Anna Lemańska

Twierdzenie Skolema-Löwenheima i jego konsekwencje

Studia Philosophiae Christianae 22/2, 99-108

1986

Studia Philosophiae Christianae
ATK
22(1986)2

ANNA LEMAŃSKA

TWIERDZENIE SKOLEMA-LÖWENHEIMA I JEGO KONSEKWENCJE

1. Wstęp. 2. Wersje twierdzenia Skolema-Löwenheima. 3. Przyczyny paradoksalności twierdzenia. 4. Uwagi zamykające.

1. WSTĘP

Do ważnych wyników w dziedzinie badań nad teoriami sformalizowanymi I rzędu w logice klasycznej zalicza się twierdzenie Gödla o pełności, twierdzenie o zwartości i twierdzenie Skolema-Löwenheima. Twierdzenie Gödla o pełności orzeka, że konsekwencje logiczne przyjętych aksjomatów rachunku predykatów są tautologiami oraz że każda tautologia posiada dowód formalny [1]. Twierdzenie o zwartości mówi, że zbiór formuł jest niesprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy każdy jego skończony podzbiór jest niesprzeczny [2]. Twierdzenie Skolema-Löwenheima może być ogólnie sformułowane następująco: jeżeli teoria T jest niesprzeczna, to posiada modele dowolnej mocy nieskończonej [3].

W dwóch pierwszych twierdzeniach zawarte są ważne i jednocześnie oczekiwane własności teorii sformalizowanych. Na-

[1] K. Gödel, *Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls*, Monatshefte für Mathematik und Physik, 37(1930), 349—360.

[2] Z twierdzenia o pełności wynika wersja teoriomodelowa twierdzenia o zwartości: zbiór formuł ma model wtedy i tylko wtedy, gdy każdy jego skończony podzbiór ma model. Ta wersja jest równoważna twierdzeniu o ideale pierwszym, w dowodzie którego korzysta się z aksjomatu wyboru.

[3] Twierdzenie w pierwotnej wersji brzmiało: jeżeli formuła jest spełniona w niepustej dziedzinie, to jest spełniona w dziedzinie przeliczalnej. Podał je L. Löwenheim w pracy: *Über Möglichkeiten im Relativkalkül*, Mathematishe Annalen, 76(1915), 447—470. Dowód tego twierdzenia uprościł i wzmocnił Th. Skolem, *Logish-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Sätze nebst einem Theoreme über dichte Mengen*, Skrifter utgit av Videnskapsselskapet i Kristiania, I. Mathematisk-naturvidenskabilig klasse, 4(1920), 1—36, pokazując, iż wymieniona własność zachodzi dla przeliczalnie wielu formuł.

tomiast twierdzenie Skolema-Löwenheima wydaje się paradoksalne. Głosi bowiem ono, iż żadna teoria sformalizowana nie opisuje tylko jednej (z dokładnością do izomorfizmu) dziedziny matematycznej. Jest to rezultat do pewnego stopnia niepożądany, gdyż w niektórych przypadkach dąży się do tego, aby teoria sformalizowana w miarę adekwatnie ujmowała własności tylko jednej określonej dziedziny. Zgodnie z twierdzeniem Skolema-Löwenheima okazuje się to niewykonalne. Nadto z tego twierdzenia uzyskujemy zaskakujące wnioski. Skoro każda teoria sformalizowana posiada modele dowolnych mocy, przeto zarówno arytmetyka Peano, jak i teoria mnogości mają modele małych jak i dużych mocy, a przecież chcielibyśmy, aby pierwsza miała modele tylko małych mocy, zaś druga — dużych mocy [4].

Wymienione trzy twierdzenia są ze sobą powiązane. Zostanie to ukazane w tym opracowaniu. Podjęta będzie także próba wyjaśnienia przyczyn paradoksalnych rezultatów płynących z twierdzenia Skolema-Löwenheima. W tym celu przeanalizujemy jego treść oraz środki, z których korzysta się w dowodzie. Należy od razu zaznaczyć, iż właściwie mamy do czynienia nie z jednym, a z całą grupą twierdzeń, którą określa się jako twierdzenia Skolema-Löwenheima mimo, że większość z nich została sformułowana i udowodniona przez różnych matematyków.

