Mieczysław Lubański

Zagadnienie wielkości niestandardowych

Studia Philosophiae Christianae 20/2, 53-68

1984

Studia Philosophiae Christianae
ATK
20(1984)2

MIECZYSŁAW LUBAŃSKI

ZAGADNIENIE WIELKOŚCI NIESTANDARDOWYCH

1. Wstęp. 2. Ciała uporządkowane. 2.1. Pojęcie ciała. 2.2. Pojęcie uporządkowania. 2.3. Przykłady. 3. Liczby nieskończenie małe. 3.1. Pojęcie liczby nieskończenie małej. 3.2. Liczby nieskończenie duże. 3.3. Liczby rzeczywiste niestandardowe. 4. Własność Archimedesa. 4.1. Aksjomat Archimedesa. 4.2. Własność niearchimedesowości. 5. Ciała niearchimedesowe. 5.1. Przykład ciała niearchimedesowego. 5.2. Liczby hiperrzeczywiste. 6. Perspektywy zastosowań.

1. WSTĘP

Pojęcie wielkości (ilości) jest jednym z podstawowych pojęć klasycznej filozofii przyrody. Tradycyjnie przyjęło się odróżniać wielkości ciągłe oraz wielkości nieciągłe. Liczby naturalne można traktować jako egzemplifikację wielkości nieciągłej, zaś linie, powierzchnie, bryły — egzemplifikują wielkości ciągłe [1]. Przy pomocy pojęcia zbioru liczb rzeczywistych można w łatwy sposób opisywać jednowymiarowe wielkości ciągłe, albo poprawniej: wielkości spójne. Fakt istnienia zbioru liczb wymiernych stawia nas przed koniecznością dokonania rewizji wspomnianego podziału wielkości. Zbiór liczb wymiernych nie jest bowiem wielkością ani ciągłą, ani nieciągłą w tradycyjnym znaczeniu tych terminów. Pozostawiając na uboczu tę sprawę zauważmy, że użyliśmy przed chwilą terminów „zbiór" oraz „liczba rzeczywista". Pojęcia te znalazły liczne zastosowania przy opisywaniu zjawisk zachodzących w świecie nas otaczającym, jak też przy formułowaniu pewnych tez z zakresu kosmologii zarówno przyrodniczej, jak i filozoficznej; w szczególności liczby rzeczywiste okazały się użyteczne jako aparatura pojęciowa dla ujęcia zagadnień związanych ze spójnością, ciągłością, ruchem [2].

---

[1] Por. St. Mazierski, *Elementy kosmologii filozoficznej i przyrodniczej*, Poznań 1972, 91; także A. G. van Melsen, *Filozofia przyrody*, tł. S. Zalewski, Warszawa 1968, 193—194.

[2] C. B. Boyer, *Historia rachunku różniczkowego i całkowego i rozwój jego pojęć*, tł. St. Dobrzycki, Warszawa 1964, 69—70.

Pojęcie zbioru zostało uogólnione przez L. A. Zadeha[3]. Wprowadził on pojęcie zbioru rozmytego. Każdy zbiór w znaczeniu dotychczasowym jest szczególnym przypadkiem zbioru rozmytego, takim mianowicie przypadkiem, w którym stopień przynależności elementu do zbioru jest równy jedności.

Analogiczna sytuacja ma miejsce w odniesieniu do pojęcia liczby rzeczywistej. Zostały one uogólnione do postaci liczb zespolonych, te następnie w postaci kwaternionów. A. Robinson[4] zaproponował innego rodzaju poszerzenie klasy liczb rzeczywistych. Wprowadził on tzw. niestandardowe liczby rzeczywiste.

Celem tego artykułu jest przybliżenie wspomnianego pojęcia Czytelnikowi filozofowi. Zreferujemy pojęcie niestandardowej liczby rzeczywistej, omówimy sposoby konstrukcji tego rodzaju liczb, zasygnalizujemy także otwierające się perspektywy ich zastosowań w nauce oraz w filozofii[5].

2. CIAŁA UPORZĄDKOWANE

Rozważania nasze rozpoczniemy od przypomnienia pojęcia ciała. Uczynimy to podając aksjomatyczne określenie ciała.

2.1. POJĘCIE CIAŁA

Niech dany będzie zbiór niepusty K. Przypuśćmy, że określone zostały w nim dwa działania dwuargumentowe, które będziemy nazywać dodawaniem oraz mnożeniem i oznaczać odpowiednio symbolem + oraz ·; znaczy to, że każdym dwom elementom ze zbioru K zostaje przyporządkowany jednoznacznie element zwany ich sumą oraz element zwany ich iloczynem. Jeżeli więc x oraz y są elementami zbioru K, to również $x+y$ oraz $x\cdot y$ są również elementami zbioru K. Zakładamy dalej, że w zbiorze K znajdują się dwa wyróżnione elementy, które będziemy nazywać zerem oraz jednością i oznaczać symbolami 0 oraz 1.

1. Wspomniany zbiór K nazywać będziemy ciałem, jeżeli spełnione są następujące warunki zwane aksjomatami:

(A 1) $x+y=y+x$,

---

[3] *Fuzzy sets,* Information and Control 8(1965), 338—353.

[4] *Non-Standard Analysis,* Proc. Konikl. Ned. Akad. Wet., A, 64(1961), 4, 432—440.

[5] O analizie niestandardowej informuje na terenie polskim praca: St. Krajewski, *Analiza niestandardowa — nowe słowo w podstawach rachunku różniczkowego i całkowego.* Studia Filozoficzne 1976, 1, 109—124.

