Mieczysław Lubański

Zdarzenie, prawdopodobieństwo, rozmytość

Studia Philosophiae Christianae 23/2, 65-80

1987

Studia Philosophiae Christianae
ATK
23(1987)2

MIECZYSŁAW LUBAŃSKI

ZDARZENIE, PRAWDOPODOBIEŃSTWO, ROZMYTOŚĆ

1. WPROWADZENIE

Rozważmy następujące dwie wypowiedzi: a) Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że dzień jutrzejszy będzie ciepły?, b) Prawdopodobnie średnia temperatura dnia w ciągu najbliższego miesiąca nie zmaleje. Nietrudno jest zauważyć, że w pierwszej z nich występuje nieprecyzyjny zwrot „dzień jutrzejszy będzie ciepły". Nie bardzo wiadomo, co on dokładnie znaczy, jaka jest jego treść. W drugiej wypowiedzi stwierdzenie prawdopodobieństwa jest nieprezycyjne. Powstaje pytanie, jak należy rozumieć termin „prawdopodobnie". Można więc powiedzieć, że każda z wymienionych wypowiedzi zawiera element sformułowany nieprecyzyjnie, w pierwszej z nich odnosi się on do pojęcia zdarzenia, w drugiej — do pojęcia prawdopodobieństwa.

Nieprecyzyjność wspomnianych terminów może być scharakteryzowana jako ich rozmytość. A zatem mamy tu do czynienia, odpowiednio, z pojęciem zdarzenia rozmytego oraz z pojęciem prawdopodobieństwa rozmytego.

Artykuł ten stawia sobie za cel przedstawienie, jak sądzimy, interesujących dla filozofa pojęć zdarzenia rozmytego oraz prawdopodobieństwa rozmytego, a także wskazanie relacji między nimi zachodzących.

2. ZDARZENIE KLASYCZNE

Wprowadza się je w następujący sposób. Za pojęcie pierwotne, a więc niedefiniowalne, przyjmuje się pojęcie zdarzenia elementarnego. Zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych nazywa się zwykle przestrzenią zdarzeń elementarnych i oznacza literą E. Dla uproszczenia rozważań ograniczymy się do przypadku, kiedy przestrzeń zdarzeń elementarnych jest skończona, czyli kiedy zawiera skończoną liczbę elementów. Przez F oznaczamy rodzinę wszystkich podzbiorów przestrzeni E. Jest widoczne, że jeżeli zbiór E zawiera k elementów, to zbiór F zawiera 2^k elementów. Do rodziny F należy m.in. zbiór pusty, jak również cały zbiór E.

Zdarzeniami w danej przestrzeni zdarzeń elementarnych zwie się elementy rodziny F, czyli podzbiory zbioru E. Innymi słowy przez zdarzenie rozumie się dowolny element zbioru F, czyli dowolny podzbiór przestrzeni zdarzeń elementarnych E.

Określone przed chwilą pojęcie zdarzenia zwać będziemy klasycznym pojęciem zdarzenia. Zamiast klasyczne pojęcie zdarzenia mówić będziemy krótko zdarzenie klasyczne, albo jeszcze krócej, po prostu, zdarzenie [1].

Jeżeli chcemy posłużyć się wprowadzonym pojęciem zdarzenia, to najpierw w każdym konkretnym przypadku należy poprawnie określić przestrzeń zdarzeń elementarnych E. Zdarzeniami będą wówczas, zgodnie z definicją, dowolne podzbiory zbioru E.

Zilustrujmy funkcjonowanie przytoczonego określenia na kilku przykładach.

Przykład 1. Jednokrotny rzut kostką sześcienną.

Zdarzeniem elementarnym będzie tu wynik pojedynczego rzutu kostką, czyli jedna z liczb od 1 do 6. A zatem przestrzeń E będzie mieć postać

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Zdarzeniami będą tu dowolne podzbiory zbioru E. Zbiór F liczy $2^6 = 64$ elementy. A zatem mamy w tym przypadku do czynienia z 64 różnymi zdarzeniami. Rodzina F zawiera podzbiór pusty, podzbiory jednoelementowe, dwuelementowe, ..., pięcioelementowe i cały zbiór E. Zdarzenie postaci $\{1, 3, 5\}$ polega na wyrzuceniu nieparzystej liczby oczek.