2. WERSJE TWIERDZENIA SKOLEMA-LÖWENHEIMA

Twierdzenia Skolema-Löwenheima można podzielić na dwie wersje: dolną i górną. Odnoszą się one wszystkie do języków sformalizowanych I rzędu, przeliczalnych i takich, w których symbole logiczne są interpretowane w sposób klasyczny. Podstawowa wersja twierdzenia brzmi:

Każda niesprzeczna teoria posiada model przeliczalny.

Model ten konstruuje się w dowodzie twierdzenia Gödla o pełności na termach języka sformalizowanego. Ponieważ język jest przeliczalny model ten również będzie przeliczalny [5]. Jeżeli rozpatrujemy teorię z równością, to z przytoczonej wersji można łatwo uzyskać następujące sformułowanie:

---

[4] Na paradoksalność twierdzenia pierwszy zwrócił uwagę Skolem w pracy: *Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre, Proceedings of the 5-th Scand. Math. Congress*, Helsinki 1922, 217—232.

[5] Pierwotne wersje twierdzenia zostały oczywiście udowodnione wcześniej niż twierdzenie o pełności. Co więcej dowody te sugerowały dowód

Każda niesprzeczna teoria ma model normalny[6] skończony albo przeliczalny.

Model normalny można uzyskać z dowolnego modelu przeliczalnego poprzez klasy abstrakcji relacji równoważności, która w modelu wyjściowym jest interpretacją symbolu relacji równości z języka.

Przy założeniu zasady wyborów zależnych[7] uzyskujemy wersję następującą:

Jeżeli teoria T ma model A nieskończony, to ma model B przeliczalny, który jest elementarnym podmodelem A, tzn. $B \leqslant A$ i dla dowolnej formuły i każdego ciągu elementów z B ciąg spełnia formułę w modelu B wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia ją w modelu A[8].

Można wzmocnić tę wersję tak, aby uzyskać zdanie równoważne aksjomatowi wyboru, a mianowicie:

Jeżeli teoria ma model mocy k, to ma elementarne podmodele dowolnej nieskończonej mocy mniejszej niż k[9].

Przytoczone twierdzenia są dolnymi wersjami twierdzenia Skolema-Löwenheima. Górną wersję twierdzenia można sformułować następująco:

Jeżeli teoria ma model (normalny) mocy k, to posiada modele (normalne) dowolnej mocy większej niż k.

Modele te można uzyskać poprzez dodanie do modelu wyjściowego odpowiedniej ilości stałych i rozszerzenie funkcji i relacji na te dodane stałe. Jeśli zależy nam na uzyskaniu modelu normalnego, to dodaje się do języka odpowiednią ilość stałych oraz aksjomaty mówiące, iż stałe są różne między sobą, a następnie korzysta się z twierdzenia o zwartości w wersji teoriomodelowej.

Można wzmocnić to twierdzenie, żądając dodatkowo, by nowy model był elementarnym nadmodelem wyjściowego.

Z twierdzenia Skolema-Löwenheima wynika istnienie tzw. niestandardowych modeli dla teorii sformalizowanych rzędu I,

---

twierdzenia Gödla. Obecnie w podręcznikach logiki twierdzenie Skolema-Löwenheima podaje się jako wniosek z twierdzenia o pełności.

[6] Model normalny jest to model dla teorii z równością, w którym symbol relacji równości interpretuje się jako rzeczywistą relację równości.

[7] Zasada wyborów zależnych brzmi: jeżeli X jest zbiorem, R relacją dwuargumentową taką, że dla dowolnego $x \in X$ istnieje $y \in X$, że xRy, to istnieje ciąg $x_1, x_2, \ldots \in X$ taki, że dla każdego n, $x_n R x_{n+1}$.

[8] Przytoczona wersja twierdzenia jest równoważna zasadzie wyborów zależnych.

