Mieczysław Lubański

Paradoksy Galileusza

Studia Philosophiae Christianae 21/1, 39-54

1985

Studia Philosophiae Christianae
ATK
21(1985)1

MIECZYSŁAW LUBAŃSKI

PARADOKSY GALILEUSZA

1. Wstęp. 2. Paradoks małego i dużego okręgu. 3. Paradoks okręgu i punktu. 4. Paradoks okręgu i prostej. 5. Uwagi zamykające.

1. WSTĘP

Istnieje pogląd głoszący, że zmianę w naukowym obrazie świata powodują nie tyle poznane nowe fakty doświadczalne czy też odkrycia, ile raczej przeobrażenia zachodzące w samym sposobie myślenia uczonych. Chodzi o to, aby potrafić ujrzeć znany zespół faktów w nowym świetle, a więc zająć wobec niego nową postawę myślową. Innymi słowy chodzi o elastyczność umysłową [1].

Artykuł ten stawia sobie za cel przedstawienie rozważań Galileusza na temat nieskończoności. Zreferujemy trzy paradoksy sformułowane przez Galileusza wraz z podaną przez niego sugestią rozwiązań. Stanie się dzięki temu widoczna ogromna pomysłowość oraz elastyczność umysłowa charakteryzująca Galileusza, która umożliwiła mu spojrzenie w nowy sposób na znane rzeczy. Na przedstawione paradoksy, jak też próby ich rozwiązań, spojrzymy w świetle współczesnej wiedzy z zakresu teorii mnogości oraz topologii. Będziemy jednak ostrożni w dokonywaniu porównań czy też poddając ocenie dawne osiągnięcia pamiętając, że jeżeli nie skorzystamy z wyższości współczesnej wiedzy w porównaniu do dawnej, to stracimy wiele, ale zarazem korzystając z niej narażamy się na niebezpieczeństwo zafałszowania istoty tego co się zwie postępem naukowym [2].

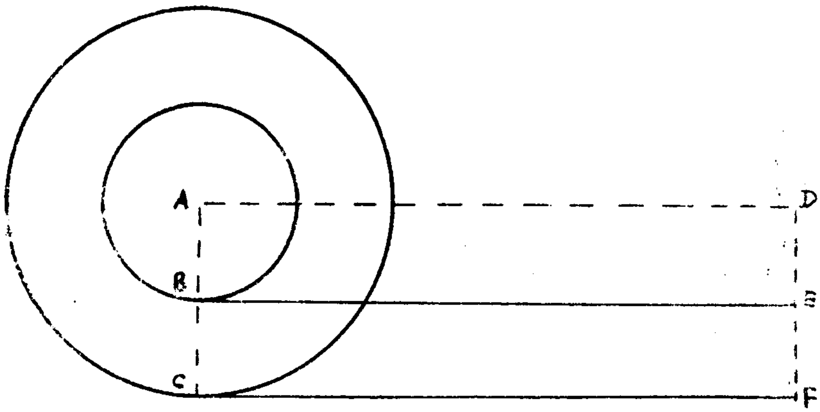
2. PARADOKS MAŁEGO I DUŻEGO OKRĘGU

Zakreślmy dookoła punktu A dwa koła współśrodkowe związane ze sobą razem; koło mniejsze niech ma promień AB, zaś koło większe — AC (rys. 1). Przypuśćmy, że punkty A

[1] H. Butterfield, *Rodowód współczesnej nauki 1300—1800*, tł. H. Krahelska, Warszawa 1963, 5—6.

[2] A. C. Crombie, *Nauka średniowieczna i początki nauki nowożytnej*, t. I, *Nauka w średniowieczu w okresie V—XIII w.*, tł. St. Łypacewicz, Warszawa 1960, 18.

oraz B i C leżą na jednej prostej. Poprowadźmy z końców średnic B oraz C dwie styczne BE oraz CF, zaś przez środek A równoległą do nich AD. Toczmy następnie koło większe po stycznej CF. Przypuśćmy, że po jednym obrocie dużego koła punkt C znajdzie się w punkcie F. Innymi słowy zakładamy, że dłu-



Rys. 1

gość odcinka CF jest równa obwodowi koła większego, czyli okręgowi o promieniu AC. Zastanówmy się — mówi Galileusz[3] — co się stanie z mniejszym kołem oraz ze środkiem A. Ten ostatni przebiegnie niewątpliwie cały odcinek AD równy odcinkowi CF, zaś obwód mniejszego koła dotknie swymi punktami całego odcinka BE równego odcinkowi CF. W jaki więc sposób — zapytuje Galileusz — koło mniejsze może bez

[3] Galileo Galilei, *Rozmowy i dowodzenia matematyczne w zakresie dwóch nowych umiejętności dotyczących mechaniki i ruchów miejscowych*, tł. F[eliks] K[ucharzewski], Warszawa 1930, 25.

przeskakiwania przebiec drogę znacznie dłuższą od swego okręgu? Pojawia się tutaj sytuacja paradoksalna.

Jeżeli byśmy toczyli koło mniejsze po prostej stycznej BE i przypuścili, że po jednym obrocie punkt B znajdzie się w punkcie E, czyli iż odcinek BE jest równy obwodowi koła mniejszego, to wówczas także powstaje analogiczna sytuacja paradoksalna w odniesieniu do koła większego. Punkt A przejdzie drogę AD równą odcinkowi BE, zaś koło większe — drogę CF, która będąc równa drodze BE jest w oczywisty sposób mniejsza od obwodu koła większego. Można więc podobnie — za Galileuszem — zapytać w jaki to sposób może koło większe bez cofania się przebiec drogę znacznie krótszą od długości swego okręgu?