(A 2) $x+(y+z)=(x+y)+z$,
(A 3) $x+0=x$,
(A 4) dla każdego x istnieje taki element t, że zachodzi zależność $x+t=0$,
(A 5) $x \cdot y = y \cdot x$,
(A 6) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$,
(A 7) $x \cdot 1 = x$,
(A 8) dla każdego $x \neq 0$ istnieje taki element s, że spełniona jest zależność $x \cdot s = 1$,
(A 9) $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$,

gdzie x,y,z są dowolnymi elementami zbioru K.

Zauważmy, że powyższe określenie można wypowiedzieć krócej posługując się pojęciem grupy przemiennej (abelowej). Zbiór K będzie mianowicie ciałem, jeżeli jest grupą abelową ze względu na dodawanie oraz mnożenie (w tym przypadku w odniesieniu do elementów różnych od zera) i zachodzi rozdzielność mnożenia względem dodawania.

Ze znanych własności grupy abelowej wynika, że w każdym ciele określone są również działania odwrotne względem dodawania oraz mnożenia (z wyjątkiem elementu równego zeru); pierwsze z tych działań zwiemy odejmowaniem, drugie natomiast — dzieleniem. Odejmować można dowolne dwa elementy ciała, dzielić natomiast można jedynie przez elementy różne od zera.

Przykłady ciał. 1. Zbiór K złożony tylko z dwu elementów 0 i 1, przy czym działania + oraz • są określone następująco: $0+0=0$, $0+1=1$, $1+0=1$, $1+1=0$, $0 \cdot 0=0$, $0 \cdot 1=0$, $1 \cdot 0=0$, $1 \cdot 1=1$, jest ciałem.

2. Zbiór wszystkich liczb wymiernych ze zwykłymi działaniami dodawania oraz mnożenia jest ciałem.

3. Niech K będzie zbiorem liczb 0, 1, 2, ..., $p-1$, gdzie p jest liczbą pierwszą. Określmy sumę (iloczyn) dwu elementów x oraz y zbioru K jako resztę z dzielenia zwykłej sumy (zwykłego iloczynu) tych elementów przez liczbę pierwszą p. Wówczas zbiór K jest ciałem.

4. Zbiór wszystkich liczb rzeczywistych (zespolonych) ze zwykłymi działaniami dodawania oraz mnożenia jest ciałem.

Sprawdzenie, że w wymienionych przypadkach spełnione są wszystkie aksjomaty (A 1) — (A 9) jest rzeczą nietrudną.

2.2. POJĘCIE UPORZĄDKOWANIA

Niech K będzie ciałem. Przypuśćmy, że dla każdej pary różnych elementów x oraz y określona została relacja większości (mniejszości). Zapisywać ją będziemy w postaci $x<y$ i czy-

tać x jest mniejsze od y, względnie: y jest większe od x. Żądamy, aby spełnione były następujące warunki, zwane aksjomatami uporządkowania:

(U 1) Jeżeli $x<y$ oraz $y<z$, to $x<z$.

(U 2) Jeżeli $x<y$, to $x+z<y+z$ dla dowolnego z należącego do K.

(U 3) Jeżeli $x<y$, zaś $z>0$, to $x \cdot z<y \cdot z$.
Jeżeli $x<y$, zaś $z<0$, to $x \cdot z>y \cdot z$.

Mówimy wówczas, że w ciele K został określony porządek lub uporządkowanie, zaś ciało K zwiemy ciałem uporządkowanym.

Elementy ciała uporządkowanego K, które są większe od elementu zerowego, zwie się dodatnimi, zaś te które są mniejsze od zera — ujemnymi. A zatem dowolny element ciała uporządkowanego K jest bądź równy zeru, bądź dodatni, bądź ujemny.

Można wykazać, że w ciele uporządkowanym równanie $x \cdot x+1=0$ nie ma rozwiązania. Fakt ten mówi o „naturze" pojęcia uporządkowania; wskazuje zarazem na to, że ciało liczb zespolonych nie może zostać uporządkowane w wyżej podanym sensie. Jest tak z tej racji, gdyż w ciele liczb zespolonych równanie $x \cdot x+1=0$ posiada rozwiązanie.

2.3. PRZYKŁADY

W rozważaniach naszych pojęcie uporządkowania odgrywać będzie istotną rolę. Z tego też względu podamy obecnie kilka przykładów ciał uporządkowanych, a także nieuporządkowanych.

1. Ciało liczb wymiernych jest ciałem uporządkowanym, jeżeli przyjmiemy, że liczba x jest mniejsza od liczby y wtedy, gdy różnica y—x jest dodatnia. Sprawdzenie, że aksjomaty (U 1) — (U 3) są spełnione jest rzeczą łatwą.

2. Określając analogicznie relację mniejszości (większości) między dwoma liczbami rzeczywistymi wnosimy, że ciało liczb rzeczywistych jest także ciałem uporządkowanym. Ciało liczb wymiernych jest podciałem ciała liczb rzeczywistych.

3. Ciało K z przykładu 1 (punkt 2.1.) nie da się uporządkować. Ciało to zawiera tylko dwa elementy 0 oraz 1. Przyjmując, że 0 jest mniejsze od 1, zauważamy, że $0+1=1$, zaś $1+1=1$. Nie jest więc spełniony aksjomat (U 2).

4. Analogiczna sytuacja zachodzi w odniesieniu do przykładu 3 (ze wspomnianego punktu 2.1.). Nie jest rzeczą trudną przekonać się, iż aksjomat (U 2) nie będzie w ogólności spełniony. Jeżeli bowiem zgodzimy się, że 0 jest mniejsze od 1,

to biorąc sumę 0 oraz p—1 otrzymamy p—1, zaś suma 1 oraz p—1 da w wyniku 0.