Przykład 2. Dwukrotny rzut kostką sześcienną.

Zdarzeniem elementarnym będzie tutaj każdy wynik po-

---

[1] Czytelnika zainteresowanego określeniem pojęcia zdarzenia w przyprzypadku ogólnym, a więc kiedy przestrzeń E jest zbiorem dowolnej mocy, odsyłamy do literatury specjalistycznej. W języku polskim można polecić następujące pozycje: S. Zubrzycki, *Wykłady z rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej*, Warszawa 1966; M. Fisz, *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna*, Warszawa 1967 [3]; J. Neyman, *Zasady rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej*, Warszawa 1969.

dwójnego rzutu kostką, czyli para uporządkowana złożona z liczb od 1 do 6. A więc przestrzeń E zawierać będzie 36 elementów. Konsekwentnie rodzina F liczyć będzie 2^{36} elementów, co znaczy, iż tyle będzie w tym przypadku możliwych zdarzeń. Wypisanie ich wszystkich nie byłoby ani łatwe, ani celowe. Zdarzenie postaci $\{(1, 3), (2, 3), (3, 3), (4, 3), (5, 3), (6, 3)\}$ polega na wypadnięciu oczka 3 w drugim rzucie.

Przykład 3. Trzykrotny rzut monetą.

Zdarzeniem elementarnym będzie, jak łatwo się przekonać, wynik potrójnego rzutu monetą, czyli uporządkowana trójka złożona z orła O i reszki R. Przestrzeń E zawierać będzie $2^3 = 8$ elementów. Innymi słowy możliwych zdarzeń w rozważanym przypadku mamy 256. Zdarzenie postaci {OOO, OOR, ROO, ROR} polega na wyrzuceniu orła w drugim rzucie [2].

Na zdarzeniach, z tej racji, że są one zbiorami, można wykonywać działania mnogościowe, a więc brać sumę mnogościową zdarzeń, ich iloczyn mnogościowy, dopełnienie danego zdarzenia itd. Wyniki wykonanych działań zwiemy, odpowiednio, sumą zdarzeń, ich iloczynem, dopełnieniem czyli zdarzeniem przeciwnym do danego itd. Jeżeli dwa zdarzenia A oraz B mają część wspólną pustą, to zwiemy je zdarzeniami wykluczającymi się.

Nietrudno jest zauważyć, że zbiór F spełnia następujące warunki:

1 Zbiór pusty należy do rodziny F.

2 Przestrzeń zdarzeń elementarnych E należy do rodziny F.

3 Jeżeli zdarzenie A należy do rodziny F, to również zdarzenie przeciwne do niego również należy do rodziny F.

4 Jeżeli dwa zdarzenia A oraz B należą do rodziny F, to również ich suma, iloczyn i różnica należą do rodziny F.

3. PRAWDOPODOBIEŃSTWO KLASYCZNE

Prawdopodobieństwem na przestrzeni zdarzeń elementarnych E zwiemy funkcję rzeczywistą P określoną na zbiorze F, która spełnia poniższe warunki:

(a) $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$ dla każdego A należącego do F,

(b) $P(E)=1$,

---

[2] Przeprowadzone w powyższych przykładach obliczenia ilości elementów zbiorów E oraz F opierają się na prostych wzorach z kombinatoryki. Można je znaleźć np. w książce: A. Mostowski i M. Stark, *Elementy algebry wyższej*, Warszawa 1968 [4].

(c) Jeżeli zdarzenia A oraz B wykluczają się, to prawdopodobieństwo ich sumy jest równe sumie ich prawdopodobieństw, czyli $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

W powyższym wzorze po lewej jego stronie figuruje symbol $\cup$ oznaczający sumę mnogościową A oraz B, czyli sumę zdarzeń A oraz B. $P(A \cup B)$ oznacza prawdopodobieństwo sumy rozważanych zdarzeń. Po prawej stronie tegoż wzoru występuje znak +, który oznacza zwykłe dodawanie liczb; prawdopodobieństwo bowiem dowolnego zdarzenia jest liczbą rzeczywistą nie mniejszą niż zero i nie większą niż jeden[3].