Zauważmy, że nie przedstawia trudności jednolite sformułowanie obu paradoksów, względnie, jak kto woli, dwu wersji jednego paradoksu[4]. Istota występującej tu sytuacji paradoksalnej polega, jak widzimy, na tym, że przy jednym obrocie mniejsze koło przebiega drogę większą od swego obwodu, zaś koło większe — drogę mniejszą od swego obwodu. Niewątpliwie niezbędna jest pewna doza pomysłowości, aby dojrzeć rozważany paradoks. Można przypuszczać, że wiele osób miało do czynienia z toczeniem się kół po prostej, jednakże nie potrafiono poczynić tych spostrzeżeń, które wyraźnie sformułowane znajdujemy u Galileusza.

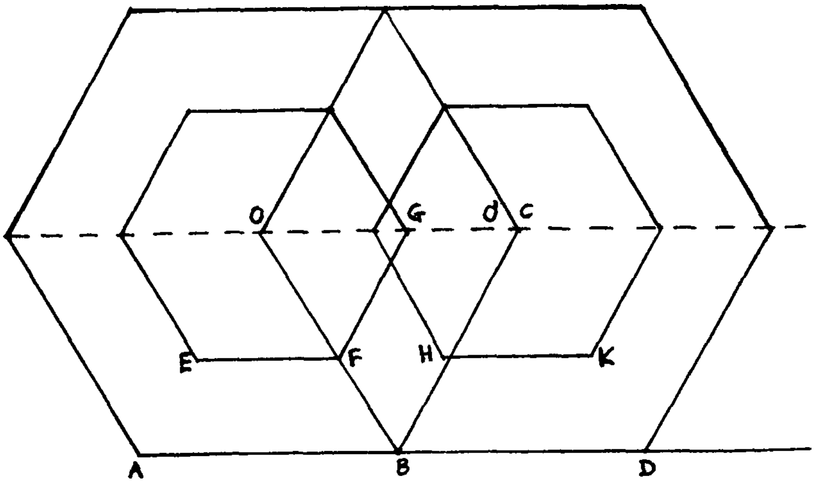
Jakie rozwiązanie powyższego paradoksu proponuje Galileusz? Aby je przedstawić zauważymy najpierw, naśladując rozumowanie Galileusza, że w przypadku toczenia się wielokątów foremnych po prostej analogiczny paradoks nie powstaje.

Niech dany będzie sześciokąt foremny o boku AB oraz wpisany weń mniejszy sześciokąt foremny o boku EF. Załóżmy, że bok EF jest równoległy do boku AB. Przypuśćmy, że sześciokąt większy toczy się po prostej będącej przedłużeniem

---

[4] Można im nadać następującą postać: Jeżeli około środka A zakreślimy dwa koła współśrodkowe związane razem i jeżeli z końców ich średnic B oraz C poprowadzimy dwie styczne BE oraz CF, zaś przez środek A równoległą AD i jeżeli będziemy toczyć koło większe [mniejsze] po CF [BE], to po jednym obrocie cóż się stanie z małym [większym] kołem i ze środkiem? Ten ostatni przebiegnie niewątpliwie całą długość AD, a obwód małego [większego] koła dotknie swymi punktami całej linii BE [CF]. W jaki więc sposób może mniejsze [większe] koło, bez przeskakiwania [cofania się], przebiec drogę tak znacznie dłuższą [krótszą] od swego okręgu?

boku AB. Rozważmy ruch sześciokąta większego polegający na jego obrocie o kąt równy sześćdziesiąt stopni dokoła punktu B (rys. 2). Wówczas bok BC zajmie położenie BD (tj. punkt C pokryje się z punktem D), zaś bok FG mniejszego sześciokąta zajmie położenie HK (tj. punkt F przejdzie na punkt H, zaś punkt G przejdzie za punkt K). Środek sześciokąta O zajmie położenie O' przesuwając się na odległość równą bokowi AB. W tym przypadku boki EF oraz HK są rozłączne; dokładniej: między bokiem EF oraz bokiem HK pojawia się



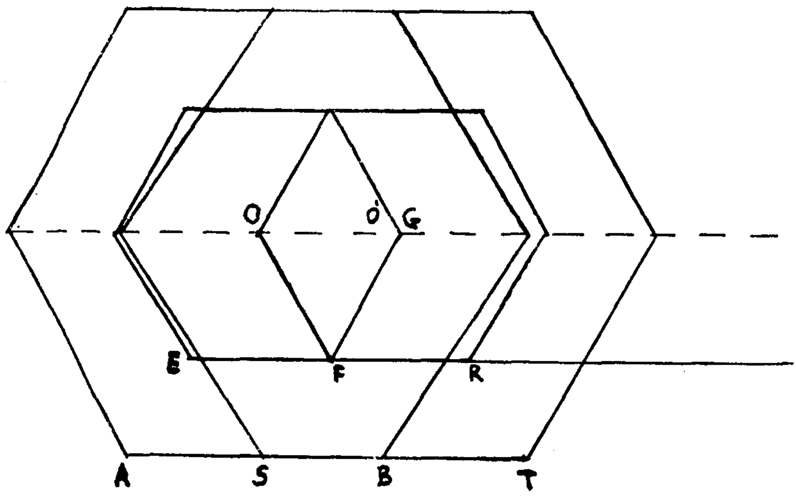
Rys. 2

odcinek FH, który przy ruchu większego sześciokąta został „przeskoczony" przez mniejszy sześciokąt. Nie ma w tym nic dziwnego i rozważając sześciokrotne powtórzenie opisanego ruchu stwierdzamy, że żaden paradoks analogiczny do paradoksu większego i mniejszego okręgu nie powstaje [5].