W ciele uporządkowanym można wyróżnić, jak pamiętamy, trzy klasy elementów. Pierwszą klasę niech tworzy klasa złożona z jednego tylko elementu, mianowicie z zera, drugą klasę — zbiór wszystkich elementów większych od zera, zwanych elementami dodatnimi, trzecią klasę — zbiór wszystkich elementów mniejszych od zera, zwanych elementami ujemnymi. Weźmy w szczególności ciało uporządkowane liczb rzeczywistych. Przypomnijmy określenie wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej x; oznaczać ją będziemy symbolem $|x|$. Określa się ją następująco: $|0| = 0$, $|x| = x$ jeśli $x>0$, $|x| = -x$ jeżeli x jest mniejsze od zera.

3. LICZBY NIESKOŃCZENIE MAŁE

Niech dane będzie uporządkowane ciało liczb rzeczywistych R. Dokonamy rozszerzenia ciała R przez dołączenie nowych elementów, które nazywać będziemy liczbami nieskończenie małymi oraz liczbami nieskończenie dużymi. Wspomniane rozszerzenie ciała R oznaczać będziemy symbolem S. Rozszerzenie S rozumiemy w ten sposób, że zbiór S nie tylko zawiera w sobie wszystkie liczby rzeczywiste, ale jest także ciałem uporządkowanym, przy czym porządek określony w ciele S pokrywa się dla zwykłych liczb rzeczywistych z porządkiem arytmetycznym, a więc z porządkiem, z którym mamy do czynienia w ciele R.

Podamy teraz określenie liczb nieskończenie małych oraz liczb nieskończenie dużych.

3.1. POJĘCIE LICZBY NIESKOŃCZENIE MAŁEJ

Niech e będzie liczbą dodatnią. Rozważamy sumy postaci: $e+e$, $e+e+e$, $e+e+e+\ldots$. Jeżeli każda z podanych sum jest mniejsza od liczby jeden, to liczbę dodatnią e zwie się nieskończenie małą.

Geometrycznie można określenie powyższe zilustrować następująco. Przypuśmy, że rozważamy odcinek o długości równej e. Jeżeli e jest liczbą nieskończenie małą, to wówczas odkładając kolejno na odcinku jednostkowym od zera, czyli od lewego końca odcinka, sumy $e+e$, $e+e+e$, $e+e+e+\ldots$, nigdy nie dojdziemy do punktu jeden, czyli do drugiego, prawego końca odcinka.

Zauważmy, że każda liczba nieskończenie mała jest mniejsza od dowolnej liczby rzeczywistej dodatniej.

Istotnie. Niech x będzie dowolną liczbą rzeczywistą dodatnią. Wówczas pewna suma skończonej ilości elementów równych x będzie większa od jedności. A więc $x+x+...+x>1$. Gdyby $e\geqslant x$, to wtedy także odnośna suma postaci $e+e+...+e$ byłaby większa od sumy $x+x+...+x$, a zatem byłaby większa lub równa jedności. A to jest niemożliwe dla liczb nieskończenie małych. Stwierdzenie zostało więc udowodnione.

Wśród liczb nieskończenie małych można mówić o różnych „stopniach małości". Niech e oraz d będą dwoma liczbami nieskończenie małymi. Mówimy, że liczba d ma wyższy stopień małości niż liczba e, jeżeli iloraz d/e jest liczbą nieskończenie małą.

Przykład. Liczby e, e^2, e^3, ... są liczbami nieskończenie małymi o coraz wyższym stopniu małości.

Liczba nieskończenie mała e zwie się mniejszą od liczby nieskończenie małej d, jeżeli różnica $d-e$ jest liczbą dodatnią, albo równoważnie: jeżeli różnica $e-d$ jest liczbą ujemną. Mówimy także, że liczba nieskończenie mała d jest większa od liczby nieskończenie małej e.

Jest widoczne, że podane przed chwilą określenie relacji większości (mniejszości) dla liczb nieskończenie małych jest zgodne z określeniem tejże relacji dla zwykłych liczb rzeczywistych. Dołączając więc do zbioru liczb rzeczywistych zbiór liczb nieskończenie małych otrzymamy obszerniejszy zbiór liczb, w którym relacja porządku harmonizuje z tąż relacją w odniesieniu do podzbioru liczb rzeczywistych.

Nie jest trudno zauważyć, że liczb nieskończenie małych jest nieskończenie wiele. Pozostawiamy w tej chwili na uboczu sprawę, jaka jest moc wspomnianego zbioru liczb, w szczególności czy jest to zbiór przeliczalny, czy też nieprzeliczalny.

3.2. LICZBY NIESKOŃCZENIE DUŻE

Liczbę dodatnią E zwie się nieskończenie dużą, jeżeli jest ona większa od każdej z sum postaci: $1+1$, $1+1+1$, $1+1++1+...$.

Analogicznie jak w przypadku liczb nieskończenie małych można zilustrować to pojęcie geometrycznie następująco: jeżeli weźmiemy odcinek długości równej jeden, to odmierzając go od punktu zero w prawo dowolną liczbę razy nigdy nie dotrzemy do liczby E.

Łatwo jest również wykazać, że każda liczba nieskończenie duża jest większa od dowolnej liczby rzeczywistej dodatniej.

Można wprowadzić dla liczb nieskończenie dużych ich „stopień wielkości". Niech E oraz D będą dwoma liczbami nieskończenie dużymi. Powiemy, że liczba D ma wyższy stopień wielkości niż liczba E, jeżeli ich iloraz D/E jest liczbą nieskończenie dużą. Liczby E, E^2, E^3, ... są liczbami nieskończenie wielkimi o coraz wyższym stopniu wielkości.

