TADEUSZ BONCLER

POWER DIVISORS OF THE FORM 2NK+1 OF THE EXPRESSIONS X^n+Y^n AND X^n-Y^n

Let be given the following power binomials

$$x^n+y^n \text{ and } x^n-y^n \tag{1}$$

where the exponent is an arbitrary natural odd prime n, $[n,(x\pm y)]=1$, x and y being arbitrary, different from zero, natural numbers, one of them being even, the other odd, $(x,y)=1$.

The binomials (1) have for given x, y, n the divisors

$$(x+y) \text{ and } (x-y), \tag{2}$$

respectively, which we rewrite in traditional algebra or in number theory in the form

$$x^n+y^n=(x+y)\cdot[x^{n-1}-x^{n-2}\cdot y+x^{n-3}\cdot y^2-\ldots+x^2\cdot y^{n-3}-x\cdot y^{n-2}+y^{n-1}] \tag{3}$$

$$x^n-y^n=(x-y)\cdot[x^{n-1}+x^{n-2}\cdot y+x^{n-3}\cdot y^2+\ldots+x^2\cdot y^{n-3}+x\cdot y^{n-2}+y^{n-1}] \tag{4}$$

The divisors $(x+y)$ and $(x-y)$ are said to be algebraic divisors.

In the expressions (3) and (4) there appear in brackets polynomials of degree $n-1$, which do not decompose into products of polynomials of lower degree. For the sake of simplicity we shall denote the polynomials in brackets in (3) and (4) by the symbols:

$$Z_{n-1}=x^{n-1}-x^{n-2}\cdot y+x^{n-3}\cdot y^2-\ldots+x^2\cdot y^{n-3}-x\cdot y^{n-2}+y^{n-1} \tag{5}$$

$$W_{n-1}=x^{n-1}+x^{n-2}\cdot y+x^{n-3}\cdot y^2+\ldots+x^2\cdot y^{n-3}+x\cdot y^{n-2}+y^{n-1} \tag{6}$$

By (5) and (6) the equalities (3) and (4) take the form

$$x^n+y^n=(x+y)\cdot Z_{n-1} \tag{7}$$

$$x^n-y^n=(x-y)\cdot W_{n-1} \tag{8}$$

We shall prove that Z_{n-1} and W_{n-1} are expressions of the form $2nk+1$ and that for exactly determined numerical values of n and k also of the form $2nk+1$.
they may represent prime numbers or products of primes which are

Since the proof for W_{n-1} is quite analogous to the proof for Z_{n-1} we shall establish the assertion for Z_{n-1} only. The reader will easily accomplish the proof for W_{n-1}.

The polynomials Z_{n-1} and W_{n-1} are certain functions of x, y, n whose structures is such that it is impossible to find whatever their characteristic properties; therefore we shall represent those polynomials as functions depending, for example, on $x+y$ and x. To this purpose we write, for example, the term y (odd number) in the following form: $y=[(x+y)-x]$ and insert this result into the binomial x^n+y^n and get

$$x^n+y^n=x^n+[(x+y)-x]^n \tag{9}$$

Developing the expression in bracket in (9) by the Newton binomial formula and reducing the terms x^n and $-x^n$ we get

$$(10)\quad x^n+y^n=(x+y)^n-\binom{n}{1}(x+y)^{n-1}\cdot x+\binom{n}{2}(x+y)^{n-2}\cdot x^2-\ldots-\binom{n}{n-2}\cdot(x+y)^2\cdot x^{n-2}+\binom{n}{n-1}(x+y)\cdot x^{n-1}$$

In the right member of the equality (10) each term contains $(x+y)$ as a common factor, so it may be put before the bracket. Hence

$$(11)\quad x^n+y^n=(x+y)\cdot[x+y)^{n-1}-\binom{n}{1}(x+y)^{n-2}\cdot x+\binom{n}{2}(x+y)^{n-3}\cdot x^2-\ldots \binom{n}{n-2}(x+y)\cdot x^{n-2}+\binom{n}{n-1}\cdot x^{n-1}]$$

From the formulas (3), (7) and (11) we see that the expression in brackets in (11) is nothing but Z_{n-1} expressed in a slightly different form than in (3). Hence we may write

$$(12)\quad Z_{n-1}=[(x+y)^{n-1}-\binom{n}{1}(x+y)^{n-2}\cdot x+\binom{n}{2}(x+y)^{n-3}\cdot x^2-\ldots- \binom{n}{n-2}(x+y)\cdot x^{n-2}+\binom{n}{n-1}\cdot x^{n-1}]$$

In the brackets in (12) all the terms, except the first, are divisible by x and by n, since n is a prime, x is an even number so we may write

$$(13)\quad Z_{n-1}=[(x+y)^{n-1}+2n\cdot \frac{x}{2}[-(x+y)^{n-2}+\binom{n-1}{2}(x+y)^{n-3}\cdot x-\ldots -\binom{n-1}{n-2}(x+y)\cdot x^{n-3}+x^{n-2})]$$

Let us now note that

$$(14)\quad q=\frac{x}{2}-(x+y)^{n-2}+\binom{n-1}{2}(x+y)^{n-3}\cdot x-\ldots-\binom{n-1}{n-2}(x+y)\cdot x^{n-3}+x^{n-2}]$$

The term q thus obtained in (14) is an integer, since x is even.