[9] W większości dowodów wersji dolnego twierdzenia Skolema-Löwenheima korzysta się z aksjomatu wyboru.

na przykład dla arytmetyki Peano, teorii modelu liczb naturalnych czy rzeczywistych. Można jednak skonstruować przykłady takich modeli nie odwołując się do tego twierdzenia; wystarczy np. posługiwać się twierdzeniem o zwartości, bądź wykorzystać do tego celu ultrafiltry.

Wszystkie przytoczone wersje twierdzenia Skolema-Löwenheima są również prawdziwe dla teorii sformalizowanych rzędu I w języku dowolnej mocy. Dolnym ograniczeniem na moc modelu jest wtedy moc języka. Teorie takie mogą nie mieć modeli mocy „małej", w szczególności przeliczalnej.

W tym miejscu nasuwa się pytanie, czy wymienione twierdzenia zachodzą również dla innego typu języków sformalizowanych. Twierdzenie o pełności zostało udowodnione dla niektórych nieklasycznych rachunków logicznych. Dolne twierdzenie Skolema-Löwenheima również zachodzi dla większości badanych języków sformalizowanych z tym, że najmniejsza moc modelu zależy od tego języka. Natomiast twierdzenie o zwartości w wersji teoriomodelowej i górne twierdzenie Skolema-Löwenheima zachodzą rzadziej. Co więcej P. Lindström udowodnił, że jeżeli język L sformalizowany i przeliczalny jest zamknięty ze względu na koniunkcję, negację i kwantyfikator egzystencjalny oraz zachodzi dla niego dolne twierdzenie Skolema-Löwenheima i obie wymienione poniżej własności, to L jest językiem logiki klasycznej rzędu I.

a) (Górne twierdzenie Skolema-Löwenheima) Jeżeli zdanie języka L ma nieskończony model, to ma model nieprzeliczalny.

b) (Twierdzenie o zwartości) Jeżeli T jest przeliczalnym zbiorem zdań języka L i każdy skończony podzbiór T ma model, to T ma model [10].

Z twierdzenia Lindströma wynika więc, iż tylko dla języków rzędu I można jednocześnie udowodnić twierdzenie o zwartości i górne twierdzenie Skolema-Löwenheima.

Ani dolne ani górne twierdzenie Skolema-Löwenheima nie zachodzi dla teorii rzędu II, w których interpretuje się w sposób absolutny relację należenia elementu do zbioru. Można więc w takim języku zaksjomatyzować teorię modelu liczb naturalnych lub rzeczywistych tak, aby aksjomaty wyznaczały jeden tylko model z dokładnością do izomorfizmu [11]. Teorie

[10] P. Lindström, *First order logic and generalized quantifier*, Theoria, 32(1966), 186—195; *On extensions of elementary logic*, Theoria, 35(1969), 1—11.

[11] Teorie te są więc kategoryczne. Z twierdzenia Skolema-Löwenheima wynika, że żadna teoria sformalizowana I rzędu nie jest ka-

te zawierają pewne aksjomaty, których nie da się wyrazić w logice I rzędu, np. aksjomat indukcji dla liczb naturalnych, czy aksjomat ciągłości dla zbioru liczb rzeczywistych. Twierdzenia o zwartości i Skolema-Löwenheima mogą nam w takich przypadkach posłużyć do udowodnienia nieaksjomatyzowalności w logice I rzędu pewnych teorii, a także do badania pojęć, które są niewyrażalne w takiej logice [12].

3. PRZYCZYNY PARADOKSALNOŚCI TWIERDZENIA

Wydaje się, że zasadniczym wnioskiem, który wypływa z twierdzenia Skolema-Löwenheima, jest, „że istnieje tylko powierzchowna zgodność między naszymi intuicyjnymi wyobrażeniami o pojęciach zbioru lub liczby całkowitej, a formalizmami, o których zakłada się, że je wyjaśniają" [13]; „intuicja nie może być w pełni sformalizowana" [14]. Języki sformalizowane rzędu I nie są w pełni adekwatne do opisu rzeczywistości matematycznej i być może pozamatematycznej. Są bowiem zbyt ubogie; przy ich pomocy można ująć tylko część własności, relacji zachodzących między badanymi obiektami.

