Mieczysław Lubański

Zagadndenie istnienia w matematyce, II

Studia Philosophiae Christianae 20/1, 147-154

1984

walczących o teologię lepiej zakorzenioną w Piśmie św. (np. Erazma) zniechęciły do metody i tradycji scholastycznej. Przeważa stopniowo historyczna konkretna teologia Opatrzności czyli wszechmocy bożej działającej jako *potentia ordinata*. Tylko człowiek nadaje się do tego, by w jednej Osobie Logosu złączyć się z Bogiem, twierdzi Pico della Mirandola idąc w ślad Tomasza z Akwinu. Taki jest, można sądzić z ostatniego zdania omawianego tomu, kres piętnastowiecznych poszukiwań dróg dojścia do Boga.

MIECZYSŁAW LUBAŃSKI

ZAGADNIENIE ISTNIENIA W MATEMATYCE, II

W pierwszej części poświęconej sygnalizowanemu w tytule zagadnieniu [1] tło rozważań stanowiła algebra. Obecnie będzie nim geometria. Weźmiemy pod uwagę te wypowiedzi z zakresu geometrii, w których jest mowa o istnieniu; będą nimi aksjomaty oraz twierdzenia. Przyjrzyjmy się najpierw aksjomatom geometrii, w których postuluje się istnienie pewnych obiektów, następnie twierdzeniom, w których explicite mówi się o istnieniu, wreszcie zwrócimy uwagę na twierdzenia mówiące o istnieniu implicite. Zobaczymy co da się powiedzieć na interesujący nas temat na podstawie analizy wymienionych sformułowań występujących w geometrii.

Z metodologicznego punktu widzenia aksjomaty stanowią fundament teorii. Z tej racji wystarczyłoby w zasadzie ograniczyć się do nich. Jednakże analiza dowodów twierdzeń, w których jest mowa o istnieniu pewnych obiektów, wydaje się prowadzić do interesujących wniosków; toteż nie będzie rzeczą niecelową zajęcie się także twierdzeniami geometrii.

Istnieje wiele monografii poświęconych wykładowi geometrii. Za podstawę analiz weźmiemy głównie jedną z nowszych książek z tej dziedziny [2]. W razie potrzeby skorzystamy również z innych pozycji. W rozważaniach ograniczymy się do *geometrii absolutnej*. Pomijamy geometrię rzutową, gdyż z interesującego nas punktu widzenia aksjomatyka tej ostatniej nie wnosi niczego istotnie nowego w porównaniu do aksjomatyki geometrii absolutnej. Wskazane natomiast będzie dopełnienie analiz uwagą w odniesieniu do geometrii euklidesowej oraz geometrii Bolyai-Łobaczewskiego.

Zamiennie posługujemy się zwrotami: „punkt p leży na prostej L" oraz „prosta L przechodzi przez punkt p", jak również: „punkt p leży na płaszczyźnie P" oraz „płaszczyzna P przechodzi przez punkt p". Podobnie postępujemy w przypadku większej liczby punktów.

Trzy punkty przestrzeni nazywa się współliniowymi, jeżeli istnieje prosta przez nie przechodząca; podobnie cztery punkty zwie się współpłaszczyznowymi, jeżeli istnieje płaszczyzna przez nie przechodząca. W przypadku przeciwnym trójka punktów nazywa się niewspółliniową, zaś czwórka punktów — niewspółpłaszczyznową.

---

[1] Studia Philosophiae Christianae 19 (1983) 2.

[2] K. Borsuk i W. Szmielew, *Podstawy geometrii*, Wydanie nowe, Warszawa 1970. Pozycję tę będziemy krótko oznaczać symbolem PG.

Przypomnijmy najpierw pojęcia pierwotne gometrii. Są nimi punkty, proste, płaszczyzny oraz dwie relacje zachodzące między punktami. Zbiór punktów zwie się zwykle przestrzenią; oznaczać ją będziemy literą S. Proste oraz płaszczyzny są podzbiorami przestrzeni S; oznaczać je będziemy, odpowiednio, literami L oraz P. Wspomnianymi relacjami są trójargumentowa relacja „leżenia między" oraz czteroargumentowa relacja „równej odległości".

