Tadeusz Boncler

Uwaga w sprawie wielkiego twierdzenia Fermata

Studia Philosophiae Christianae 20/2, 179-181

1984

Studia Philosophiae Christianae
ATK
20(1984)2

TADEUSZ BONCLER

UWAGA W SPRAWIE WIELKIEGO TWIERDZENIA FERMATA

Wielkie twierdzenie Fermata, zwane także ostatnim twierdzeniem Fermata, jest interesującym zjawiskiem w historii myśli naukowej. Postawione przed 300 laty do chwili obecnej nie doczekało się definitywnego rozwiązania. Nie znaleziono ogólnego dowodu, ale także nie podano żadnego kontrprzykładu. Twierdzenie to wskazuje zarazem na wyjątkową intuicję matematyczną, którą był obdarzony Pierre Fermat (1601—1665). Jest więc ono interesujące z metodologicznego punktu widzenia, wkracza również w dziedzinę psychologii twórczości naukowej, do historii nauki weszło na stałe.

Wielkie twierdzenie Fermata należy do zagadnień z zakresu teorii liczb, która zajmuje się badaniem własności liczb całkowitych. Przez liczby całkowite rozumie się liczby ciągu: O, +1, —1, +2, —2, ... Liczby całkowite dodatnie zwie się liczbami naturalnymi.

Równaniem Pitagorasa nazywa się równanie postaci $x^2+y^2=z^2$. Teorię liczb interesują rozwiązania tego równania w liczbach naturalnych. Jest rzeczą znaną, że istnieje nieskończenie wiele rozwiązań równania Pitagorasa w liczbach naturalnych x,y,z takich, że x oraz y są kolejnymi liczbami [1].

Uogólnieniem twierdzenia Pitagorasa jest równanie postaci $x^n+y^n=z^n$, gdzie n jest większe od 2.

P. Fermat przy okazji lektury 8 zadania II księgi Arytmetyki Diofantesa (chodziło w nim o rozkład kwadratu na sumę dwu kwadratów, czyli o rozwiązanie równania Pitagorasa) uczynił następującą uwagę: „Podzielić sześcian na dwa inne sześciany, potęgę czwartą na dwie inne potęgi czwarte, lub ogólnie jakąkolwiek potęgę na dwie inne potęgi o tym samym wykładniku większym niż dwa jest niemożliwe i znalazłem naprawdę piękny dowód tego faktu, lecz margines jest za wąski, by go na nim zmieścić” [2].

Jest to tzw. wielkie twierdzenie Fermata, które wyrażamy w postaci następującej:

(F) Równanie $x^n+y^n=z^n$ przy n większym od 2 nie jest rozwiązalne w liczbach naturalnych.

Istnieje opinia głosząca, że skoro 300 lat intensywnych poszukiwań dowodu tego twierdzenia nie dały pozytywnego wyniku, to jest rzeczą bardziej prawdopodobną przyjąć, że nawet wielki Fermat się mylił [3].

---

[1] Zob. np. W. Sierpiński, *Arytmetyka teoretyczna*, Warszawa 1968, 130.

[2] D. J. Struik, *Krótki zarys historii matematyki do końca XIX wieku*, tł. P. Szeptycki, Warszawa 1963, 155; por. także A.P. Juszkiewicz (red.), *Historia matematyki*, tom 2, tł. S. Dobrzycki, Warszawa 1976, 87.

[3] D. J. Struik, dz. cyt., 155—156.

Celem tej notatki jest przedstawienie propozycji elementarnego dowodu wielkiego twierdzenia Fermata.

Zauważmy najpierw, że twierdzenie (F) wystarczy udowodnić dla wykładników n będących liczbą pierwszą większą, bądź równą 3, a także dla wykładnika $n=4$ (ten przypadek udowodnił sam Fermat). Pozostaje przeto zająć się tylko wykładnikami pierwszymi. Jeżeli wykładnik n jest liczbą złożoną, to dowód twierdzenia (F) sprowadza się do przypadku, kiedy n jest liczbą pierwszą.