Zwróćmy uwagę na związek zachodzący między liczbami nieskończenie dużymi oraz nieskończenie małymi.

Niech e będzie liczbą nieskończenie małą dodatnią. Wówczas liczba 1/e będzie, co łatwo zauważyć, liczbą nieskończenie dużą. Podobnie, jeżeli E jest liczbą dodatnią nieskończenie dużą, to liczba 1/E będzie liczbą nieskończenie małą dodatnią.

Płynie stąd prosty wniosek: istnienie liczb nieskończenie małych (dodatnich) jest równoważne istnieniu liczb nieskończenie dużych (dodatnich). Jeżeli więc zgodzimy się, z jakichś powodów, że istnieją, liczby nieskończenie duże, to musimy konsekwentnie zgodzić się, że istnieją liczby nieskończenie małe.

3.3. LICZBY RZECZYWISTE NIESTANDARDOWE

Do chwili obecnej zakładaliśmy zarówno w odniesieniu do liczb nieskończenie małych, jak i liczb nieskończenie dużych, że są to liczby dodatnie. Teraz uwolnimy się od tego ograniczenia. Element s zbioru S będziemy nazywać liczbą nieskończenie małą, jeżeli każda z sum wartości bezwzględnej liczby s postaci: $|s|+|s|$, $|s|+|s|+|s|$, $|s|+|s|+|s|+...$ jest mniejsza od jedności. Podobnie element T zbioru S będziemy nazywać liczbą niekończenie dużą, jeżeli wartość bezwzględna $|T|$ jest większa od każdej z sum postaci: $1+1$, $1+1+1$, $1+1+1+...$. Jeżeli liczby s oraz T są liczbami dodatnimi, to określenie obecne pokrywa się z podanym wcześniej. Jest więc uogólnieniem pojęcia liczby nieskończenie małej oraz liczby nieskończenie dużej na liczby ujemne.

Liczby nieskończenie małe (dodatnie i ujemne) oraz liczby nieskończenie duże (dodatnie i ujemne) zalicza się do liczb rzeczywistych niestandardowych.

Do tej klasy należą również liczby rzeczywiste skończone (niestandardowe). Przez liczbę rzeczywistą niestandardową skończoną rozumie się sumę dowolnej liczby rzeczywistej (zwykłej) skończonej oraz liczby nieskończenie małej. A zatem liczbę postaci $y=x+e$, gdzie x jest zwykłą liczbą rzeczywistą skończoną, zaś e jest liczbą nieskończenie małą, zwie się liczbą rzeczywistą skończoną niestandardową. Zwykłe liczby rzeczywiste zwie się liczbami rzeczywistymi standardowymi. Liczbę x zwie się częścią standardową liczby y. Przyjęło się następujące znakowanie: $x=st(y)$.

Przypuśćmy, że część standardowa liczby y jest równa zeru. Wówczas liczba y jest równa po prostu liczbie nieskończenie małej e. Znaczy to, że liczby nieskończenie małe są podzbiorem zbioru liczb rzeczywistych skończonych niestandardowych.

Wobec tego wśród zbioru liczb rzeczywistych niestandardowych wyróżniamy 3 klasy: zbiór liczb nieskończenie dużych ujemnych, zbiór liczb skończonych niestandardowych oraz zbiór liczb nieskończenie dużych dodatnich.

Dwie liczby zwiemy nieskończenie bliskimi, jeżeli ich różnica jest liczbą nieskończenie małą. A zatem x oraz y są nieskończenie bliskie, jeżeli x—y, a także co na to samo wychodzi y—x, jest liczbą nieskończenie małą. Jest widoczne, że spośród dwu liczb x oraz y co najmniej jedna z nich musi być liczbą niestandardową skończoną, aby mogły one być nieskończenie bliskie. Jeżeli x oraz y są liczbami rzeczywistymi skończonymi (standardowymi), to nie mogą one być nieskończenie bliskie siebie. W tym przypadku można zawsze dobrać dwie liczby rzeczywiste skończone w taki sposób, by ich różnica była dowolnie mała, nie może jednak ona być nieskończenie mała.

Niech a będzie liczbą rzeczywistą standardową. Klasę wszystkich liczb niestandardowych skończonych nieskończenie bliskich do liczby a zwie się jej monadą [6]. Zatem każda zwykła liczba rzeczywista skończona, czyli liczba rzeczywista standardowa, zawiera się w swej monadzie. Konsekwentnie zbiór wszystkich liczb rzeczywistych skończonych (standardowych i niestandardowych) można traktować jako sumę odnośnych monad, tj. monad utworzonych dla każdej zwykłej liczby rzeczywistej.

4. WŁASNOŚĆ ARCHIMEDESA

Przypuśćmy, że mamy dane ciało uporządkowane K. Przypuśćmy dalej, że x oraz y są dwoma elementami ciała K takimi, że $0<x<y$. Wówczas możliwe są dwa przypadki: bądź istnieje taka liczba naturalna n, że suma n składników równych x będzie większa od y, bądź takiej liczby n nie ma. Przypadek pierwszy zwie się archimedesowym, przypadek drugi — niearchimedesowym. Rozważymy obecnie tę sprawę bliżej.

---

[6] Termin ten użyto z racji ideowych celem nawiązania do monadologii Leibniza.

4.1. AKSJOMAT ARCHIMEDESA

Można mu nadać następujące sformułowanie:

(1 A) Dla każdych dwu elementów x oraz y ciała uporządkowanego K takich, że $0<x<y$ istnieje taka liczba naturalna n, dla której zachodzi nierówność $nx>y$.