Przejdziemy obecnie do analizy aksjomatów geometrii absolutnej. Rozpoczniemy od aksjomatów incydencji. Uczynimy to w dwu etapach, wyróżniając aksjomaty geometrii płaskiej oraz geometrii przestrzennej. Przyjmuje się cztery aksjomaty incydencji geometrii płaskiej [3]. Można im nadać następującą postać:

(1) *Dla dowolnej prostej istnieją dwa różne punkty, które na niej leżą.*

(2) *Dla dowolnych dwu punktów istnieje co najmniej jedna prosta, która przez nie przechodzi.*

(3) *Jeżeli dane są dwa różne punkty, to istnieje co najwyżej jedna prosta, która przez nie przechodzi.*

(4) *Dla dowolnej płaszczyzny istnieją trzy niewspółliniowe punkty, które na niej leżą.*

Aksjomaty te w sposób wyraźny mówią o istnieniu pewnych punktów i pewnych prostych. Ponieważ interesuje nas znaczenie terminu „istnieć", przeto dokonamy przeredagowania aksjomatów, aby móc łatwiej wniknąć w treść rozważanego terminu. Powyższym aksjomatom można nadać postać okresu warunkowego. Przypuśćmy, że nowa redakcja ma postać następującą:

(1') *Jeżeli dana jest dowolna prosta, to istnieją na niej dwa różne punkty.*

(2') *Jeżeli dane są dwa punkty, to istnieje co najmniej jedna prosta przez nie przechodząca.*

(3') *Jeżeli dane są dwa różne punkty, to istnieje co najwyżej jedna prosta przez nie przechodząca.*

(4') *Jeżeli dana jest dowolna płaszczyzna, to istnieją na niej trzy niewspółliniowe punkty.*

Przyjmując powyższą redakcję aksjomatów zauważamy natychmiast, że aksjomaty wychodzą z założenia, że dane są pewne obiekty, mianowicie, że dana jest prosta, dane są punkty, dana jest płaszczyzna. Przy wymienionym założeniu orzekają one o istnieniu punktów, prostych, względnie prostej. Ale co to znaczy, że dana jest prosta, że dana jest płaszczyzna, że dane są punkty? Znaczy to nic innego, jak tylko to, że istnieje prosta, że istnieje płaszczyzna, że istnieją pewne punkty. A więc aksjomaty powyższe orzekają o istnieniu pewnych obiektów pod warunkiem przyjęcia istnienia innych obiektów. Aksjomaty te mogą więc zostać nazwane *relatywnymi aksjomatami istnienia.*

Rozważymy teraz aksjomaty incydencji geometrii przestrzennej [4]. Bywają one formułowane następująco:

(5) *Dla trzech dowolnych punktów istnieje co najmniej jedna płaszczyzna przez nie przechodząca.*

---

[3] PG 28—29.

[4] PG 29.

(6) *Jeżeli dane są trzy punkty niewspółliniowe, to istnieje co najwyżej jedna płaszczyzna przez nie przechodząca.*

(7) *Dla dowolnej prostej i dla dowolnej płaszczyzny, jeśli istnieją dwa różne punkty leżące zarówno na danej prostej i danej płaszczyźnie, to dana prosta leży na danej płaszczyźnie.*

(8) *Dla dowolnych dwu płaszczyzn, jeżeli istnieje punkt leżący jednocześnie na jednej i drugiej płaszczyźnie, to istnieje inny punkt różny od tamtego, który także leży na obu płaszczyznach jednocześnie.*

(9) *Istnieją cztery niewspółpłaszczyznowe punkty.*

Pierwsze cztery aksjomaty dają się przeredagować do postaci okresu warunkowego (ściśle biorąc wystarczy to uczynić tylko w odniesieniu do trzech z nich, bowiem aksjomat (6) już taką postać posiada). Przyjmijmy, że wspomniana redakcja przedstawia się następująco:

(5′) *Jeżeli dane są trzy dowolne punkty, to istnieje co najmniej jedna płaszczyzna przez nie przechodząca.*

(6′) = (6)

(7′) *Jeżeli dana jest dowolna prosta i dana jest dowolna płaszczyzna i jeżeli istnieją dwa różne punkty leżące zarówno na danej prostej i danej płaszczyźnie, to dana prosta leży na danej płaszczyźnie.*

(8′) *Jeżeli dane są dwie dowolne płaszczyzny i jeżeli istnieje punkt leżący na obu płaszczyznach jednocześnie, to istnieje także drugi punkt różny od pierwszego, który także leży na obu płaszczyznach jednocześnie.*

W odniesieniu do aksjomatu (9) nowa redakcja jest zbędna.