Podobna sytuacja ma miejsce w przypadku kiedy mniejszy sześciokąt zrobi jeden elementarny ruch. Przypuśćmy mianowicie, że mniejszy sześciokąt obróci się o kąt równy sześć-

[5] Galileo Galilei, dz. cyt., 24—25.

dziesiąt stopni dokoła punktu F (rys. 3). Wówczas bok FG zajmie położenie FR (tj. punkt G pokryje się z punktem R), zaś bok BC większego sześciokąta zajmie położenie ST (tj. punkt B przejdzie na punkt S, punkt C przejdzie na punkt T). Środek sześciokąta O znajdzie się w punkcie O' przebywając drogę równą długości boku EF. W tym przypadku boki AB oraz ST większego sześciokąta mają część wspólną równą odcinkowi SB, o który przy ruchu mniejszego sześciokąta zostaje „cofnięty" bok BC. Nie ma w tym nic dziwnego i rozważając sześciokrotną iterację opisanego ruchu elemen-



Rys. 3

tarnego mniejszego sześciokąta stwierdzamy, że żaden paradoks analogiczny do paradoksu większego i mniejszego okręgu nie powstaje [6].

Zanotujmy, że skonstatowanie nieparadoksalności sytuacji w przypadku toczenia się po prostej związanych ze sobą sześciokątów foremnych (większego i mniejszego) wydaje się być pouczające i dziś choćby ze względu na charakter kształ-

[6] Tamże.

cący naszą wyobraźnię w odniesieniu do ruchu prostych figur geometrycznych.

Przed chwilą rozważaliśmy toczenie się sześciokątów foremnych (większego i mniejszego) po prostej. Podobne rozumowanie prowadzi do wniosku, że z analogiczną sytuacją mamy do czynienia w przypadku wielokątów foremnych o dowolnej liczbie boków. Przypuśćmy, że wielokąt większy toczy się po prostej. Wówczas kolejne boki wielokąta mniejszego „przeskakują" odcinki równe jego bokom; innymi słowy mamy do czynienia z ciągiem odcinków „zajętych" i „przeskoczonych". Niech teraz wielokąt mniejszy toczy się po prostej. Wówczas kolejne boki wielokąta większego „cofają się" o odpowiednią część swej długości. Mamy więc do czynienia z zachodzeniem na siebie boków wielokąta większego.

Galileusz traktuje okrąg koła (względnie koło) jako wielokąt foremny o nieskończonej liczbie boków. Wychodząc z tego założenia oraz z poczynionego wyżej spostrzeżenia w odniesieniu do toczenia się wielokątów foremnych po prostej zauważa, że podczas toczenia się większego okręgu po prostej opisywana linia jest równa nieskończenie wielu bokom koła większego oraz nieskończenie wielu bokom koła mniejszego poprzedzielanym nieskończoną ilością miejsc pustych. Podobnie jeżeli toczy się koło mniejsze, to opisywana linia jest równa nieskończenie wielu bokom koła mniejszego oraz nieskończenie wielu bokom koła większego, przy czym nieskończenie wiele boków koła większego zachodzi na siebie. Konsekwentnie paradoks nie powstaje [7].

Jak należy ocenić Galileuszową propozycję rozwiązania paradoksu dużego i małego koła? Wydaje się, że z psychologicznego punktu widzenia należy uznać ją za trafną. Z metodologicznego oraz merytorycznego punktu widzenia budzi ona raczej wątpliwości. U podłoża rozumowania Galileusza znajduje się założenie, że własność przysługująca nieskończonemu ciągowi figur przysługuje także figurze granicznej. A tak przecież w ogólności nie jest. Wystarczy w tym celu rozważyć ciąg funkcji (bądź ciąg wykresów funkcji) danych wzorem $y = x^n$, gdzie $0 \leqslant x \leqslant 1$. Dla każdego $n = 1, 2, \ldots$ funkcja $y = x^n$ jest ciągła (wykres funkcji jest zbiorem spójnym). Natomiast granica powyższego ciągu, tj. funkcja $f(x) = \lim x^n$ przy n dążącym do nieskończoności, nie jest funkcją ciągłą (jej wykres nie jest zbiorem spójnym). Dziś jest to fakt dob-

[7] Tamże, 26—27.