Ta ograniczoność środków, jakimi dysponuje język sformalizowany, przeliczalny, jest jedną z głównych przyczyn paradoksalności wyników płynących z twierdzenia Skolema-Löwenheima. Można wymienić przynajmniej jeszcze trzy ważne przyczyny tego stanu rzeczy: ekstensjonalność języka sformalizowanego, paradoksalność pojęcia nieskończoności aktualnej, nieefektywność metod, których używa się do dowodu tego twierdzenia. Scharakteryzujmy je krótko.

---

tegoryczna. Warto w tym miejscu przytoczyć rezultaty, które uzyskano badając kategoryczność w poszczególnych mocach takich teorii sformalizowanych. Okazało się, że mogą zachodzić tylko cztery przypadki: (a) teoria nie jest kategoryczną w żadnej mocy; (b) teoria jest kategoryczna we wszystkich mocach; (c) teoria jest kategoryczna tylko w mocy przeliczalnej; d) teoria jest kategoryczna we wszystkich mocach nieprzeliczalnych. Jest to wynik do pewnego stopnia zaskakujący, ukazujący jednocześnie szczególną rolę mocy przeliczalnej.

[12] Dane na temat zachodzenia twierdzenia Skolema-Löwenheima dla logik nieklasycznych można znaleźć m.in. w pracach: A. Mostowski, *Thirty years of foundational studies*, Acta Phil. Fennica XVII, 1965, 132—134; J. Barwise, *Wwiedienije w łogiku pierwogo poriadka*, w: *Sprawocznaja kniga po matiematiczieskoj łogikie, I, Tieorija modieliej*, pod red. J. Barwise'a, Moskwa 1982, 13—54; K.J. Barwise, *Axioms for abstract model theory*, Ann. of Math. Logic, 7(1974), 258—263.

[13] N. Bourbaki, *Elementy historii matematyki*, Warszawa 1980, przypis 1, 60.

[14] Hao Wang, *On denumerable bases of formal systems*, w: *Mathematical Interpretation of Formal Systems*, Amsterdam 1955, 72.

1. Ekstensjonalność języka. Formuły języka sformalizowanego są aprzedmiotowe. Ważna jest tu tylko sama forma wyrażeń, a nie ich treść. Przy interpretacji języka jest więc miejsce na pewną dowolność. Dzięki temu można go interpretować w bardzo różnych dziedzinach, których obiekty mają zupełnie odmienną naturę. Ważne jest tylko to, aby zachować własności relacji, o jakich jest mowa w teorii.

Powstaje naturalne pytanie, do jakiego stopnia istniejące modele dla tej samej teorii sformalizowanej różnią się między sobą. Odpowiedź na to pytanie będzie zależała m.in. od tego, czy rozpatrujemy teorię zupełną czy niezupełną. Jeżeli teoria jest niezupełna, to można ją rozszerzyć w niesprzeczny sposób przynajmniej na dwa różne sposoby, dodając raz dowolne niezależne od tej teorii zdanie i wszystkie jego konsekwencje, a drugi raz negację tego zdania. W ten sposób obie teorie będą miały modele w oczywisty sposób różniące się między sobą, mimo tego będą to modele dla pierwotnej teorii. W tym przypadku istnienie różnic między modelami można łączyć także z niezupełnością rozpatrywanej teorii, a nie tylko z twierdzeniem Skolema-Löwenheima. Natomiast, gdy mamy do czynienia z teorią zupełną, to na mocy twierdzenia Skolema-Löwenheima teoria ta będzie miała wprawdzie modele nieizomorficzne, ale będą one wszystkie elementarnie równoważne, tzn. będą w nich prawdziwe dokładnie te same zdania. Powoduje to, że gdy rozpatrujemy je od „wewnątrz", posługując się tylko środkami, jakimi dysponuje nasz język, to nie jesteśmy w stanie ich odróżnić. Różnice między tymi modelami są widoczne dopiero na zewnątrz nich, gdy możemy posługiwać się bogatszym językiem niż rozpatrywany. Na przykład stwierdzenie, iż w modelu niestandardowym dla liczb naturalnych istnieją tzw. elementy niestandardowe, dokonuje się na zewnątrz tego modelu, przy pomocy bogatszych środków niż te, które są w języku arytmetyki. „Obserwator" znajdujący się wewnątrz modelu niestandardowego nie jest w stanie odróżnić obiektów niestandardowych od standardowych, bowiem te własności działań i relacji między elementami modelu, które dają się wypowiedzieć przy pomocy języka sformalizowanego I rzędu, będą takie same dla wszystkich obiektów. Należy też jeszcze raz podkreślić, iż przy interpretacji języka sformalizowanego nie jest ważna natura przedmiotów, które tworzą model, istotne jest tylko, aby zachodziły relacje o określonych własnościach. Na przykład dowodzi się w arytmetyce Peano, iż tylko zero nie ma swego bezpośredniego poprzednika. We wszystkich więc modelach dla tej teorii zero jest wyznaczone jednoznacznie (z dokładnością do relacji równoważności, spełniającej w modelu rolę relacji równości). Podobnie jest dla zbioru pustego w teorii mnogości. Nie jest poza tym ważne, czym to zero czy zbiór pusty jest w rzeczywistości, poza modelem.