Jeżeli ciało uporządkowane K spełnia aksjomat (1 A), to mówimy, że posiada ono własność Archimedesa. W tym przypadku mówi się także, iż ciało uporządkowane jest archimedesowe.

Jest rzeczą dobrze znaną, że ciało liczb rzeczywistych jest ciałem archimedesowym [7]. Intuicyjna treść aksjomatu Archimedesa jest wyraźna. W języku geometrii aksjomat ten orzeka, że jeżeli mamy dane dwa odcinki, to odmierzając dostateczną ilość razy odcinek mniejszy pokryjemy w całości odcinek większy.

Jeżeli rozważamy konkretne ciało, np. ciało liczb rzeczywistych, to możemy stwierdzić, czy posiada ono własność archimedesa, czy też nie posiada. Jeżeli natomiast wprowadzamy pojecie ciała uporządkowanego aksjomatycznie, to należy wyraźnie wymienić aksjomat (1 A). Aksjomat ten bowiem nie wynika z pozostałych aksjomatów ciała uporządkowanego.

4.2. WŁASNOŚĆ NIEARCHIMEDESOWOŚCI

Przyjmijmy następujące sformułowanie zaprzeczenia aksjomatu Archimedesa:

(1 N) Istnieją dwa elementy x oraz y ciała uporządkowanego K takie, że $0<x<y$ przy czym jakąkolwiek wzięlibyśmy liczbę naturalną n, to będzie zawsze $nx<y$.

Ciało uporządkowane K, w których zachodzi aksjomat (1 N), zwiemy ciałem niearchimedesowym.

Łatwo jest zauważyć, że jeżeli ciało K posiada dwa elementy x oraz y, które mają własność wymienioną w aksjomacie (1N), to wówczas dane ciało K posiada nieskończenie wiele par o wspomnianej własności.

Jeżeli dane ciało zawiera liczby nieskończenie małe, to wówczas spełniony zostaje aksjomat (1 N). Innymi słowy z istnienia w danym ciele liczb nieskończenie małych wynika jego niearchimedesowość. Zachodzi także wynikanie odwrotne. Jeżeli ciało jest niearchimedesowe, to istnieją w nim liczby nieskończenie małe. To ostatnie stwierdzenie można wypowiedzieć w postaci tezy: Jeżeli w ciele uporządkowanym nie ist-

---

[7] Zob. np. G. Birkhoff i S. Mac Lane, *Przegląd albebry współczesnej*, tł. A. Ehrenfeucht i A. Wł. Mostowski, Warszawa 1966, 105.

nieją liczby nieskończenie małe, to ciało jest archimedesowe. A ta jest bezpośrednio widoczna. A zatem niearchimedesowość ciała jest równoważna z istnieniem w nim liczb nieskończenie małych.

Jeżeli przeto weźmiemy rozszerzenie S ciała liczb rzeczywistych R polegające na dołączeniu do R zbioru liczb nieskończenie małych (a także nieskończenie dużych), to otrzymamy ciało uporządkowane niearchimedesowe.

Aksjomaty (1 A) oraz (1 N) są wzajemnymi zaprzeczeniami. Nadto, są one niezależne od pozostałych aksjomatów ciała uporządkowanego. Konsekwentnie można rozbudowywać teorię ciał uporządkowanych archimedesowych oraz teorię ciał uporządkowanych niearchimedesowych.

Zauważmy jeszcze, że liczba zero jest jedyną liczbą standar dową będącą zarazem liczbą nieskończenie małą. Każda inna liczba nieskończenie mała jest liczbą niestandardową.

Monada liczby zero składa się ze wszystkich liczb nieskończenie małych, zarówno dodatnich, jak i ujemnych.

5. CIAŁA NIEARCHIMEDESOWE

Ciało niearchimedesowe jest to niepusty zbiór K spełniający aksjomaty (A 1) — (A 9), (U 1) — (U 3), (1 N). Podamy teraz minimalne niearchimedesowe rozszerzenie ciała liczb rzeczywistych.

5.1. PRZYKŁAD CIAŁA NIEARCHIMEDESOWEGO

Odwołując się do przeprowadzonych rozważań interesujący nas przykład można skonstruować łatwo w następujący sposób. Niech R oznacza ciało liczb rzeczywistych. Elementy ciała R będziemy nazywali liczbami rzeczywistymi standardowymi. Zbiór liczb standardowych powiększymy o liczby niestandardowe. Zaliczymy do nich liczby nieskończenie małe dodatnie oraz ujemne, a także wszelkie ich wymierne połączenia. Mamy tu na myśli wyrażenia postaci P (x) oraz Q (x), gdzie symbole P oraz Q oznaczają wielomiany o współczynnikach rzeczywistych, jak też ich sensowne ilorazy. Te ostatnie dają także liczby nieskończenie duże (dodatnie oraz ujemne), a także liczby skończone niestandardowe.

A więc np. ułamek postaci

$$\frac{a_0 + a_1 e + a_2 e^2 + \ldots + a_r e^r}{b_0 + b_1 e + b_2 e^2 + \ldots + b_s e^s}$$

w którym pierwszy różny od zera współczynnik w liczniku i mianowniku ma ten sam wskaźnik, daje liczbę skończoną niestandardową. Jeżeli pierwszy różny od zera współczynnik w liczniku ma mniejszy wskaźnik, niż analogiczny współczynnik występujący w mianowniku, to ułamek rozważany daje liczbę nieskończenie dużą. Jeżeli natomiast pierwszy różny od zera współczynnik w liczniku ma wskaźnik większy, niż analogiczny współczynnik w mianowniku, to ułamek daje liczbę nieskończenie małą.