Aksjomaty (5′), (6′), i (8′) głoszą istnienie pewnych tworów geometrycznych pod warunkiem istnienia innych tworów. Aksjomat (7′) orzeka o relacji zachodzącej między prostą i płaszczyzną w przypadku istnienia na prostej i na płaszczyźnie dwu punktów wspólnych. Aksjomat ten, z interesującego nas punktu widzenia, nie wnosi nic nowego do meritum sprawy. Toteż zostanie pominięty w dalszych rozważaniach. Aksjomaty (5′), (6′) i (8′) mogą zostać nazwane, podobnie jak cztery aksjomaty incydencji dla geometrii płaskiej, relatywnymi aksjomatami istnienia.

Aksjomat (9) jest, pod rozważanym względem, odmienny od pozostałych aksjomatów. Orzeka wprost istnienie czterech niewspółpłaszczyznowych punktów. Głosi więc nie tylko, że istnieją cztery różne punkty, ale iż punkty te nie leżą w jednej płaszczyźnie. Mamy tu więc do czynienia zarówno ze stwierdzeniem istnienia czterech punktów, jak też orzeczeniem pewnej własności im przysługującej. Aksjomat ten może więc zostać nazwany *bezwzględnym aksjomatem istnienia.*

Widzieliśmy przed chwilą, że nie wszystkie aksjomaty incydencji geometrii przestrzennej są wypowiedziami o istnieniu pewnych obiektów geometrycznych. Podobna sytuacja zachodzi w odniesieniu do drugiej grupy aksjomatów, mianowicie aksjomatów uporządkowania. Mówiąc nieco dokładniej dwa tylko aksjomaty uporządkowania postulują istnienie pewnych obiektów geometrycznych. Należą one do grupy tzw. liniowych aksjomatów uporządkowania. Mogą one zostać sformułowane następująco [5]:

(10) *Jeżeli punkty a oraz b są różne, to istnieje punkt c taki, że punkt b leży między punktami a oraz c.*

[5] PG 33.

(11) *Jeżeli punkty a oraz b są różne, to istnieje punkt c leżący między punktami a oraz b.*

Aksjomaty powyższe wyraźnie stwierdzają, przy założeniu istnienia dwu różnych punktów, istnienie dalszego, trzeciego punktu posiadającego określoną własność. Przy postulowanym tu istnieniu mamy do czynienia z pewnego rodzaju jednorodnością. Chodzi mianowicie o to, że wspomniane postulowanie odnosi się do tej samej kategorii tworów geometrycznych, do punktów. We wcześniejszych ośmiu aksjomatach mieliśmy do czynienia ze związkami między tworami geometrycznymi należącymi do różnych kategorii; były to punkty, proste, płaszczyzny.

Sformułowanie aksjomatów (10) i (11) sugeruje, że mogą one zostać nazwane relatywnymi aksjomatami istnienia. Trzeba jednakże zwrócić uwagę na to, że relatywność tych aksjomatów nie jest identyczna z relatywnością wcześniej rozważanych aksjomatów. Przyjmując dziewięć pierwszych aksjomatów nie jesteśmy zmuszeni wyjść poza postulowane w pewniku (9) istnienie czterech punktów niewspółpłaszczyznowych. Te cztery punkty niewspółpłaszczyznowe można interpretować jako cztery dowolne przedmioty i nazywać je punktami, każdą parę tych przedmiotów — prostą, każdą trójkę — płaszczyzną. Zauważymy bez trudności, że przy zaproponowanej tu interpretacji dziewięć pierwszych aksjomatów będzie spełnionych. Gdy idzie zaś o aksjomaty (10) i (11), to wymagają one poszerzenia, nazwijmy je, ontycznego tworów geometrycznych. Przyjęcie tych aksjomatów powoduje, że ilość punktów przestrzeni *S* wzrasta nieograniczenie. Każde zastosowanie aksjomatu (10) i aksjomatu (11) do dwu różnych punktów powiększa o jeden punkt ilość punktów już istniejących na prostej wyznaczonej przez dwa wzięte początkowo punkty. Przeto wśród aksjomatów relatywnych istnienia należy wyróżnić dwie grupy: *relatywne aksjomaty istnienia w znaczeniu słabym* oraz *relatywne aksjomaty istnienia w znaczeniu mocnym.* Do tych ostatnich zaliczymy aksjomaty (10) i (11), pozostałe natomiast aksjomaty — do relatywnych aksjomatów w znaczeniu słabym.