W świetle tego traci do pewnego stopnia na ostrości paradoksalność twierdzenia Skolema-Löwenheima. Istnienie modeli nieizomorficznych nie oznacza bowiem tego, iż modele te zasadniczo są różne. Są w nich bowiem relacje, których przynajmniej część własności musi być taka sama we wszystkich modelach dla tej samej teorii. Ekstensjonalność języka pozwala na pominięcie cech charakterystycznych badanych obiektów; rozpatruje się tylko własności relacji i funkcji określonych na tych przedmiotach. Dzięki temu teorie matematyczne mogą być z powodzeniem wykorzystywane przez różne nauki do opisu bardzo wielu, często z pozoru nie mających ze sobą nic wspólnego, sytuacji.

2. Ograniczoność środków języka. W języku przeliczalnym możemy wypowiedzieć tylko przeliczalnie wiele formuł, czyli wysłowić przeliczalnie wiele zdań o własnościach rozpatrywanej dziedziny. Gdy więc posługujemy się takim językiem do opisu dziedzin o dużych mocach, to ujmujemy tylko niewielką część własności. Teoria, która opisuje tę dziedzinę, będzie więc posiadać modele i małych mocy — wystarczy np. ograniczyć się do przykładów dla wszystkich prawdziwych formuł z kwantyfikatorem egzystencjalnym. Istnienie więc modeli małych mocy ma swe źródło w samym „ubóstwie" języka, jakim się posługujemy. Zwiększenie mocy języka, np. poprzez dodanie nieprzeliczalnie wielu symboli, dopuszczenie nieskończenie długich formuł, ogranicza od dołu moc modeli. Im bogatszy jest język, tym większa jest moc najmniejszego modelu dla teorii. Przy pomocy języka przeliczalnego możemy w pełni opisać tylko dziedziny skończone. Im bardziej jest skomplikowana dziedzina, im ma więcej elementów, tym bogatszy musi być język służący do jej opisu.

3. Paradoksalność pojęcia nieskończoności. Twierdzenie Skolema-Löwenheima jest metatwierdzeniem, dowodzonym w metateorii, w której przyjmuje się m.in. teorię mnogości opartą np. na aksjomatach Zermelo-Fraenkla. Korzysta się tu z pojęcia nieskończoności aktualnej, uznaje (na podstawie twierdzenia Cantora) istnienie zbiorów dowolnych mocy. Gdy odrzuci się istnienie aktualnej nieskończoności, wtedy twierdzenie

Skolema-Löwenheima traci swój sens. Można więc to twierdzenie uznać za jeszcze jeden paradoks, który ma miejsce wtedy, gdy operuje się bez żadnych ograniczeń pojęciem nieskończoności aktualnej. W teorii mnogości Zermelo-Fraenkla potrafimy wskazać zbiory różnych mocy, które są modelami dla tej samej teorii sformalizowanej. W intuicjonistycznej teorii mnogości nie jesteśmy w stanie tego uczynić.