Wartość funkcji P dla danego zdarzenia A, czyli wielkość P(A), zwie się prawdopodobieństwem tego zdarzenia. Układ złożony z przestrzeni zdarzeń elementarnych E oraz określonego na niej prawdopodobieństwa P nazywamy przestrzenią prawdopodobieństwa. Jest możliwe określenie na danej przestrzeni zdarzeń elementarnych E w różny konkretny sposób prawdopodobieństwa P, z zachowaniem rzecz jasna podanych wyżej trzech warunków (a), (b), (c). Innymi słowy możemy mieć do czynienia z różnymi przestrzeniami prawdopodobieństw na tej samej przestrzeni E. Te przestrzenie prawdopodobieństw będą stanowiły formalne odpowiedniki różnych sytuacji rzeczywistych. Zilustrujmy te uwagi prostym przykładem:

Rozważmy jednokrotny rzut monetą. Ponieważ wynikiem rzutu może być bądź orzeł, bądź reszka, przeto przestrzeń E składa się z dwu elementów: z orła O oraz reszki R. Rodzina F w tym przypadku składa się z czterech elementów, mianowicie ze zbioru pustego, ze zbioru jednoelementowego postaci $\{O\}$, ze zbioru jednoelementowego postaci $\{R\}$ oraz ze zbioru E. Określmy na rodzinie F trzy funkcje P_1, P_2 oraz P_3 w następujący sposób: wartość każdej z wymienionych funkcji na zbiorze pustym niech będzie równa zeru, zaś $P_1(E) = P_2(E) = P_3(E) = 1$, natomiast $P_1(O) = 1/2$, $P_1(R) = 1/2$, $P_2(O) = 1/3$, $P_2(R) = 2/3$, $P_3(O) = 1/5$, $P_3(R) = 4/5$. Łatwo jest sprawdzić, że każda z wyżej określonych funkcji P_1, P_2 oraz P_3 spełnia warunki (a), (b), (c). Jest więc prawdopodobieństwem na przestrzeni zdarzeń elementarnych E. Przestrzeń prawdopodobieństwa (E, P_1) opisuje formalnie sytuację, kiedy mamy do czynienia z monetą jednorodną, a więc taką, dla której szanse

[3] Warunek (c) został podany w najprostszym sformułowaniu. Ogólne sformułowanie tego warunku, a przeto konsekwentnie i pojęcia prawdopodobieństwa, znajdzie Czytelnik w pracach podanych w przypisie 1.

wyrzucenia orła i rzeszki są jednakowe; dwie pozostałe przestrzenie prawdopodobieństw opisują formalnie sytuację w przypadku monety niejednorodnej; inna jendakże jest szansa wyrzucenia orła w przypadku sytuacji opisywanej funkcją P_2, inna — w przypadku sytuacji opisywanej funkcją P_3.

Przypomnijmy, że podzbiór pusty odpowiada zdarzeniu niemożliwemu, zaś cała przestrzeń zdarzeń elementarnych, czyli zbiór E, stanowi odpowiednik zdarzenia pewnego. Aksjomat (b) mówi, że prawdopodobieństwo zdarzenia pewnego jest równe jedności. Można łatwo wykazać, że prawdopodobieństwo zdarzenia niemożliwego jest równe zeru.

Z innych podstawowych własności prawdopodobieństwa wymieńmy wzór głoszący, że prawdopodobieństwo sumy dwu dowolnych zdarzeń jest równe sumie prawdopodobieństw zdarzeń składowych pomniejszonej o prawdopodobieństwo ich części wspólnej. Jeżeli zdarzenie A pociąga za sobą zdarzenie B, to prawdopodobieństwo pierwszego z nich nie przekracza prawdopodobieństwa drugiego z nich. Suma prawdopodobieństw zdarzenia danego oraz zdarzenia względem niego przeciwnego jest równa jedności.

