działanie grupowe jest więc tu wykonywane nie na elementach grupy wyjściowej, lecz na warstwach, czyli na zbiorach elementów grupy wyjściowej. Twierdzenie 10, z interesującego nas punktu widzenia, nie wnosi istotnie czegoś nowego. Orzeka ono bowiem zachodzenie izomorfizmu między dwoma modułami ilorazowymi. W istocie rzeczy odnosi się ono do tych modułów, a więc zakłada ich istnienie. Moduł ilorazowy zaś jest obiektem konstruowanym analogicznie do grupy ilorazowej, czy też pierścienia ilorazowego. Przechodzi się więc także na wyższy poziom abstrakcji w porównaniu do modułu wyjściowego.

W III grupie twierdzeń orzekanie istnienia odnośnego obiektu polega więc na skonstruowaniu go przez utworzenie przedmiotu bardziej abstrakcyjnego w porównaniu do przedmiotów wyjściowych. Ujmując rzecz od strony logicznej będzie to utworzenie klas abstrakcji pewnej relacji równoważności z przyjęciem jednoczesnym ich istnienia, albo jeszcze dokładniej: z przyjęciem istnienia obiektu będącego zbiorem wspomnianych klas abstrakcji.

Podsumowując wyniki przeprowadzonych analiz możemy powiedzieć, że *dla matematyka istnieć* znaczy bądź *wskazać obiekt* (zwykle przy pomocy prostych operacji), bądź też *skonstruować obiekt* (przez przejście do wyższego poziomu abstrakcji). Z sytuacją pierwszą mamy do czynienia w przypadku grupy I oraz II twierdzeń, zaś z sytuacją drugą w przypadku III grupy twierdzeń.

Powiedziane wyżej należy rozumieć w sensie niewyłączającym. I to nawet tylko w odniesieniu do algebry. Znaczy to, że nie wykluczamy, aby nie były możliwe inne jeszcze sposoby rozumienia terminu istnienie w algebrze. Stwierdzamy jedynie, że wymienione dwa znaczenia słowa istnieć funkcjonują w algebrze. Algebra jest działem matematyki rozwijającym się ogromnie. Toteż żadne prognozy nie mogą być traktowane poważnie. Osiągnięcia algebraiczne przekraczają wyobraźnię budząc podziw swymi wynikami. Wydaje się, że odnosić to można także do poszerzania terminu istnieć w algebrze.

Zwróćmy uwagę na to, że niekiedy formułuje się twierdzenia algebraiczne w taki sposób, który wywołuje wrażenie, że termin istnieć zdaje się być zbędny, aczkolwiek chodzi, mówiąc naszym językiem, o twierdzenia o istnieniu. Jest to jednak pozorne obywanie się bez interesującego nas terminu. Zamiast niego używa się terminu z nim zamiennego. Kiedy więc czyta się, że „w dowolnej grupie równania xa=b oraz ay=b mają jednoznaczne rozwiązania", znaczy to oczywiście, że istnieją rozwiązania wspomnianych równań[4]. Jest zrozumiałe, że nie sugerujemy się samymi sformułowaniami czysto językowymi. Chodzi zawsze o meritum sprawy.

Niezależnie od sposobu redagowania twierdzeń w których orzeka się o istnieniu pewnych obiektów, jest rzeczą niewątpliwą, że w matematyce, w szczególności w algebrze, mówi się o istnieniu całego szeregu obiektów. Matematyk, względnie algebraik, ma do czynienia z tworami, które w jego rozumieniu istnieją, nad którymi dokonuje różnych operacji, o których dowodzi różnych własności, które bywają wykorzystywane do opisywania, a także tłumaczenia, zjawisk zachodzących w otaczającym nas świecie.

Bywa również tak, że chociaż sformułowanie twierdzenia obywa się bez terminu istnienie, to występuje on w dowodzie. Czytelnik interesujący się sygnalizowanymi tu szczegółami znajdzie łatwo ilustrację w książkach cytowanych w przypisku 3.

Zanotujmy jeszcze, że w matematyce występują również twierdzenia o nieistnieniu[5]. Problematyka ta jest powiązana z negatywnymi rozwiązaniami pewnych zagadnień. Te zaś prowadzą do wzbogacania i poszerzania dziedziny rozważań matematycznych. Sygnalizujemy tylko tę bogatą i złożną problematykę bez wchodzenia w szczegóły. Problem wart jest oddzielnego rozważenia.

Rozważaliśmy sens terminu istnieć w algebrze. Co ma na myśli algebraik kiedy mówi, że dany obiekt istnieje. Doszliśmy do wniosku, że znaczy to jedną z dwu rzeczy: albo wskazuje dany obiekt wśród obiektów istniejących, albo konstruuje go drogą przechodzenia do wyższego poziomu abstrakcji. W tym drugim przypadku zakłada się, iż wspomniane przejście do wyższego poziomu abstrakcji pozostawia nas w zakresie tworów matematycznie istniejących. Stykamy się tu z pewną postacią postulowania istnienia tworów wyższego typu abstrakcyjnego.

Otwarty pozostaje problem charakteru istnienia obiektów matematycznych. Nie należy sądzić, że sposób istnienia w matematyce musi być jeden. Wydaje się, że obecne rozważanie łącznie z dalszymi podobnego rodzaju może rzucić nieco światła na interesujący nas problem, a przynajmniej pozwoli usystematyzować typy istnienia w matematyce stanowiąc podstawę do dalszych analiz.

ANNA NAWROCKA

TEOANTROPOCENTRYZM ETYKI AMBROŻEGO

1. Przesłanki polityczne i ideologiczne powstania działa Ambrożego *De officiis ministrorum*. 2. Ethos chrześcijanina w ujęciu Ambrożego. 3. Rola Kościoła w kształtowaniu świadomości moralnej jednostki

[4] G. Birkhoff i S. Mac Lane, dz. cyt., 141.

[5] Szerzej piszę o tym w artykule *Zagadnienie istnienia twierdzeń o istnieniu i nieistnieniu*, Zagadnienia filozoficzne w nauce 3 (1981), 62—72.