Dla wygody rozważań, bez zmniejszenia ich ogólności, załóżmy; $x<y<z$ oraz, że liczby x i y są względem siebie pierwsze.

Istota proponowanego dowodu jest następująca.

Wychodzimy z faktu, że wyrażenia x^n+y^n oraz x^n-y^n mają dzielniki pierwsze formy $2nk+1$. Twierdzenie to zostało udowodnione przed 25 laty [4].

Następnie przekształcamy równanie $x^n + y^n = z^n$. Możemy napisać:
$z = (x^n + y^n)^{1/n}$
$= [(x + y) \cdot (x^{n-1} - x^{n-2}y + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1})]^{1/n}$

Oznaczmy drugie z wyrażeń podpierwiastkowych symbolem z_{n-1}. Wówczas będziemy mieć: $z = [(x + y) \cdot z_{n-1}]^{1/n}$

Wiadomo, że jeżeli liczba n jest podzielnikiem sumy $x+y$, to suma ta jest względnie pierwsza z wyrażeniem z_{n-1}. Wówczas nietrudne rozumowanie wykazuje, że twierdzenie Fermata zachodzi.

Przypuśćmy teraz, że liczba n nie jest podzielnikiem sumy $x+y$. Z elementarnej teorii liczb wiadomo, że wtedy suma n-tych potęg, czyli x^n+y^n, ma dzielnik n^2. A zatem $x+y$ musi mieć dzielnik n^{n-1}, aby suma x^n+y^n miała podzielnik n^n. Wnioskujemy przeto, że jeżeli $x+y$ jest podzielne przez n^{n-1}, to suma x^n+y^n jest podzielna przez n^n.

Jeżeli więc byśmy przypuścili, że wielkie twierdzenie Fermata nie zachodzi, to trzeba aby pierwiastek n-tego stopnia wyciągnął się zarówno z sumy $x+y$, jak też z wyrażenia z_{n-1}. Innymi słowy, trzeba aby $x+y=a^n$ oraz $z_{n-1}=b^n$.

Możemy oczywiście tak dobrać x oraz y, aby z sumy $x+y$ dał się wyciągnąć pierwiastek n-tego stopnia. W odniesieniu do wyrażenia z_{n-1} już tak postąpić nie można. Przypuśćmy jednak, że istnieją takie liczby x oraz y, przy których daje się wyciągnąć pierwiastek również z wyrażenia z_{n-1}. Wówczas otrzymujemy, że $z=a \cdot b$. Znaczy to, iż liczba z jest liczbą naturalną i złożoną.

Przekształćmy teraz równanie $x^n+y^n=z^n$ pisząc $x^n=z^n-y^n$. Zatem x będzie pierwiastkiem n-tego stopnia z różnicy z^n-y^n. Ale wiemy, że suma algebraiczna n-tych potęg ma dzielniki pierwsze formy $2nk+1$. Wynika stąd, że także x ma dzielniki pierwsze formy $2nk+1$.

Postępując podobnie możemy napisać, że $y^n=z^n-x^n$ i wnioskować, iż także y ma dzielniki pierwsze formy $2nk+1$.

A zatem aby równanie $x^n+y^n=z^n$ było rozwiązalne w liczbach naturalnych potrzeba i wystarcza, aby zachodziła zależność: $x+y=a^n$ lub $x+y=n^{n-1}$ lub $x+y=a^n \cdot n^{n-1}$.

Niech $x+y=a^n$. Rozkładamy wówczas liczbę a^n na składniki: $a^n=1+(a^n-1)$, $a^n=2+(a^n-2)$, ... Wśród tych liczb poszukujemy takich składników (pierwszym z nich będzie x, drugim — y), które będą mia-

---

[4] T. Boncler, *Reszty potęgowe i ich własności cykliczne*, Zeszyty Naukowe Politechniki Warszawskiej, Geodezja, 1958, 3, 59—92.