Ważnym pojęciem w klasycznej teorii prawdopodobieństwa jest pojęcie prawdopodobieństwa warunkowego. Interesuje nas prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A pod warunkiem zajścia zdarzenia B. Wspomniane prawdopodobieństwo określamy jako iloraz prawdopodobieństwa iloczynu zdarzeń A oraz B przez prawdopodobieństwo zdarzenia B. Jest zrozumiałe, że określenie prawdopodobieństwa warunkowego funkcjonuje na rozważanej przestrzeni prawdopodobieństwa.

Dwa zdarzenia A oraz B nazywamy zdarzeniami niezależnymi, jeżeli prawdopodobieństwo ich części wspólnej jest równe iloczynowi prawdopodobieństwa zdarzenia A przez prawdopodobieństwo zdarzenia B. Określenie to przy pomocy wzoru zapisujemy następująco:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Nakreśliwszy tło naszych rozważań, przejdziemy obecnie do przypomnienia pojęcia zbioru rozmytego, przy którego pomocy będzie można określić pojęcie zdarzenia rozmytego oraz prawdopodobieństwa rozmytego.

4. ZBIORY ROZMYTE

Niech dany będzie pewien zespół przedmiotów X. Przypuśćmy, że każdemu przedmiotowi należącemu do X została przyporządkowana pewna liczba rzeczywista nieujemna zawarta między zerem i jednością. Innymi słowy, określona została funkcja f na zespole X przyjmująca wartości z domkniętego odcinka [0, 1]. Powiemy wówczas, że dany jest podzbiór rozmyty w zespole obiektów X. Wartość funkcji f dla konkretnego przedmiotu zwiemy stopniem jego przynależności do podzbioru rozmytego. Zgodnie z podanym określeniem stopień przynależności przedmiotu do podzbioru rozmytego może być równy zeru, jedności, bądź ułamkowi właściwemu. Zespół tych wszystkich przedmiotów, których stopień przynależności jest dodatni zwiemy nośnikiem podzbioru rozmytego. Elementy o stopniu przynależności równym jedności zwiemy częścią ostrą podzbioru rozmytego. Pozostałe elementy o dodatnim stopniu przynależności zwiemy częścią rozmytą podzbioru rozmytego [4]. Łatwo widać, że pojęcie podzbioru rozmytego stanowi uogólnienie pojęcia zbioru w sensie klasycznym. Każdy zbiór jest tego rodzaju podzbiorem rozmytym, w którym stopień przynależności jego elementów jest równy jedności. Innymi słowy, funkcja przynależności f jest w tym przypadku funkcją stałą przyjmującą wartość jeden.

Jest widoczne, że funkcja przynależności f określa jednoznacznie podzbiór rozmyty w zespole przedmiotów X. Moc zbioru rozważanych funkcji przynależności f jest równa mocy zbioru wszystkich podzbiorów rozmytych określonych na zespole X. Zamiast mówić podzbiór rozmyty mówi się zwykle krótko zbiór rozmyty.

Na klasie zbiorów rozmytych można określić odpowiedniki operacji mnogościowych zdefiniowanych dla zbiorów w sensie klasycznym, jak również nowego rodzaju operacje, nazwijmy je algebraicznymi. Przypomnijmy wspomniane działania na zbiorach rozmytych.

Niech dany będzie zbiór rozmyty określony na zespole X, a więc niech dana będzie funkcja przynależności f, która dla

---

[4] Pojęcie zbioru rozmytego wprowadził L. A. Zadeh (*Fuzzy sets, Information and Control* 8(1965), 338—353). Teoria zbiorów rozmytych jest obecnie rozbudowanym działem matematyki i ma liczne zastosowania. Zob. np. A. Kaufmann, *Introduction a la théorie des sous-ensembles flous*, Paris 1977. Por. także mój artykuł *Nazwy nieostre a zbiory rozmyte*, Studia Philosophiae Christianae 14 (1978), 1, 31—48.

każdego x należącego do X przyjmuje wartość z domkniętego odcinka [0, 1]. Oznaczmy przez K zbiór rozmyty określony funkcją f. Wówczas dopełnieniem zbioru rozmytego K zwiemy taki zbiór rozmyty, którego funkcja przynależności jest równa 1—f.