Oto proste przykłady wspomnianych sytuacji.

Jeżeli e oznacza liczbę nieskończenie małą, to liczby postaci $e^2 / (1+e)$, $(3e^2+e^3) / (1+e^2)$ są liczbami nieskończenie małymi, zaś liczby $(1+e) / e^2$, $(1+e^2) / 3e^2$ — nieskończenie dużymi, natomiast liczby $(e+e^2) / (3e+5e^2)$, $(1+e) / (1+4e)$ — liczbami skończonymi niestandardowymi (część standardowa tych liczb jest, odpowiednio, równa 1/3 oraz 1).

Otrzymaliśmy przeto niearchimedesowe rozszerzenie zbioru liczb rzeczywistych.

Zauważmy, że nie była to, rzecz ściśle biorąc, konstrukcja liczb niestandardowych, lecz wsparty o intuicję ich opis.

5.2. LICZBY HIPERRZECZYWISTE

Uporządkujmy terminologię w odniesieniu do omówionych rodzajów liczb. Jak już wspominaliśmy liczby rzeczywiste zwie się liczbami rzeczywistymi standardowymi. Wśród liczb rzeczywistych niestandardowych wyróżniamy 3 klasy: liczby nieskończenie małe (dodatnie oraz ujemne), liczby nieskończenie duże (dodatnie i ujemne), liczby skończone niestandardowe. Liczby rzeczywiste standardowe oraz niestandardowe zwie się liczbami hiperrzeczywistymi. Z przeprowadzonych rozważań wynika, że klasa liczb hiperrzeczywistych jest ciałem uporządkowanym niearchimedesowym. Innymi słowy: można powiedzieć, że liczby hiperrzeczywiste są niearchimedesowym rozszerzeniem zbioru zwykłych (standardowych) liczb rzeczywistych.

Przyjrzyjmy się nieco bliżej pewnym podzbiorom klasy liczb hiperrzeczywistych. Rozważmy zbiór N wszystkich liczb naturalnych (standardowych). Temu zbiorowi odpowiada zbiór liczb hipernaturalnych. Należą do niego wszystkie elementy zbioru N oraz liczby niestandardowe hipernaturalne. Każda liczba niestandardowa hipernaturalna jest liczbą nieskończenie dużą. Nie ma wśród nich ani liczby największej, ani liczby najmniejszej. Zatem zbiór liczb hipernaturalnych jest uporządkowany podobnie do zbioru zwykłych liczb całkowitych

Nie wchodzimy bliżej w dyskusję struktury liczb hiperrzeczywistych, gdyż nie jest to celem obecnego artykułu. Czytelnika interesującego się tym zagadnieniem odsyłamy do literatury specjalistycznej [8].

Wspomnijmy jeszcze o sposobach konstrukcji zbioru liczb hiperrzeczywistych. Znamy obecnie dwa takie sposoby. Pierwszy z nich można nazwać językowym, drugi — algebraicznym. Pierwszy korzysta bowiem z węższego rachunku predykatów, drugi natomiast z pojęcia ultrafiltru [9]. Naszkicujmy główne rysy odnośnych konstrukcji.

W pierwszym sposobie określa się termy, a następnie formuły. Interpretujemy je jako predykaty określone na zbiorze liczb rzeczywistych. Liczba argumentów może być dowolna. Oznaczmy przez T klasę wszystkich formuł prawdziwych w zbiorze liczb rzeczywistych R. Każdy model zbioru T zwiemy elementarnym rozszerzeniem zbioru R. Wspomniane rozszerzenie zwiemy niestandardowym modelem zbioru liczb rzeczywistych. Otrzymane w ten sposób ciało uporządkowane jest niearchimedesowe.

Ta metoda jest interesująca z tego względu, że wiąże liczby hiperrzeczywiste z językiem (predykatów). Konsekwentnie sugeruje zachodzenie zależności między płaszczyzną semantyczną języka a matematyką. Rozszerzanie języka, w tym przypadku, jest równoważne rozszerzaniu tworów matematycznych. Pojawia się tu wyraźnie problem filozoficzny odnoszący się do struktury rzeczywistości: przy jakich warunkach można zasadnie przypisywać naszym konstrukcjom istnienie realne.

Drugi sposób posługuje się pojęciem ultrafiltru. Przypomnijmy to pojęcie. Przez ultrafiltr nad danym niepustym zbiorem X rozumiemy rodzinę niepustych podzbiorów danego zbioru X, spełniającą następujące warunki: część wspólna dwu zbiorów należących do F należy do F, jeżeli Y jest podzbiorem X, to bądź Y należy do F, bądź różnica mnogościowa X—Y należy do F. Inaczej można powiedzieć że ultrafiltr jest maksymalnym ideałem dualnym w boolowskiej algebrze podzbiorów zbioru X. Bierzemy teraz ultrafiltr zbudowany nad zbiorem wszystkich liczb naturalnych N. W celu bardziej

[8] Zob. np. W. A. J. Luxemburg, *Non-Standard Analysis*, Pasadena 1962; M. Machover, J. Hirschfeld, *Lectures of Non-Standard Analysis*, Berlin 1969; R. Lutz, M. Goze, *Nonstandard Analysis*, Berlin 1981.