Uzasadnieniem dokonanego przed chwilą wyróżnienia dwu rodzajów relatywnych aksjomatów istnienia mogą służyć twierdzenia o istnieniu. Jeżeli wnioskujemy wychodząc jedynie z dziewięciu pierwszych aksjomatów, to dają się udowodnić następujące twierdzenia [6]:

(T1) *Dla dowolnego punktu p leżącego na prostej L istnieje różny od niego punkt q również leżący na prostej L.*

(T2) *Dla dowolnych dwu różnych punktów p oraz q leżących na płaszczyźnie P istnieje niewspółliniowy z nimi punkt r również leżący na płaszczyźnie P.*

(T3) *Dla dowolnych trzech niewspółliniowych punktów p, q oraz r istnieje niewspółpłaszczyznowy z nimi punkt s.*

Twierdzenia te będą spełnione w podanej nieco wyżej interpretacji, a więc przez układ dowolnych czterech przedmiotów, które zwać będziemy punktami niewspółpłaszczyznowymi, zaś przez prostą, względnie płaszczyznę, rozumieć się będzie parę, względnie trójkę, danych przedmiotów.

Jeżeli natomiast dołączymy liniowe aksjomaty uporządkowania, to można udowodnić zachodzenie następującego twierdzenia [7]:

---

[6] PG 31.

[7] PG 34.

(T4) *Odcinek prostej jest zbiorem nieskończonym*, czyli zawiera nieskończenie wiele punktów.

Analogiczne twierdzenie zachodzi dla prostej, płaszczyzny i całej przestrzeni S. Przyjęcie zatem aksjomatów (10) oraz (11), gdyż one to interweniują przy dowodzie twierdzenia (T4) i jego analogonów dla prostej, płaszczyzny oraz całej przestrzeni S spośród liniowych aksjomatów uporządkowania, w sposób widoczny poszerza moc zbioru punktów przestrzeni. Układ czterech punktów niewspółpłaszczyznowych nie będzie w tym przypadku stanowił interpretacji dla wszystkich aksjomatów łącznie, a więc zarówno dla aksjomatów incydencji, jak i aksjomatów uporządkowania. Mamy tu przeto do czynienia ze zwiększeniem mocy zbioru S w porównaniu do mocy tegoż zbioru w przypadku zakładania tylko aksjomatów incydencji.

Trzecia grupa aksjomatów, zwana aksjomatami przystawania, podaje związki zachodzące w odniesieniu do odległości między różnymi punktami. Dwa spośród wspomnianej grupy postulują istnienie w odsieniu do punktów. Można je wypowiedzieć następująco [8]:

(12) *Dla dowolnej półprostej A o początku w punkcie a i dla dowolnego odcinka pq istnieje dokładnie jeden punkt b leżący na półprostej A taki, że odcinek ab jest przystający do odcinka pq.*

(13) *Niech dana będzie półpłaszczyzna W o brzegu K, odcinek ab położony w K oraz trójkąt pqr. Jeżeli odcinki ab oraz pq przystają do siebie, to wówczas istnieje dokładnie jeden punkt c leżący w półpłaszczyźnie W taki, że odcinek ac przystaje do odcinka pr oraz odcinek bc przystaje do odcinka qr.*

Nie będziemy przeredagowywać tych aksjomatów, aby otrzymać wyraźną postać implikacyjną. Bez większej trudności widać, że aksjomaty te należy zaliczyć do relatywnych aksjomatów istnienia w znaczeniu mocnym. Postulują bowiem istnienie nowych punktów wskazując zarazem na strukturę przestrzeni S. Można powiedzieć, że mówią one o pewnego rodzaju jednorodności przestrzeni, pozwalają bowiem dokonywać przesunięć przy zachowaniu przystawania odnośnych odcinków do siebie.