Niech teraz dane będą dwa zbiory rozmyte K oraz L z funkcjami przynależności f oraz g.

Sumą mnogościową zbiorów rozmytych K oraz L zwie się taki zbiór rozmyty, którego funkcja przynależności jest określona jako max (f, g).

Iloczynem mnogościowym, albo inaczej częścią wspólną, zbiorów rozmytych K oraz L zwie się taki zbiór rozmyty, którego funkcja przynależności jest określona jako *min* (f, g).

Widzimy, że suma mnogościowa dwu zbiorów rozmytych jest najmniejszym zbiorem rozmytym zawierającym zarówno jeden, jak i drugi zbiór; podobnie, iloczyn mnogościowy dwu zbiorów rozmytych jest największym zbiorem rozmytym zawartym jednocześnie w jednym i w drugim zbiorze [5].

Łatwo jest wykazać, że suma mnogościowa oraz iloczyn mnogościowy zbiorów rozmytych są działaniami przemiennymi i łącznymi. Zachodzi również prawo rozdzielności sumy względem iloczynu, jak też prawo rozdzielności iloczynu względem sumy.

Zachodzą również dla zbiorów rozmytych prawa de Morgana. A więc dopełnienie sumy mnogościowej dwu zbiorów rozmytych jest równe iloczynowi mnogościowemu dopełnień składników sumy; dopełnienie iloczynu mnogościowego dwu zbiorów rozmytych jest równe sumie mnogościowej dopełnień czynników iloczynu. Przy pomocy indukcji uogólnia się łatwo prawa de Morgana na dowolną skończoną ilość elementów sumy oraz iloczynu.

Podaliśmy przed chwilą określenia operacji mnogościowych na zbiorach rozmytych. Teraz przypomnimy określenia dwu operacji algebraicznych, zwanych sumą algebraiczną oraz iloczynem algebraicznym.

Rozważmy dwa zbiory rozmyte K oraz L o funkcjach przynależności, odpowiednio, f oraz g. Sumą algebraiczną dwu zbiorów rozmytych K oraz L zwie się taki zbiór rozmyty, którego

---

[5] Jakiś zbiór zwiemy najmniejszym zbiorem posiadającym pewną własność W, jeżeli zawiera się on w każdym zbiorze mającym własność W. Dany zbiór zwiemy największym zbiorem posiadającym pewną własność W, jeżeli zawiera on w sobie każdy zbiór mający własność W.

funkcja przynależności jest równa f(x)+g(x)—f(x) • g(x), dla każdego x będącego elementem zespołu X.

Powyższa definicja jest poprawna. Jeżeli bowiem a oraz b są liczbami z przedziału [0, 1], to wówczas wielkość a+b—a • b mieści się również w wymienionym przedziale. Zatem wielkość f(x)+g(x)—f(x) • g(x) jest liczbą zawartą w przedziale [0, 1]. Może więc być uznana za funkcję przynależności pewnego zbioru rozmytego.

Iloczynem algebraicznym dwu zbiorów rozmytych K oraz L zwie się taki zbiór rozmyty, którego funkcja przynależności jest równa iloczynowi funkcji f oraz g.

Dla zbiorów rozmytych określa się także operacje logiczne, operacje drastyczne, operację koncentracji, operację rozpraszania itp. Pomijamy prezentację wspomnianych operacji, ponieważ wykraczają one poza zainteresowania oraz cel tego artykułu[6].

Jest widoczne, że na zbiorach rozmytych można określać cały szereg różnych operacji, który jest o wiele bogatszy od takiegoż dla zbiorów w sensie klasycznym.

Przypomnimy jeszcze pojęcie mocy zbioru rozmytego[7].