[9] A. Robinson, *Wwiedienije w tieoriju modelej i mietamatiematiku algebry*, Moskwa 1967, 321—324.

intuicyjnego ujęcia tej metody określmy wspomniany ultrafiltr bezpośrednio. A więc wyróżnijmy w zbiorze N dwa typy zbiorów: pierwsze nazwijmy „dużymi", drugie — „małymi". Żądamy, aby spełnione były następujące warunki:

(F 1) Dowolny zbiór liczb naturalnych zalicza się do dokładnie jednej tylko klasy; jest więc bądź zbiorem dużym, bądź — małym.

(F 2) Dopełnie do zbioru N zbioru małego jest zbiorem dużym, dopełnienie zbioru dużego jest zbiorem małym.

(F 3) Każdy podzbiór zbioru małego jest mały, każdy nadzbiór zbioru dużego jest duży.

(F 4) Suma dwu zbiorów małych jest zbiorem małym, część wspólna dwu zbiorów dużych jest zbiorem dużym

(F 5) Każdy podzbiór skończony zbioru N jest zbiorem małym, każdy zbiór mający skończone dopełnienie jest zbiorem dużym.

Mając już do dyspozycji ultrafiltr nad zbiorem wszystkich liczb naturalnych rozważamy ciągi nieskończone wśród których określamy relację równoważności. Dzięki temu każdy ciąg należy dokładnie do jednej klasy równoważności. Otrzymane na tej drodze klasy równoważności zwiemy liczbami hiperrzeczywistymi. Można wykazać, że skonstruowany zbiór jest uporządkowanym ciałem niearchimedesowym będącym rozszerzeniem zbioru zwykłych liczb rzeczywistych [10].

Z racji czysto historycznych wypada przypomnieć, że podczas kształtowania się rachunku różniczkowego i całkowego posługiwano się pojęciem liczb nieskończenie małych. Nie były one jednak określone precyzyjnie, były raczej tylko nazwami na niezbyt wyraźne intuicje uczonych [11]. Okazuje się, że intuicje te dają się ująć ściśle, a te z kolei znajdują liczne zastosowania. Przyjrzymy się tej sprawie nieco bliżej.

6. PERSPEKTYWY ZASTOSOWAŃ

Omówimy zastosowanie naukowe dziś już znane oraz zasygnalizujemy otwierające się perspektywy zastosowań filozoficznych. Wśród zastosowań naukowych wskazane jest wyróżnienie zastosowań wewnątrz-matematycznych oraz zastosowań pozamatematycznych.

A. Zastosowania wewnątrzmatematyczne

---

[10] A. Robinson, dz. cyt.,323—324.

[11] C. B. Boyer, dz. cyt., 267—317.

W artykule omówiliśmy jedynie ciało liczb hiperrzeczywistych. Nie wspominaliśmy o budowaniu na nim rachunku analitycznego. Można to uczynić. Otrzymuje się wówczas tzw. analizę niestandardową. Ta nowa dziedzina jest już rozwiniętą gałęzią matematyki. Sama w sobie jest interesująca. Nadto okazuje się użyteczna przy uprawianiu matematyki. Umożliwia otrzymywanie prostszych dowodów twierdzeń w porównaniu do dowodów wcześniejszych, które nie były oparte o pojęcia z zakresu analizy niestandardowej. Niestandardowy rachunek różniczkowy może śmiało konkurować, jeśli chodzi o prostotę ujęcia, z podejściem klasycznym [12]. Analiza niestandardowa bywa przyrównywana do mostu zbudowanego na rzece. Sam most nie daje wprawdzie powiększenia terenu, ułatwia jednak poruszanie się po nim skracając wiele dróg. Dawniej były one o wiele dłuższe, teraz stały się łatwiejsze i krótsze [13]. Można z uzasadnieniem przypuszczać, że nie wykorzystano jeszcze wszystkich otwierających się tutaj możliwości.

B. Zastosowania pozamatematyczne

Jest rzeczą dobrze znaną, że od dawna fizycy mówili (i nadal mówią) o nieskończenie małych wielkościach, jak np. o nieskończenie małych objętościach, o nieskończenie małych częściach powierzchni, a także o nieskończenie dużych wielkościach, jak np. o nieskończenie dużych gęstościach, temperaturach. Tego rodzaju zwroty mogą znajdować ścisłe ujęcie w oparciu o aparaturę pojęciową analizy niestandardowej. Wszystko wydaje się świadczyć o tym, że idee analizy niestandardowej wycisną własne piętno na fizykalnym obrazie świata. Literatura specjalistyczna notuje dość liczne już prace fizyków-teoretyków idące po wskazanej linii.

Jest także prawdopodobne, że wcześniej czy później metody i pojęcia rachunku niestandardowego znajdą zastosowanie w innych naukach przyrodniczych, jak np. w biologii, biofizyce, biochemii.

Analogiczna predykcja wydaje się być również słuszna w odniesieniu do niektórych przynajmniej dziedzin humanistyki, np. do zagadnienia rozróżniania między bardzo silnymi przekonaniami, które co do treści mogą istotnie się różnić między sobą. Aparatura pojęciowa analizy niestandardowej po-

---

[12] A. Robinson, dz. cyt., 340. Elementarne wprowadzenie do problematyki analizy niestandardowej podaje praca: W. A. Uspienski, *Niestandartnyj, ili niearchimedow, analiz,* Moskwa 1983.

[13] A. Hurd (ed.), *Vistoria Symposium on Non-Standard Analysis,* Berlin 1974.

zwala zrozumieć istniejący tu stan rzeczy. Posługiwanie się w historii terminem „gdyby" wydaje się również przykładem pokrewnym z rozważanym [14].