rze znany [8]. Nie należy jednakże zbyt mocno podkreślać pomyłki popełnionej w tym przypadku przez Galileusza. Nie znał on przecież pojęcia granicy [9]. Trzeba mieć na uwadze fakt, że ścisłe rozważania na temat granicy funkcji i jej własności nastąpiły dopiero, z grubsza biorąc, w 200 lat po Galileuszu. Nie rozporządzał on więc odpowiednim zasobem faktów matematycznych w odniesieniu do granic ciągów funkcji, względnie do granic ciągów zbiorów. Wypada natomiast zwrócić uwagę na dwa co najmniej aspekty wiążące się z omawianym paradoksem. Po pierwsze chodzi o to, że Galileusz zajął nową postawę wobec nieskończoności. Potraktował ją nie jako wielkość, lecz jako zbiór elementów (niepodzielnych). Zajęcie tego rodzaju postawy jest wyraźnie widoczne z przytoczonych wyżej rozważań [10]. Konsekwentnie można więc wnosić, że Galileusz opowiedział się za nieskończonością aktualną, czyli, ujmując rzecz ogólnie, za nieskończonością kategorematyczną. Po drugie, przeprowadzone przez siebie rozważania geometryczne w odniesieniu do toczenia się wielokątów foremnych oraz kół po linii prostej zastosował do wyjaśniania rozrzedzania i zagęszczania się ciał materialnych [11].

3. PARADOKS OKRĘGU I PUNKTU

Rozważmy prostokąt utworzony z dwu przystających do siebie kwadratów. Wpiszmy weń półokrąg o promieniu równym boku kwadratu, zaś o środku leżącym na górnej podstawie prostokąta. Niech prostokąt obraca się wokół wspólnego boku obu kwadratów. W wyniku obrotu otrzymamy walec z wpisaną weń półkulą. Usuńmy z walca półkulę. Pozostałą bryłę nazwijmy miską. Rozważmy jeszcze stożek prosty wpisany w rozważany walec, którego podstawą jest podstawa miski. Łatwo można wykazać, że objętość miski jest równa objętości stożka, a także iż dowolna płaszczyzna równoległa do podstawy walca odcina z miski oraz stożka części o tej samej objętości i o tym samym polu podstaw. Innymi słowy, wierzch miski i wierzch stożka, jak również ich podstawy, są odpowiednio sobie równe. Zbliżajmy się teraz z odcinającymi

---

[8] Zob. np. K. Kuratowski, *Rachunek różniczkowy i całkowy, Funkcje jednej zmiennej*, Warszawa 1967, 87—88.

[9] Por. C. B. Boyer, *Historia rachunku różniczkowego i całkowego i rozwój jego pojęć*, tł. St. Dobrzycki, Warszawa 1964, 168.

[10] Por. także C. B. Boyer, dz. cyt., 169.

[11] Galileo Galilei, dz. cyt., 37—38.

płaszczyznami do górnej podstawy pierwotnego walca. W każdym momencie zachowania będzie równość objętości wymienionych figur oraz pól ich podstaw. W przypadku miski odcinana część figury przejdzie w okrąg koła, zaś w przypadku stożka — w jeden punkt, w jego wierzchołek. A ponieważ są one ostatnimi resztami i śladami wielkości równych, dlaczego nie mamy uważać ich za równe? Na podstawie takich rozumowań wnosimy, że wszystkie okręgi kół, jakkolwiek byłyby różne, mogą być nazwane równymi, a każdy z nich równy jednemu punktowi [12]. W ten sposób powstaje paradoks, który może zostać nazwany paradoksem okręgu i punktu.

W jaki sposób Galileusz ustosunkowuje się do powyższego paradoksu? Wydaje się, że zajmuje stanowisko agnostyczne w odniesieniu do nieskończoności. Uważa, że nieskończoność sama przez się jest równie niezrozumiała, jak i cząstki niepodzielne. Jeżeli chcemy utworzyć linię z punktów niepodzielnych, to musimy jednocześnie badać nieskończoność i niepodzielność. Naszym skończonym umysłem nie możemy rozważać nieskończoności. Zwykliśmy bowiem przypisywać jej te własności, które obserwujemy w rzeczach skończonych i ograniczonych. A te tutaj się nie nadają. Pojęcia większości, równości i mniejszości nie mogą być stosowane do nieskończoności. Niepodobna jest mówić o większych, równych lub mniejszych nieskończonościach [13]. Sformułowane przeświadczenie Galileusz uzasadnia spostrzeżeniem, że liczby całkowite dają się wzajemnie jednoznacznie (mówiąc dzisiejszym językiem) odwzorować na ich kwadraty. Jego zdaniem znaczy to, że wielkość kwadratów nie jest ani większa ani mniejsza od wielkości liczb całkowitych. Uważa, że pojęcia większości, równości oraz mniejszości stosują się tylko do ilości skończonych, nie stosują się natomiast nie tylko między nieskończonościami, lecz także między nieskończonością a skończonością [14].

Istnieje opinia głosząca, że Galileusz sformułował omawiany paradoks nie w tym celu, aby miał wierzyć, że okrąg koła jest tak wielki, jak jego punkt środkowy, lecz raczej w charakterze podniety do dalszych rozważań [15]. Sugestia ta wydaje się być słuszna. W rozumowaniu Galileusza można widzieć in-

[12] Tamże, 28—29.
[13] Tamże, 31.
[14] Tamże, 33.
[15] B. Bolzano, *Paradoksy nieskończoności*, tł. Ł. Pakalska, PWN, 1966, 95, 98.

tuicję (czy może praintuicję) pojęcia homotopii. Przypomnijmy to pojęcie [16].