Niech więc dany będzie zbiór rozmyty K o funkcji przynależności f. Wówczas mocą zbioru rozmytego K zwie się sumę wartości f(x) rozciągniętą na wszystkie elementy x należące do X.

Jest widoczne, że pojęcie to stanowi uogólnienie pojęcia mocy zbioru w sensie klasycznym; nadto nie jest wykluczone, że określona wyżej moc zbioru rozmytego będzie liczbą niecałkowita.

Zilustrujmy powyższe pojęcie prostym przykładem. Niech X oznacza zbiór mieszkańców pewnego miasta. Rozważmy zbiór złożony z młodych mieszkańców danego miasta. Jest to, oczywiście, zbiór rozmyty. Określone wyżej pojęcie mocy zbioru rozmytego odniesione do interesującej nas sytuacji da ilość młodych mieszkańców danego miasta.

Teoria zbiorów rozmytych jest wygodną aparaturą pojęciową dla określenia pojęcia zdarzenia rozmytego oraz pojęcia prawdopodobieństwa rozmytego. Zajmiemy się teraz tymi sprawami.

---

[6] Zob. np. E. Czogała, W. Pedrycz, *Elementy i metody teorii zbiorów rozmytych*, Warszawa 1985, 18—21. Czytelnika zainteresowanego bliżej teorią zbiorów rozmytych odsyłamy do tej pracy.

[7] L. A. Zadeh, *Ponjatie lingwisticzeskoj pieriemiennoj i jego primienienie k prinjatiju pribliżennych reszenij*, Moskwa 1976, 124.

5. ZDARZENIE ROZMYTE

Zakładamy, że przestrzenią zdarzeń elementarnych E jest zbiór R^n, czyli przestrzeń euklidesowa n-wymiarowa.

Zdarzeniem rozmytym w powyższej przestrzeni zwie się zbiór rozmyty w R^n, którego funkcja przynależności jest mierzalna w sensie Borela [8].

Skoro zdarzenia rozmyte, mówiąc krótko, są zbiorami rozmytymi przestrzeni R^n, przeto można do nich zastosować aparaturę teorii zbiorów rozmytych. Można więc mówić o zdarzeniu rozmytym przeciwnym do zdarzenia danego, o sumie mnogościowej dwu zdarzeń rozmytych, o ich sumie algebraicznej, o ich iloczynie mnogościowym i algebraicznym itd.

Z podobnego określenia wynika łatwo, że zdarzenie klasyczne jest szczególnym przypadkiem zdarzenia rozmytego. Inaczej mówiąc, pojęcie zdarzenia rozmytego stanowi uogólnienie pojęcia zdarzenia klasycznego.

Oto prosty przykład zdarzenia rozmytego. Rozważamy jednokrotny rzut kostką sześcienną. Interesuje nas zdarzenie polegające na wyrzuceniu liczby około 4. Można przyjąć, że odpowiednikiem rozmytego wyrażenia „około 4" będzie zbiór rozmyty, którego funkcja przynależności jest następująca: $f(1) = 0{,}2$, $f(2) = 0{,}4$, $f(3) = 0{,}8$, $f(4) = 1$, $f(5) = 0{,}8$, $f(6) = 0{,}1$.

Zanotujmy, że istnieją inne jeszcze sposoby wprowadzania pojęcia zdarzenia rozmytego. Informujemy jedynie o tym, bez wchodzenia w szczegóły. Przedstawione pojęcie zdarzenia rozmytego jest więc jedną z wypracowanych już wersji tego pojęcia.

Można określić pojęcie entropii zdarzenia rozmytego. Z racji wskazanych przed chwilą mamy do czynienie z alternatywnymi definicjami tego pojęcia [9].

Sensowne postępowanie polega na odniesieniu aparatury klasycznej teorii prawdopodobieństwa do pojęcia zdarzenia rozmytego. A zatem można mówić o prawdopodobieństwie zda-

---

[8] Por. E. Czogała, W. Pedrycz, dz. cyt., 49. Wyjaśnienie występujących w teorii zdarzeń rozmytych pojęć topologicznych oraz teoriomiarowych można znaleźć w każdym podręczniku z wymienionych dziedzin. Z łatwo dostępnej literatury w języku polskim można polecić następujące pozycje: K. Kuratowski, *Wstęp do teorii mnogości i topologii*, Warszawa 1977 [7]; S. Łojasiewicz, *Wstęp do teorii funkcji rzeczywistych*, Warszawa 1973.