ły podzielniki formy 2nk+1 (np. $x=c.(2np+1)$, $y=d.(2nr+1)$. Jeżeli znajdziemy taką parę liczb x oraz y, to obliczamy sumę $x^n+y^n=z^n$. Rachunek wykazuje, że liczba z nie jest liczbą naturalną. Znaczy to, że w tym przypadku wielkie twierdzenie Fermata zachodzi. Przypuszczenie nasze o istnieniu naturalnych rozwiązań równania $x^n+y^n=z^n$ okazało się fałszywe.

Zilustrujmy ostatni fragment rozumowania konkretnym przykładem. Niech $n=5$. Wówczas rozważamy sumy: 1^5+242^5, 2^5+241^5, ..., 120^5+123^5, 121^5+122^5. Wśród tych wszystkich sum istnieją tylko trzy, które spełniają założone warunki. Są nimi: 1) $x=61=2.5.6+1$, $y=182=2.(2.5.9+1)$, 2) $x=101=2.5.10+1$, $y=142=2.(2.5.7+1)$, 3) $x=121=2.5.12+1$, $y=122=2.(2.5.6+1)$. W żadnym z tych przypadków liczba z nie jest liczbą naturalną. W przypadku 1) liczba z okazuje się być większą od 182, zaś mniejszą od 183, w przypadku 2) liczba z jest większa od 146, zaś mniejsza od 147, w przypadku 3) liczba z jest większa od 139, zaś mniejsza od 140.

W pozostałych przypadkach, tzn. kiedy $x+y=n^{n-1}$ lub kiedy $x+y=a^n \cdot n^{n-1}$, jest podobnie.

Przeto założenie, że przy danych warunkach liczba z jest całkowita prowadzi do sprzeczności. Zatem wielkie twierdzenie Fermata jest prawdziwe.

Autor uważa, że zaproponowane rozumowanie jest dowodem kompletnym [5].

JANINA BUCZKOWSKA

UWAGI O ZNACZENIU ZNAKU

Refleksja nad poznaniem, od samego już niemal początku istnienia filozofii, związana jest z problemami dotyczącymi znaku. W dwudziestym wieku zagadnienia te nabrały tak istotnego znaczenia, że wyodrębniła się samodzielna dziedzina badań zwana semiotyką. Dzisiejsza semiotyka, czyli ogólna teoria znaku, sięgając do dwu źródeł, lingwistyki oraz filozofii łącznie z logiką, jest kontynuacją filozoficznej refleksji nad językiem i poznaniem. Podejmuje niezmiernie interesujący pod względem filozoficznym problem związku pomiędzy światem rzeczy, światem znaków i myślą. Taki uniwersalny charakter nadał semiotyce jeden z jej twórców Charles Sander Peirce, który całość poznania zinterpretował jako proces znakowy. Wiele koncepcji i terminów Peirce'a pozostało aktualnymi do dzisiaj. Jednym z takich terminów jest podstawowe pojęcie semiotyki — znak. Wielu dzisiejszych autorów posługując się tym pojęciem, rozumie je, zgodnie z koncepcją Peirce'a, jako relację triadyczną obejmującą nośnik znaczenia zwany środkiem przekazu, przedmiot znaku oraz jego znaczenie czyli interpretanta. Znak pojmowany jako triada, różni się od znaku w ujęciu diadycznym tym, że jego podstawową cechą staje się reprezentacja a nie zastępowanie przedmiotu przez

[5] Wielkie twierdzenie Fermata jest ciekawym fenomenem w historii myśli ludzkiej. Ma ono wydźwięk nie tylko czysto matematyczny, lecz również filozoficzny (w ogólnym tego słowa znaczeniu). Z tego też względu interesująca wydaje się być przedłożona próba, choćby nawet zawierała jeszcze pewne luki (przypis redakcji).