4. Nieefektywność metod dowodzenia. Aby udowodnić twierdzenia Skolema-Löwenheima konieczne jest posłużenie się nieefektywnymi metodami dowodu. W szczególności w dowodach większości sformułowań twierdzenia korzysta się z pewnych wersji aksjomatu wyboru. Co więcej po odrzuceniu tego aksjomatu, czy słabszych jego odpowiedników (np. twierdzenie o ideale pierwszym), przyjmując nawet istnienie zbiorów dowolnych mocy, nie jesteśmy w stanie udowodnić tych wersji twierdzenia Skolema-Löwenheima [15]. Twierdzenie to można więc uważać za jeszcze jeden paradoksalny rezultat, który uzyskujemy przy zastosowaniu aksjomatu wyboru. Warto też dodać, iż konstrukcje modeli w dowodach są do pewnego stopnia sztuczne, np. budujemy model na termach języka, czy dodajemy odpowiednią ilość nowych stałych.

4. UWAGI ZAMYKAJĄCE

Można uznać, iż paradoksalność wyników otrzymanych z twierdzenia Skolema-Löwenheima jest związana zarówno z samym językiem sformalizowanym (ekstensjonalność, ograniczona ilość wyrażeń, które dają się sformułować), jak i ze środkami, które służą do dowodu twierdzenia (pojęcie nieskończoności aktualnej, aksjomat wyboru). Można w tym miejscu postawić pytanie, czy są prawomocne próby, czynione przez niektórych autorów [16], przeniesienia wniosków wynikających z twierdzenia Skolema-Löwenheima na języki niesformalizowane, jakimi posługują się np. przyrodnicy, filozofowie itp. Wydaje się, iż trzeba być ostrożnym przy dokonywaniu takich ekstrapolacji. Przede wszystkim należy zwrócić uwagę na to,

---

[15] Niektóre wersje twierdzenia można udowodnić bez aksjomatu wyboru. Na przykład Skolem w cytowanej pracy z 1922 roku udowodnił bez aksjomatu wyboru, że jeżeli jedna formuła jest spełniona w niepustej dziedzinie, to jest spełniona w dziedzinie przeliczalnej. Jest to wersja, którą w 1915 udowodnił przy pomocy aksjomatu wyboru Löwenheim.

[16] Czyni tak m.in. J. Życiński, *Wielość interpretacji a jedność prawdy w filozofii*, St. Phil. Chr., 22(1986)1, 21—41.

że z faktu, iż dla niektórych języków sformalizowanych zachodzi twierdzenie Skolema-Löwenheima nie wynika, by było ono prawdziwe również dla języków niesformalizowanych. Przecież nawet nie wszystkie języki sformalizowane posiadają własności wyrażone w tym twierdzeniu. Nie widać więc powodów, dla których język niesformalizowany, różniący się pod wieloma względami od sformalizowanego, miałby te własności posiadać. Przede wszystkim języki niesformalizowane są intensjonalne; istotne są dla nich zarówno forma jak i treść występujących symboli. Co więcej treść wydaje się być ważniejsza niż forma. Dla języków sformalizowanych zaś ekstensjonalność jest jedną z przyczyn, dzięki której twierdzenie Skolema-Löwenheima można udowodnić. Wprawdzie wieloznaczność i nieostrość pojęć języka niesformalizowanego mogą do pewnego stopnia stwarzać efekty podobne do istnienia wielu modeli dla teorii sformalizowanych, to jednak przyczyny tego stanu rzeczy w obu przypadkach są inne. Dla języków sformalizowanych, jak stwierdzono, ma to ścisły związek z ich ekstensjonalnością, z ujmowaniem przez takie języki własności relacji między obiektami. Przy opisie jakiejś dziedziny pozamatematycznej zaś interesują nas nie tylko relacje między przedmiotami, lecz również natura badanych obiektów. Język naturalny jest na tyle bogaty, że może służyć do tego typu opisu; jednocześnie jest mało precyzyjny (wieloznaczność, nieostrość pojęć) oraz mogą w nim powstawać antynomie semantyczne. W pewnych sytuacjach jest to niepożądane. Formalizacja usuwa te wady, ale za cenę aprzedmiotowości języka sformalizowanego.