Niech X oraz Y będą dwoma przestrzeniami. Niech f oraz g będą dwoma przekształceniami przestrzeni X w przestrzeni Y. Wyrażając się intuicyjnie powiemy, że przekształcenia te są homotopijne, jeżeli dają się one w przestrzeni Y w sposób ciągły odwzorować wzajemnie w siebie. Mówiąc ściślej powiemy, że f oraz g są homotopijne w Y, jeżeli istnieje przekształcenie ciągłe iloczynu kartezjańskiego przestrzeni X przez domknięty odcinek [0,1], takie, że $F(x,0) = f(x)$ oraz $F(x,1) = g(x)$ dla każdego x należącego do X.

Wykazuje się, że relacja homotopijności na zbiorze ciągłych przekształceń przestrzeni X w przestrzeń Y jest relacją równoważności.

Wprowadza się także pojęcie typu homotopijnego dwu przestrzeni. Mówimy, że przestrzenie X oraz Y mają ten sam typ homotopii, jeżeli istnieje ciągłe przekształcenie f przestrzeni X w przestrzeń Y oraz ciągłe przekształcenie g przestrzeni Y w przestrzeń X takie, że złożenie przekształceń gf jest homotopijne z przekształceniem tożsamościowym na przestrzeni X, zaś złożenie przekształceń fg jest homotopijne z przekształceniem tożsamościowym na przestrzeni Y. O przestrzeniach X oraz Y. mówi się także, że są homotopijnie równoważne. Okazuje się, że relacja posiadania tego samego typu homotopii jest relacją równoważności w klasie wszystkich przestrzeni.

Przestrzeń homotopijnie równoważna z punktem zwie się przestrzenią ściągalną. Mówiąc intuicyjnie, przestrzeń sciągalna to taka, którą można zdeformować w sposób ciągły w sobie do jednego punktu.

Paradoks Galileusza odnośnie do okręgu (bądź koła) i punktu znajduje więc wyjaśnienie i rozwiązanie zarazem. Tarcza koła jest ściagalna w sobie do dowolnego ze swych punktów. Podobnie okrag koła jest ściągalny w tarczy koła do dowolnego z jej punktów. Można natomiast wykazać, że okrąg koła nie jest ściągalny w sobie do jednego punktu. Ten ostatni przykład wskazuje na potrzebę wyróżniania przestrzeni, w której dokonuje się deformacji, jak też na subtelność współczesnych rozważań w odniesieniu do przestrzeni ściągalnych [17].

[16] Zob. np. R. Engelking, K. Sieklucki, *Geometria i topologia*, Część II: *Topologia*, Warszawa 1980, 59—68 a także Czes Kosniowski, *A first course in algebraic topology*, Cambridge 1980, Chapter 13.

[17] Pojęcie przestrzeni sciągalnej wiąże się z szerszym pojęciem retraktu oraz retraktu deformacyjnego. Pojęcia te wprowadził K. Bor-

Wróćmy jeszcze na chwilę do przykładu Galileusza. Rozważa on miskę i stożek o wspólnej podstawie będącej tarczą koła. Odcina płaszczyznami równoległymi do podstawy obu figur część miski oraz część stożka. Zbliżając się górnej podstawy otrzymuje, odpowiednio, okrąg koła oraz punkt. Łatwo jest wskazać przekształcenie ciągłe, które w rozważanej figurze przeprowadzi okrąg koła w wierzchołek stożka. Wystarczy w tym celu okrąg koła „zsunąć" na dolną podstawę, a następnie „podnosić" go po powierzchni stożka odpowiednio zmniejszając aż dojdziemy do wierzchołka stożka. Podobnie można wskazać na przekształcenie, które przeprowadzi całą miskę na wierzchołek stożka. Nie jest rzeczą trudną zauważyć, że miska jest przestrzenią ściągalną w sobie, a więc tego samego typu co przetrzeń jednopunktowa.

4. PARADOKS OKRĘGU I PROSTEJ

Rozważmy teraz miejsce geometryczne punktów płaszczyzny, których stosunek odległości od dwu jej punktów stałych jest stały. Wprowadźmy oznaczenia. Niech A oraz B będą dwoma danymi stałymi punktami płaszczyzny. Niech O oznacza środek odcinka AB. Niech C będzie punktem położonym we wnętrzu odcinka OB. Interesuje nas miejsce geometryczne punktów płaszczyzny, dla których stosunek odległości od punktu A do odległości od punktu B jest równy stosunkowi długości odcinka AC do długości odcinka CB. Proste rozumowanie poucza, że szukanym miejscem geometrycznym będzie pewien okrąg koła przechodzący przez punkt C o środku położonym na prostej AB. Im bliżej punktu B znajduje się punkt C, tym mniejszy promień będzie miał wspomniany okrąg, im zaś punkt C będzie bliżej środka O, tym okrąg będzie miał większy promień. Zapytujemy co się stanie, gdy punkt C pokryje się z punktem O? Wówczas stosunek wspomnianych odległości będzie równy jedności i otrzymamy symetralną odcinka, czyli prostą prostopadłą do odcinka AB przechodzącą przez jego środek. Poszukiwanym miejscem geometrycznym nie będzie więc okrąg koła, lecz prosta. Jeżeli więc punkt C zbliża się do punktu O, to okręgi stają się coraz większe, a więc dążą do okręgu nieskończenie wielkiego, który jednak nie zakrzywia się i okazuje się być linią prostą [18].

suk w latach trzydziestych. Zob. np. K. Borsuk, *Theory of retracts*, Warszawa 1967.

[18] Galileo Galilei, dz. cyt., 36—37.