Do ostatniej, czwartej grupy aksjomatów należy tylko jeden aksjomat zwany aksjomatem ciągłości. Może on być wypowiedziany następująco [9]:

(14) *Niech dane będą dwa niepuste zbiory punktów X oraz Y. Jeżeli istnieje punkt a taki, że z przynależności punktu p do zbioru X oraz przynależności punktu q do zbioru Y wynika, że punkt p leży między punktami a oraz q, to istnieje punkt b taki, że z przynależności punktu p do zbioru X—b oraz przynależności punktu q do zbioru Y—b wynika, że punkt b leży między punktami p oraz q.*

Aksjomat ten, jak nie trudno zauważyć, należy zaliczyć do relatywnych aksjomatów istnienia w znaczeniu mocnym. Jego konsekwencją jest przyjęcie istnienia nowych, dalszych punktów w przestrzeni S, podobnie jak to ma miejsce w czterech ostatnich aksjomatach, wraz z nadaniem przestrzeni S struktury spójnej.

Korzystając z aksjomatu ciągłości można wykazać, że [10]:

---

[8] PG 81.

[9] PG 140. Por. także: D. Hilbert i S. Cohn-Vossen, *Geometria poglądowa*, Warszawa 1956, 220, gdzie znajduje się bardziej intuicyjnie ujęty aksjomat ciągłości.

[10] PG 141.

(T5) *Każdy odcinek jest zbiorem spójnym.*

Do chwili obecnej rozważyliśmy aksjomaty geometrii absolutnej postulujące istnienie pewnych obiektów geometrycznych. Wyróżniliśmy wśród nich jeden aksjomat bezwzględny oraz szereg relatywnych aksjomatów istnienia. Wśród tych ostatnich odróżniliśmy dwie jeszcze grupy: relatywne aksjomaty w znaczeniu słabym oraz relatywne aksjomaty w znaczeniu mocnym. Nadto podaliśmy kilka prostych twierdzeń będących konsekwencjami pewnych grup aksjomatów. Twierdzenia (T1), (T2) oraz (T3) dowodzi się na podstawie aksjomatów incydencji. Aczkolwiek twierdzenia te mówią o istnieniu, to rzecz ściśle biorąc nie mówią one niczego więcej niż aksjomaty incydencji. Nie wymagają większej liczby punktów od 4 dla swej prawdziwości. Można je nazwać słabymi twierdzeniami o istnieniu. Twierdzenia (T4) oraz (T5), w odróżnieniu od poprzednich, mogą zostać nazwane mocnymi twierdzeniami o istnieniu. Nic w tym dziwnego. Ich dowody wspierają się na relatywnych aksjomatach istnienia w znaczeniu mocnym. Aksjomaty te, jak sygnalizowaliśmy, postulują powiększenie liczby elementów przestrzeni S, jak też ustanawiają pewną strukturę przestrzeni.

Zanotujmy jeszcze kilka twierdzeń orzekających istnienie pewnych obiektów geometrycznych. Twierdzenia te traktujemy jako ilustrację wypowiedzi geometrycznych o istnieniu. Poprzestajemy na sformułowaniach podręcznikowych. Nie będziemy ich przeredagowywać tak, aby zawsze miały taką postać, w której termin „istnieje" występowałby explicite. Wydaje się to zbędne, gdyż sformułowania podręcznikowe są dostatecznie wyraźne. Oto prostsze ze wspomnianych twierdzeń [11]:

(T6) *Dowolny odcinek ma dokładnie jeden środek.*

(T7) *Dowolny kąt ma dokładnie jedną dwusieczną.*

(T9) *Dana jest płaszczyzna P i punkt a. Istnieje dokładnie jedna prosta K przechodząca przez punkt a i prostopadła do płaszczyzny P.*