Języki sformalizowane są wykorzystywane przede wszystkim do badania obiektów matematycznych. Języki niesformalizowane, naturalne służą do opisu otaczającego nas świata, rzeczywistości, w której żyjemy. Nie mamy żadnych podstaw, aby twierdzić, iż w tej rzeczywistości istnieją zbiory jakichś przedmiotów dowolnej mocy, a także, że istnieją dwie nieizomorficzne dziedziny, które opisuje ta sama teoria czy to sformalizowana czy nie. Należy jeszcze raz podkreślić, iż twierdzenie Skolema-Löwenheima można udowodnić tylko wtedy, gdy przyjmuje się, iż istnieją zbiory różnych mocy nieskończonych. Teorie przyrodnicze, filozoficzne mają za zadanie zaś opisywać, wyjaśniać rzeczywistość otaczającego nas świata, dla którego przyjęcie założenia o istnieniu mocy nieskończonych wydaje się być problematyczne.

Teoria sformalizowana posiada wiele różnch modeli, natomiast przy opisie rzeczywistości zachodzi odwrotna sytuacja;

mianowicie ten sam obszar świata może być opisywany przy pomocy różnych teorii, formułowanych w odmiennych językach. Nie musi to oznaczać, iż te teorie wzajemnie są sprzeczne. Mogą one bowiem dotyczyć różnych aspektów tego samego obszaru rzeczywistości. Tak dzieje się w naukach przyrodniczych. Ten sam obiekt może stać się przedmiotem badań zarówno fizyka, chemika jak i biologa. Każdy z przykładowo wymienionych uczonych używa odmiennych pojęć, innego języka. Fizyka przede wszystkim interesują prawa i własności ruchu, chemik koncentruje się na składzie, budowie, przemianach, którym ulegają substancje, biolog zajmuje się przejawami i właściwościami życia. Wszystkie uzyskane opisy nie są sprzeczne ze sobą, a wzajemnie się uzupełniają, ukazując różne aspekty, własności badanego przedmiotu. Natomiast w filozofii wielość teorii, interpretacji świata wiąże się m.in. z tym, iż inaczej widzi się otaczający nas świat, przypisuje się mu odmienne własności, cechy. Trudno jest wtedy pogodzić ze sobą stanowiska, w których tym samym obiektom przypisuje się zasadniczo odmienne własności, dostrzega się relacje o zupełnie innych cechach. Jeżeli na przykład istnieje zgodność, co się rozumie pod pojęciem materia, lecz przypisuje się jej zasadniczo odmienne własności: odwieczność — posiadanie początku, niezniszczalność — zniszczalność, skończoność — nieskończoność itd., to uzgodnienie odnośnych stanowisk filozoficznych jest niemożliwe, mimo wspomnianej zgodności co jest desygnatem pojęcia materii. Mamy więc tu do czynienia nie z wieloma modelami dla tej samej teorii, lecz z odmiennymi, sprzecznymi ze sobą teoriami, o których twierdzi się, iż opisują ten sam obszar, aspekt rzeczywistości. To, że rzeczywistość może być opisywana przez odmienne teorie wynika, jak się wydaje, zarówno z wieloaspektowości tej rzeczywistości, jak i z nieadekwatności naszego aparatu poznawczego. Nie ma to jednak nic wspólnego z wnioskami wynikającymi z twierdzenia Skolema-Löwenheima.

ON THE SKOLEM-LÖWENHEIM THEOREM

Summary

The article tries to explain the reasons for paradoxes arising from the Skolem-Löwenheim theorem. It describes four such reasons: (1) a formalized language is extensional, (2) it has only limited resourses, (3) proofs of the theorem are non-effective, (4) the notion of actual infinity is applied. Finally the domain of application of the theorem is considered.