Galileusz zwraca tu uwagę na różnicę, jaka zachodzi między, jak mówi, kołem skończonym i nieskończonym. Uważa, że koło nieskończenie wielkie zmienia swą istotę; przestaje być kołem. Z tego faktu wyprowadza wniosek, że nie może istnieć żadne koło nieskończone. Z podobnych racji nie może istnieć żadna kula nieskończona. Koło nieskończone bowiem nie jest kołem w znaczeniu zwykłym, nie zakrzywia się przecież. Podobnie kula nieskończona nie jest kulą w znaczeniu zwykłym, nie jest przecież zakrzywiona. Paradoks obecny polega na tym (tak przynajmniej można go odczytać), że nieskończone koło przestaje być kołem. Ale czy może coś przestać być sobą? Toteż zaproponowane rozwiązanie paradoksu orzeka, że nie istnieją nieskończone koła, a także nieskończone kule, jak również nieskończone ciała. Krótko można powiedzieć, że nie ma nieskończonych kół, nie ma nieskończonych kul itp.[19]. Koło jest zawsze kołem, zaś prosta jest zawsze prostą. Inaczej nie może być. Wobec tego paradoks ginie.

Istotnym elementem argumentacji antyparadoksalnej jest więc zgoda odnośnie do niemożliwości istnienia tworów omawianego rodzaju, a więc tworów będących nieskończonymi kołami, nieskończonymi kulami itp.

Zauważmy, że Galileusz dyskutując obecny paradoks nawiązuje do topienia się ciał, przechodzenia niespójnych ciał stałych (a nawet rozdrobnionych na cząsteczki niepodzielne) w stan płynny, a więc przyjmujących postać ciągłą (czy może lepiej: postać spójną). Czyni również aluzję do tezy, że przy szukaniu nieskończoności wśród liczb znajdujemy w końcu jedność[20]. Ta bowiem spełnia wszystkie warunki jakie winna spełniać nieskończoność[21].

Paradoks okręgu i prostej dotyczy problemu powstawania tworu nieskończonego, tworu o innych własnościach w porównaniu do własności tworów z których powstaje. Galileusz rozważa przejście z dziedziny tworów skończonych do tworu nieskończonego. Formułując swój paradoks dał wyraz przeświadczeniu odnośnie do możliwości powstawania tworów nieskończonych istotnie różnych od tworów skończonych, z których powstają te pierwsze. Nasuwa się w naturalny sposób myśl uogólnienia spostrzeżenia Galileusza. Wydaje się, że można mówić o powstawaniu nowych co do istoty tworów z tworów już istniejących. Wszystkie te twory mogą być two-

[19] Tamże, 37.
[20] Tamże, 37, 35.
[21] Tamże, 35.

rami skończonymi w sensie wielkości, lub inaczej tworami o skończonej średnicy (czyli maksymalnej odległości między ich punktami krańcowymi). Dla ilustracji rozważmy trójkąt równoboczny oraz koło. Załóżmy, że trójkąt jest wpisany w koło. Nie jest rzeczą trudną wskazać przekształcenie, które w sposób wzajemnie jednoznaczny i obustronnie ciągły odwzoruje rozważane koło na trójkąt, względnie trójkąt dany na koło na nim opisane. Z metrycznego punktu widzenia koło i trójkąt różnią się od siebie istotnie. Czym wytłumaczyć przyjęcie przez koło formy trójkąta równobocznego, względnie odwrotnie — przyjęcie przez trójkąt równoboczny formy koła? W dyskutowanym paradoksie można przeto widzieć problematykę powstawania rzeczy nowych. Galileusz stwierdził jedynie fakt powstawania nowego tworu (i to nieskończonego). Nie zajął się zagadnieniem mechanizmów, które by wyjaśniały rezultat ich działań tworzących nowe przedmioty. Być może, że w przypadku rozważań geometrycznych jest to zbędne. Ale zagadnienie samo w sobie, a więc w odniesieniu również do tworów rzeczywistych, badanych przez przyrodnika, jest ważne i aktualne. Wystarczy w tym miejscu wspomnieć choćby o zmianie w poglądach naukowych na przebieg ewolucji prowadzącej do powstania człowieka, jak też samej formy jej zachodzenia. Ciągłość czy skokowość zmian, kierunek czy kierunki rozwoju — oto otwarte dziś pytania w zakresie szeroko rozumianej nauki o życiu.

Wspomniane nieco wyżej przechodzenie rozdrobnionych ciał stałych w postać płynną, ciągłą może być odczytane jako ilustracja sposobu, w jaki usiłowano wyobrazić sobie przechodzenie od wielkości skończonych do wielkości nieskończonych. Nieskończony zbiór niepodzielnych nie jest podobny do niesłychanie drobnego proszku, lecz do czegoś w rodzaju zlewania się części w jedną całość, jak w przypadku cieczy [22].