It remains to study the term $(x+y)^{n-1}$ which can, by Fermat's theorem (the exponent n being a prime), be represented in the following form:

$$(15)\quad (x+y)^{n-1}=2np+1,\ \text{where}\ p=[(x+y)^{n-1}-1]:(2n)$$

Hence the expression (13) takes the form

$$(16)\quad Z_{n-1}=(2np+1+2nq)=2n(p+q)+1$$

Finally we get, setting $p+q=k$,

$$(17)\quad Z_{n-1}=2nk+1$$

Therefore

$$(18)\quad x^n+y^n=(x+y)\cdot Z_{n-1}=(x+y)\cdot(2nk+1)$$

Since the product of any number of numbers of the form $2nk+1$ is also of the form $2nk+1$ (the easy proof of this assertion is left to the reader), the number Z_{n-1}, if it is not a prime, will be a product of primes of the same form.

To prove that $x^n—y^n$ has also divisors of the form $2nk+1$ we apply the transformation $—y=[(x—y)—x]$ and, proceeding as before, we finally obtain

(19) $$x^n—y^n=(x—y)\cdot W_{n-1}=(x—y)\cdot(2nk_1+1).$$

The divisors of the type $2nk+1$ are called power divisors, since their internal structure is closely connected with the power exponent n.

TOMASZ OLSZEWSKI

SPRAWOZDANIE Z OTWARTYCH POSIEDZEŃ KATEDRY LOGIKI ATK W ROKU AKADEMICKIM 1985/86

W omawianym okresie odbyły się cztery posiedzenia. Pierwsze z nich miało miejsce dnia 18 listopada 1985 r. i dotyczyło XXXI Konferencji Historii Logiki poświęconej Leonowi Chwistkowi; odbyła się ona w Krakowie w dniach od 18 do 20 października 1985 r. Sprawozdanie z tej Konferencji oraz krótki życiorys L. Chwistka przedstawił uczestnik tej Konferencji, mgr T. Olszewski. Konferencja ta odbyła się w rok po setnej rocznicy urodzin Chwistka i czterdziestej jego śmierci. Chwistek był wybitnym logikiem przede wszystkim dokonał udoskonalenia i uproszczenia rozgałęzionej teorii typów Russella i Whiteheada), miał jednak także ambicje zdziałania czegoś nowego w dziedzinie teorii sztuki. Te właśnie ambicje, poparte nawykami przeniesionymi z dziedziny nauk formalnych, stały się przyczyną stworzenia pewnej specyficznej teorii, zwanej teorią wielości rzeczywistości. Teoria ta, opublikowana w 1921 r., wzbudziła wiele kontrowersji. Główny zarzut, jaki można jej postawić, to brak zrozumiałości: nie wiadomo bowiem jak tę teorię zinterpretować, by pozostała w zgodzie z przekonaniami Chwistka a przy tym nie była rażąco sprzeczna z przekonaniami innych ludzi. Temu zagadnieniu poświęcony był komunikat, który T. Olszewski przedstawił na wspomnianej Konferencji i którego treść zreferował na omawianym posiedzeniu. Przedstawione problemy spowodowały dyskusję, której wynikiem był postulat powrócenia do tego zagadnienia na następnym posiedzeniu Katedry.

Omówieniu częściowych aksjomatyk zawartych w teorii Chwistka poświęcone było drugie posiedzenie, które odbyło się 2 grudnia 1985 r. T. Olszewski przedstawił na nim próbę Chwistka zaksjomatyzowania czterech systemów mających stanowić teorie czterech rodzajów rzeczywistości. W dyskusji zwracano uwagę na liczne usterki metodologiczne obciążające teorię Chwistka wieloznacznością lub wręcz brakiem znaczenia. Posługiwanie się pojęciami zaczerpniętymi z języka potocznego bez odpowiednich uściśleń czy definicji oraz symboliczne zapisywanie tez w takim języku formułowanych stwarza złudzenie precyzji formalnej przy rzeczywistym braku jakiejkolwiek precyzji. Cała teoria Chwistka sprawia wrażenie raczej tymczasowych zapisków niezbyt jasnych jeszcze pomysłów teoretycznych aniżeli wykładu dojrzałej teorii w stadium upoważniającym do jej publikacji. Próby pobieżnej interpretacji tej teorii doprowadzają bądź do banału niezgodnego z myślą jej autora, bądź też do paradoksu. Do adekwatnego zrozumienia i pró-