(T10) *Przestrzeń S jest mocy continuum*

Analiza dowodów twierdzeń o istnieniu (zacytowanych wyżej, jak również wszystkich innych, występujących w wykładzie geometrii) pozwala sformułować wniosek następujący. *Istnieć w geometrii znaczy bądź wskazywać obiekt o określonej własności, bądź też postulować istnienie obiektu o danej własności.* Pryncypialnie odnosi się to do punktów. Dysponując dostatecznie obszernym zbiorem punktów można wyróżniać podzbiory o pewnych, niesprzecznych własnościach. Każda figura geometryczna przecież to nic innego, jak określony zbiór punktów. Spełnia on pewne warunki i tylko on te warunki spełnia. Należy dodać, że w geometrii nic się nie mówi co znaczy istnieć, a więc co znaczy, że istnieje punkt, prosta, czy też dowolna jakaś figura. Rozważanie „natury" istnienia jest problemem pozageometrycznym.

Dla uniknięcia ewentualnego nieporozumienia dodajmy, że zwrot „wskazywać obiekt o określonej własności" należy rozumieć możliwie szeroko. Wspomniane „wskazywanie" może polegać (i zwykle tak bywa) na wykonaniu szeregu konstrukcji dozwolonych na podstawie przyjętych aksjomatów i prowadzących do rozważanego obiektu.

W geometrii absolutnej definiuje się *prostokąt* jako *płaski czworokąt abcd, którego wszystkie kąty są proste* [12]. Można także wykazać, że zachodzą następujące twierdzenia:

[11] PG 93, 94, 116, 126, 174.

[12] PG 122—123.

(T11) *Jeżeli czworokąt abcd jest prostokątem, to bok ab przystaje do boku cd.*

(T12) *Jeżeli czworokąt abcd jest prostokątem, zaś punkty e oraz f spełniają warunki:*

a) *punkt d leży między punktami a oraz e,*
b) *punkt c leży między punktami b oraz f,*
c) *odcinek ad przystaje do odcinka ed,*
d) *odcinek bc przystaje do odcinka fc,*

to czworokąt efcd jest także prostokątem.

Zwróćmy uwagę na to, że powyższe twierdzenia nie pociągają za sobą istnienia prostokąta. W geometrii absolutnej można mówić tylko o pojęciu prostokąta, a także dowodzić pewnych własności jemu przysługujących. Nie można natomiast wykazać istnienia prostokąta.

Przypuśćmy teraz, że przyjęliśmy jeden jeszcze dalszy aksjomat następującej treści[13]:

(15) *Dla dowolnej płaszczyzny P, dowolnej prostej L położonej w płaszczyźnie P oraz dowolnego punktu a leżącego w P-L istnieje co najwyżej jedna prosta K położona w płaszczyźnie P przechodząca przez punkt a oraz rozłączna z prostą L.*

Teoria oparta na wszystkich aksjomatach geometrii absolutnej oraz na aksjomacie (15) zwie się geometrią euklidesową.

Okazuje się, że w geometrii euklidesowej można wykazać istnienie prostokąta. Co więcej, teza „istnieje prostokąt" jest równoważna aksjomatowi (15). Jest to fakt dobrze znany. Sygnalizuje on konieczność odróżniania posiadania jakiegoś pojęcia od zagadnienia istnienia jego desygnatu (w rozważanej dziedzinie). Innymi słowy sygnalizuje potrzebę odróżnienia syntaktyki oraz semantyki.

Z powyższych uwag wydaje się płynąć wniosek głoszący, że aksjomat (15) może zostać nazwany aksjomatem istnienia w odniesieniu do struktury przestrzeni. Aksjomat ten nie zwiększa ilości punktów, które zawiera przestrzeń geometryczna, orzeka natomiast o jej strukturze głosząc, za pośrednictwem wniosku zeń płynącego, istnienie w przestrzeni prostokątów.