5. UWAGI ZAMYKAJĄCE

Dokonajmy teraz podsumowania rozważań tyczących się przedstawionych i przedyskutowanych paradoksów. Zanim jednak do tego przystąpimy poczynimy wpierw jeszcze pewne uwagi. Uwyraźnijmy najpierw fakt polegający na tym, że Galileusz rozważał zbiory nieskończone w dwu aspektach: po pierwsze, zbiory nieskończone jako mnogości, a więc jako

[22] C. B. Boyer, dz. cyt., 170.

zbiory „same w sobie" oraz po drugie, zbiory nieskończone jako tzw. zbiory punktowe, a więc zbiory wraz z topologią. Galileusz nie posługiwał się, rzecz zrozumiała, terminologią zastosowaną przed chwilą, nie wyróżniał także od siebie wspomnianych dwu aspektów, jednakże konkretne ilustracje, którymi się posługiwał przy swych rozważaniach pozwalają na dokonanie tego podziału. Badając zbiory nieskończone Galileusz posługiwał się zbiorami liczb całkowitych, ich kwadratów itp., a także odcinkami geometrycznymi, kołami itd. Galileusz, jak pamiętamy, był zdania, że nie można porównywać (co do wielkości) zbiorów skończonych z nieskończonymi, jak też zbiorów nieskończonych między sobą. Dzisiaj sprawę tę widzimy inaczej. Przyjmujemy, że jest sens mówić o zbiorach nieskończonych różnych mocy, a także określać między nimi relację mniejszości, względnie większości. Czy wobec tego stwierdzenie Galileusza orzekające nieporównywalność zbiorów nieskończonych należy uznać po prostu za błąd? Wydaje się, że tak nie musi być. W omawianym sformułowaniu Galileusza można dopatrywać się niewyraźnej jeszcze intuicji pojęcia, któremu nadano w początkach obecnego wieku nazwę homoi nieporównywalnych. Przypomnijmy pojęcie homoi, które bywa również nazywane wymiarem w znaczeniu Frécheta. Niech A oraz B będą dwoma przestrzeniami. Jeżeli A jest homeomorficzne z pewną częścią B oraz B jest homeomorficzne z pewną częścią A, to o przestrzeniach A oraz B mówimy, że mają tę samą homoję. Np. domknięty odcinek oraz prosta euklidesowa, jak łatwo widzieć, mają tę samą homoję. Jeżeli zbiory są między sobą homeomorficzne, to mają oczywiście tę samą homoję. Nie jest jednak odwrotnie. Zbiory mające tę samą homoję nie muszą być homeomorficzne. Bliższa analiza wykazuje, że istnieją homoje nieporównywalne, innymi słowy, nie każde dwie przestrzenie dadzą się porównać co do homoi. Np. zbiór wszystkich punktów dwu przecinających się odcinków nie daje się porównać co do homoi ze zbiorem wszystkich punktów okręgu koła [23]. Jeżeli teraz tezę o nieporównywalności zbiorów nieskończonych zawęzimy do pewnych zbiorów punktowych, to możemy uznać słuszność stanowiska zajętego przez Galileusza.

Sprawa następna to zagadnienie wielkości zmiennych. W tym przypadku Galileusz uważał, że między skończonym a nie-

---

[23] Zob. W. Sierpiński, *Wstęp do teorii mnogości i topologii*, Warszawa 1965, 100—103. Pojęcie *homoi* wprowadził P. Mahlo.

skończonym istnieje jeszcze coś trzeciego, pośredniego, mianowicie to, co odpowiada każdej danej liczbie. Możemy przecież przyznać danej linii sto, tysiąc, dziesięć tysięcy części skończonych, ale nie możemy jej podzielić na nieskończenie wiele części. Mieści ona w sobie nieskończenie wiele punktów [24]. Wielkość podzielną może utworzyć tylko nieskończenie wiele niepodzielnostek [25]. Mamy tutaj względnie wyraźne opowiedzenie się za składaniem się kontinuum z nieskończenie wielu punktów i jednocześnie zaprzeczenie, by składało się ono z nieskończenie wielu pododcinków (zwłaszcza równej długości). Sformułowania te należy obecnie uznać za słuszne w pewnym tylko stopniu. Adakwatne ujęcie zagadnienia wymaga operowania pojęciem nieskończoności przeliczalnej oraz nieskończoności mocy continuum. Galileusz posługiwał się wymienionymi pojęciami w sposób intuicyjny, nie sprecyzował ich przez podanie odnośnych określeń. Ujmując nieskończoność nie od strony wielkości, lecz od strony mnogości dokonał istotnego kroku naprzód w obróbce intelektualnej pojęcia nieskończoności. Jednakże nadal ujmował to pojęcie intuicyjnie jako zbiór, którego liczba elementów jest różna od każdej liczby całkowitej dodatniej. Dopiero R. Dedekind [26] zaproponował określenie zbioru nieskończonego nie posługujące się pojęciem liczby całkowitej. Według tej propozycji zbiór jest nieskończony, jeżeli zawiera część właściwą równoliczną z nim samym. Za czasów Galileusza było jeszcze za wcześnie na sformułowanie tego rodzaju określenia. W rozważaniach Galileusza znaleźć jednak można wiele intuicji związanych z poruszanym tu problemem. W celu porównania z obecną sytuacją umysłową można dodać, że dziś jeszcze pomimo osiągnięć z zakresu teorii mnogości i topologii nie zawsze odróżnia się np. pojęcie ciągłości od pojęcia spójności. Tym bardziej więc nic dziwnego, że podobna sytuacja zachodziła w czasach Galileusza i w jego rozważaniach tyczących się nieskończoności.

Po tych uwagach przejdźmy do podsumowania rozważań odnoszących się do paradoksów Galileusza.