[9] C. V. Negoita, D. A. Ralescu, *Applications of fuzzy sets to systems analysis*, Birkhäuser Verlag, Basel und Stuttgart 1975, 36.

rzenia rozmytego. Prawdopodobieństwo to określa się następująco:

Niech dane będzie zdarzenie rozmyte K, a więc podzbiór rozmyty K z funkcją przynależności f. Prawdopodobieństwem zdarzenia rozmytego K zwie się wartość oczekiwaną jego funkcji przynależności. Innymi słowy, jest to suma iloczynów wartości funkcji przynależności f przez prawdopodobieństwo pojawienia się argumentów funkcji f.

Obliczmy prawdopodobieństwo rozważanego nieco wcześniej zdarzenia rozmytego polegającego na wyrzuceniu liczby około 4. Przyjmijmy, że mamy do czynienia z kostką „symetryczną", a zatem, iż prawdopodobieństwo wyrzucenia dowolnej z sześciu liczb jest jednakowe i równe 1/6. Wówczas wspomniane prawdopodobieństwo dane będzie wzorem: $P(K)=0{,}2.1/6+0{,}4.1/6+0{,}8.1/6+1.1/6+0{,}8.1/6+0{,}1.1/6=0{,}55$.

Dla tak określonego prawdopodobieństwa zdarzenia rozmytego zachodzi wzór orzekający, iż prawdopodobieństwo sumy mnogościowej dwu zdarzeń rozmytych jest równe sumie prawdopodobieństw tych zdarzeń mniej prawdopodobieństwo ich iloczynu mnogościowego.

Dwa zdarzenia rozmyte K oraz L nazywa się zdarzeniami niezależnymi, jeżeli prawdopodobieństwo ich iloczynu algebraicznego jest równe iloczynowi ich prawdopodobieństw. Przy pomocy wzoru warunek powyższy zapiszemy następująco:

$$P(K \cdot L)=P(K) \cdot P(L)$$

We wzorze tym kropka (•) między K oraz L oznacza iloczyn algebraiczny zbiorów rozmytych, czyli innymi słowy zdarzeń rozmytych, zaś taka sama kropka (•) między P(K) oraz P(L) oznacza zwykłe mnożenie liczb. Symbol P oznacza bowiem prawdopodobieństwo rozważanego zdarzenia, jest więc liczbą z przedziału [0,1].

Można także określić prawdopodobieństwo warunkowe zdarzenia rozmytego K pod warunkiem zajścia zdarzenia L. Wspomniane prawdopodobieństwo określamy jako iloraz prawdopodobieństwa iloczynu algebraicznego zdarzeń rozmytych K oraz L przez prawdopodobieństwo zdarzenia rozmytego L.

Zauważy, że w naszkicowanym wyżej postępowaniu przypisującym zdarzeniom rozmytym prawdopodobieństwo ich zajścia posłużyliśmy się prawdopodobieństwem klasycznym. Innymi słowy, zastosowaliśmy klasyczną koncepcję prawdopodobieństwa do pojęcia zdarzenia rozmytego. Sensowną jest więc rzeczą mówić o klasycznym prawdopodobieństwie zdarzenia rozmytego.

Przejdziemy teraz do omówienia pojęcia prawdopodobieństwa rozmytego.

6. PRAWDOPODOBIEŃSTWO ROZMYTE

Omówimy najpierw pojęcia pomocnicze, do których należy pojęcie zmiennej zwykłej i rozmytej oraz pojęcie zmiennej lingwistycznej.