Rozważmy jeszcze zdanie następujące[14]:

(16) *Dla pewnej płaszczyzny P, pewnej prostej L położonej w płaszczyźnie P oraz pewnego punktu a leżącego w P-L istnieją co najmniej dwie różne proste J oraz K położone w płaszczyźnie P przechodzące przez punkt a oraz rozłączne z prostą L.*

Jeżeli do aksjomatów geometrii absolutnej dołączymy zdanie (16) jako nowy aksjomat, to otrzymamy aksjomatykę geometrii Bolyai-Łobaczewskiego. W geometrii tej zachodzi następujące twierdzenie:

(T13) *Żaden czworokąt nie jest prostokątem.*

Innymi słowy w geometrii Bolyai-Łobaczewskiego można wykazać, że prostokąty nie istnieją. Wydaje się, że fakt ten jest interesujący metodologicznie. Możliwe są twierdzenia o nieistnieniu.

Aksjomatowi (16) można przypisać ten sam charakter, co aksjomatowi (15). Może on być nazwany aksjomatem istnienia w odniesieniu do struktury przestrzeni.

Zauważmy jeszcze, że zdania (15) oraz (16) wykluczają się wzajemnie. Każde z nich jest zaprzeczeniem drugiego. Toteż nic dziwne-

[13] PG 180.
[14] Tamże.

go, że w odniesieniu do zagadnienia istnienia prostokąta geometria euklidesowa oraz geometria Bolyai-Łobaczewskiego dają przeciwne względem siebie rozwiązania.

Jest rzeczą dobrze znaną, że w geometrii euklidesowej dowolny odcinek można mierzyć przy pomocy każdego innego odcinka. Innymi słowy w geometrii euklidesowej nie istnieje wyróżniona naturalna jednostka długości. Za jednostkę długości można przyjąć dowolny odcinek.

Warto w tym miejscu przypomnieć, że sytuacja ta inaczej wygląda w geometrii Bolyai-Łobaczewskiego. Tutaj istnieje naturalna jednostka długości [15]. Fakt ten wydaje się być interesujący zarówno od strony merytorycznej, jak też metodologicznej oraz filozoficznej.

Podsumujmy: przeprowadzona przez nas analiza aksjomatów (oraz twierdzeń) geometrii zarówno absolutnej, jak również euklidesowej i Bolyai-Łobaczewskiego, pozwoliła wyróżnić absolutne aksjomaty istnienia oraz relatywne aksjomaty istnienia; wśród tych ostatnich można mówić o relatywnych aksjomatach istnienia w znaczeniu słabym oraz w znaczeniu mocnym; nadto wskazane okazuje się wyróżnienie jeszcze aksjomatów istnienia odnośnie do struktury przestrzeni.

Dodajmy, że żaden aksjomat nie orzeka nic odnośnie do „natury" istnienia. Zakłada się istnienie pewnych obiektów bez wchodzenia w to, co ten termin oznacza. Najbardziej jest to widoczne w stosunku do punktów, a więc, nazwijmy to tak, elemenów bazowych rozważanej przestrzeni.

KAZIMIERZ SZAŁATA

RECEPCJA ARYSTOTELESA W KULTURZE EUROPEJSKIEJ JAKO WSTĘP DO ARYSTOTELIZMU POLSKIEGO ODRODZENIA WEDŁUG WIKTORA WĄSIKA

Wstęp, 1. Koncepcja historii filozofii stosowana przez W. Wąsika w badaniach nad dziejami arystotelizmu, 2. Dzieje tekstów Arystotelesa. Przekłady, 3. Twórczość komentątorów, Historia *Problematów*, 4. Zakończenie.

WSTĘP

Filozofia, jako nauka stawiająca sobie za cel poznanie realnej rzeczywistości, jest podstawową dziedziną kultury rozumianej, jako zespół dzieł i dziedzin ludzkiego myślenia utrwalonego w wytworach, do których należą między innymi teorie naukowe. Stąd w badaniach nad kulturą umysłową różnych epok ważne miejsce zajmuje historia filozofii. Być może dlatego właśnie autor, którego poglądami zamierzamy się zająć — Wiktor Wąsik [1] interesując się różnymi dziedzinami

---

[15] PG 242.

[1] Wiktor Wąsik urodził się 23 grudnia 1883 roku w Warszawie. Studiował na Uniwersytecie Warszawskim oraz w Wiedniu i Krakowie, gdzie na podstawie rozprawy pisanej pod kierunkiem Stefana Pawlickiego *Kategorie Arystotelesa pod względem historycznym i sy-*