C. Perspektywy zastosowań filozoficznych

Rozpocznijmy od strony językowej. Jest rzeczą niewątpliwą, że rozporządzając pojęciem liczb hiperrzeczywistych, a więc w szczególności liczb niestandardowych, operujemy bogatszym zasobem terminów, niż to jest możliwe bez ich pomocy. A ponieważ język określa naszą myśl [15], przeto staje się ona bardziej bogata. Z teoriopoznawczego punktu widzenia jest to zjawisko w pełni pozytywne. Jeżeli nie rozporządzamy odpowiednią aparaturą pojęciową, to stajemy bezradni wobec zadania adekwatnego opisania poznawanej rzeczywistości.

Pojęcie wielkości niestandardowych ukazuje większe możliwe bogactwo świata materialnego, niż poprzestawanie na pojęciach utworzonych w oparciu jedynie o poznanie potoczne i tzw. zdrowy rozsądek. Rokuje to pozytywnie w odniesieniu do rozważań kosmologicznych. Nie trzeba dodawać, że cieszą się one dziś szczególnym zainteresowaniem [16].

Zagadnienie relacji zachodzących między wielkościami ciągłymi i nieciągłymi, wielkimi i małymi, a także sam problem klasyfikacji zbioru wielkości — to przykłady zagadnień w odniesieniu do których aparatura pojęciowa z zakresu wielkości niestandardowych oferuje znaczną pomoc.

Widoczne są więc korzyści językowe i metodologiczne płynące z ubogacenia naszej aparatury poznawczej. Można nie bez racji wnosić, że trudniej jest wówczas popełnić pomyłkę kategorialną, która — jak wiadomo — polega na przedstawianiu faktów należących do pewnej kategorii przy pomocy zwrotów stosownych dla innej kategorii [17].

Można wskazać także na korzyści ogólnofilozoficzne. Wykorzystywanie, nawet fragmentaryczne, nowej aparatury pojęciowej zdaje się otwierać przed myślą ludzką nowe, szerokie

---

[14] M. Bobrzyński, *W imię prawdy dziejowej. Rzecz o zadaniu historii i dzisiejszym jej stanowisku*, w: M.H. Serejski (red.), *Historycy o historii*, 1775—1918, Warszawa 1963, 183—185.

[15] S. Czarnowski, *Metoda socjologiczna a historyczna*, w: M.H. Serejski (red.), *Historycy o historii*, 1918—1939, Warszawa 1966, 196.

[16] Por. np. M. Heller, *Ewolucja kosmosu i kosmologii*, Warszawa 1983.

[17] Por. E. Gilson, T. Langan, A. A. Maurer, *Historia filozofii współczesnej od Hegla do czasów najnowszych*, tł. B. Chwedeńczuk, S. Zalewski, Warszawa 1977, 495.

horyzonty poznawcze, wzmaga nas z krytycyzm, strzeże przed popadaniem w aprioryzm i abstrakcjonizm. Jeżeli bowiem istotnie potrafimy wzbogacić nasz język, jeżeli potrafimy konstruować nowe twory pojęciowe, to tym samym zwielokrotnia się nasza umiejętność bardziej subtelnego opisywania świata, a także tłumaczenia zachodzących w nim zjawisk. Ufilozoficzniając pojęcia, którymi się posługujemy, jak również twierdzenia do których dochodzimy, tworzymy filozoficzny obraz otaczającej nas rzeczywistości. Obraz ten jest wprawdzie funkcją naszego rozwoju intelektualnego, a więc utworzonych pojęć, uzasadnionych twierdzeń, a więc jest zmienny, ale pozostaje w nieustannym kontakcie z rzeczywistością, z naszym jej obiektywnym odpoznawaniem. Tak rozumiane filozofowanie, choć jest z natury swej otwarte na zmiany, przeróbki, udoskonalenia, przeredagowywania, to jednak jest filozofowaniem realnym, a więc zachowującym stały kontakt z rzeczywistością. A to jest bardzo wiele.

Nasuwa się konkluzja o charakterze antropologicznym. Człowiek jest istotą nie do zastąpienia. Subtelna proporcja elementów językowych, intelektualnych i emocjonalnych powoduje, że jest on istotą niepodrabialną [18].

ÜBER DAS PROBLEM VON NICHTSTANDARDGRÖSSEN

Zusammenfassung

Der Grössenbegriff, oder der Quantitätsbegriff, gehört zu den Grundbegriffen der klassischen Naturphilosopie. Traditionell unterscheidet man die stetigen und unstetigen Grössen. Die natürlichen Zahlen können als Beispiele von unstetiben Grössen dienen, Linien, Flächen und Körper — als Beispiele von stetigen Grössen. Die reellen Zahlen bilden die Grundlage für die Fragen nach der Kontinuität, Stetigkeit, Bewegung. Die reellen Zahlen können auf zwei verschiedene Weisen verallgemeinert werden. Auf die erste Weise erhält man die komplexen Zahlen und Quaternionen, auf die zweite — die hyperreellen Zahlen. Die Menge von den hyperreellen Zahlen enthält die Menge von den reellen Zahlen und die Menge von den reellen Nichtstandardzahlen. In diesem Aufsatz betrachtet man den Begriff von reellen Nichtstandardzahlen (in ihm sind die unendlich kleinen und unendlich grossen Zahlen enthalten) und deren Eigenschaften. Man weist auf die Auwendungen von Nichtstandardzahlen in der Mathematik, in der Philosophie und in anderen Wissenschaften hin. Man bemerkt auch, dass die Einführung von Nichtstandardzahlen den Grössenbegriff bereichert und grosse sprachliche und methodologische Vorteile bietet.

---

[18] J. Bańka, *Filozofia techniki, Człowiek wobec odkrycia naukowego i technicznego,* Katowice 1980, 150.