Każde rozumowanie prowadzące do paradoksu zakłada tezę głoszącą, że granica tworów geometrycznych mających własność W także tę własność posiada. Pamiętamy, że teza ta w całości swej ogólności nie jest słuszna. Galileusz nie roz-

---

[24] Galileo Galilei, dz. cyt., 34.
[25] Tamże, 31.
[26] *Was sind und was sollen die Zahlen*, Braunschweig 1881.

porządzał danymi typu geometrycznego, które by jej słuszność kwestionowały. Toteż można optować za takim odczytaniem paradoksów, aby widzieć w nich negację wspomnianej tezy. Ponieważ rozumowanie oparte na niej prowadzi do paradoksu (np. punkt jest równy okręgowi koła), przeto należy ją odrzucić. Z podobną sugestią wystąpił, jak pamiętamy, B. Bolzano. Piszącemu te słowa wydaje się jednak, że w paradoksach Galileusza należy raczej widzieć zaczątki intuicji w odniesieniu do takich pojęć jak spójność zbioru, homotopia, homoja, zbiory o średnicy skończonej bądź nieskończonej, nie zaś negację ogólnej tezy o zachowywaniu się pewnych własności przy przechodzeniu do granicy. Galileuszowi chodziło o przebadanie, jeśli tak można powiedzieć, istoty nieskończoności. Trzeba przyznać, że nie udało mu się to w pełni. Było na to jeszcze za wcześnie. Ale pewne wyniki uzyskał ujawniające jego głębokie intuicje tyczące się zbiorów nieskończonych. Znajduje się on niewątpliwie na drodze wiodącej w kierunku B. Bolzano i G. Cantora.

Zapytajmy, czym więc jest nieskończoność dla Galileusza, jak ją ujmował? Na pytanie to odpowiedzmy w postaci następujących tez:

1. Istnieją zbiory nieskończone aktualnie.
2. Wielu zbiorom można przypisać charakter nieskończony, ale nieskończoność jest jedna; w najwłaściwszy sposób jest nią jedność.
3. Wielkość podzielna składa się z nieskończenie wielu niepodzielnostek.
4. Dzielenie w nieskończoność wielkości podzielnej nie doprowadzi do niepodzielnostek.
5. Badanie wielkości podzielnej, a więc tym samym badanie nieskończoności, jest nierozłączne od badania niepodzielnostek (i odwrotnie).
6. W przyrodzie nie ma przejścia od wielkości skończonych do nieskończonych.

Tezy powyższe wydają się oddawać istotę rozważań Galileuszowych tyczących się nieskończoności. Do takiego rodzaju tez doprowadziły Galileusza rozważania o rozkładzie kwadratów i sześcianów w ciągu liczb całkowitych, o rozkładzie średnich między kwadratami i sześcianami, jak też zanegowanie istnienia w odcinku nieskończenie wielu pododcinków oraz przedstawione wyżej paradoksy i rozumowania do nich prowadzące.

Galileusz był empirykiem, wychodził z doświadczenia i na nim polegał. Ale zarazem swoje abstrakcyjne rozważania o nieskończoności łączył z zagadnieniem zagęszczania i rozrzedzania się ciał. Omówione paradoksy wskazują na ogromną pomysłowość i wnikliwość ujawnioną przezeń w licznych rozważaniach. Przeszkodą dla pomysłowości Galileusza zdaje się być zbyt słabo opracowana za jego czasów matematyczna teoria zbiorów (a ściślej, jej brak), a także brak nowoczesnego ujęcia geometrii. Galileusz znał jedynie geometrię euklidesową. W tej dziedzinie miał głębokie i dobre intuicje. Nie miał ich jednak, tak wydaje się wynikać z jego rozważań, w zakresie geometrii rzutowej (jak dziś byśmy powiedzieli). Na przykładzie Galileusza widać jak ważne jest współgranie myśli z empirią. Przy poznawaniu świata nie wystarczy „mocna" empiria ze „słabą" myślą, podobnie — „mocna" myśl ze „słabą" empirią; potrzebne jest i jedno i drugie na odpowiednio wysokim poziomie. I tego także uczy nas dzisiaj Galileusz[27].

GALILEO'S PARADOXES

(Summary)

The aim of the paper is to present and discuss three paradoxes formulated by Galileo. They are: 1) The paradox of the smaller and langer circles, 2) The paradox of the circle and the point, 3) The paradox of the circle and the line. Both the argumentations leading to the formulation of the above paradoxes and Galileo's attempt at solving them seem to indicate his deep knowledge of geometrical facts in which we can find at least the nuclei of intuition concerning arithmeticising the continuum, concerning the concept of homotopy and the concept of homoi.

[27] Zanotujmy, że na XIII Międzynarodowym Kongresie Historii Nauki (Moskwa, 18—24 sierpnia 1971) na sekcji V poświęconej Historii Matematyki i Mechaniki wygłoszono tylko dwa referaty związane z osobą Galileusza. Oto one: G.C. Omer and E.E. Grissom, *A putative portrait of Galileo by Ribera (Trudy XIII Mieżdunarodnogo Kongressa po Istorii Nauki,* Sekcija V, Moskwa 1974, 239—246); E. McMullin, *The conception of science underlying Galileo's Discorsi* (tamże, 250—258). Nie trzeba przypominać, jak się wydaje, powszechnej opinii głoszącej, że Galileuszowi zawdzięczamy ducha współczesnej wiedzy, opartej na harmonii doświadczenia z teorią, z naciskiem na jej ujęcie matematyczne (D.J. Struik, *Krótki zarys historii matematyki do końca XIX wieku,* Warszawa 1963, 140).