Zmienne reprezentują pewne obiekty; ich rodzaj, natura mogą być bardzo różne. Mówi się także, że zmienna przyjmuje wartości z danego zakresu. Jeżeli zakres wartości zmiennej jest ściśle określonym zbiorem, który zwiemy ograniczeniem wartości zmiennej, to zmienną zwiemy zwykłą. Mamy tu na myśli, rzecz jasna, zbiór w znaczeniu klasycznym.

Zmienną rozmytą zwiemy taką zmienną, która posiada rozmyte ograniczenie zbioru jej wartości; tym rozmytym ograniczeniem jest pewien zbiór rozmyty.

Przykładem zmiennej rozmytej może służyć pojęcie łatwości, z jaką daje się włożyć jakiś przedmiot do walizki. Przypuśćmy, że rozważanymi przedmiotami są: stół (s), palto (p), pantofel (r), koszula (k). Przyjmijmy, że stopień łatwości ł włożenia danego przedmiotu do walizki przedstawia się następująco: ł(s) = 0, ł(p) = 0,6, ł(r) = 0,9, ł(k) = 1. W ten sposób została określona zmienna rozmyta [10].

Widzimy więc, że ograniczenie zbioru wartości zmiennej może być zbiorem w znaczeniu klasycznym, bądź zbiorem rozmytym. W przypadku pierwszym mamy do czynienia ze zmienną zwykłą, w przypadku drugim — ze zmienną rozmytą [11].

Zmienną lingwistyczną zwiemy zmienną, której wartościami są słowa, względnie wypowiedzi, ustalonego języka; może nim być język naturalny, bądź język sztuczny [12]. Przykładem zmiennej lingwistycznej może służyć termin „wzrost". Zmienna ta przyjmuje takie wartości, jak: młody, stary, bardzo młody, nie bardzo młody, bardzo stary, nie bardzo stary itp.

Nietrudno zauważyć, że w odniesieniu do prezentowanych koncepcji rola zbiorów rozmytych jest analogiczna do roli słów w języku naturalnym [13].

---

[10] Por. L. A. Zadeh, dz. cyt., 59.
[11] Tamże, 21, 58.
[12] Tamże, 7, 71—72.
[13] Tamże, 70.

Prawdopodobieństwo rozmyte określa się przy pomocy pojęcia zmiennej lingwistycznej. A więc każdemu elementowi z rozważanego zespołu obiektów przyporządkowuje się prawdopodobieństwo rozmyte, przez które rozumie się odnośną zmienną lingwistyczną [14]. Nazwijmy to prawdopodobieństwo prawdopodobieństwem warstwowym. Mając określone rozmyte prawdopodobieństwo warstwowe dla poszczególnych elementów, można mówić o prawdopodobieństwie rozmytym w znaczeniu ogólnym w odniesieniu do danego zespołu obiektów. Jeżeli P_i będzie symbolizowało prawdopodobieństwo warstwowe, to przez P będziemy oznaczać stosowne prawdopodobieństwo ogólne. Konkretyzując powiemy, że jeżeli rozmyte prawdopodobieństwa warstwowe będą stanowić terminy „mało prawdopodobny", „nieprawdopodobny", „bliski jedności" itd., to termin „prawdopodobny" może być traktowany jako wspólna nazwa dla wspomnianych rozmytych prawdopodobieństw warstwowych.

W ten sposób mamy określone pojęcie prawdopodobieństwa rozmytego. Pojęcie to pozwala na rozróżnienie większej ilości zwrotów językowych, które z czysto lingwistycznego punktu widzenia uchodzą za synonimiczne. Np. w odniesieniu do terminu prawdopodobny można rozróżnić terminy „nieprawdopodobny" oraz „nie jest prawdopodobny". Mogą one być określone następująco: Niech x oznacza rozważane obiekty. Przypuśćmy, że zostało dla nich określone znaczenie zwrotu „prawdopodobieństwo (x)". Wówczas „nieprawdopodobieństwo (x)" przyjmujemy równe „prawdopodobieństwu (1-x)", zaś „nie jest prawdopodobny (x)" uznajemy za równe „1 — prawdopodobieństwo (x)". Czytelnika prosimy o wyrozumiałość z racji na występujące tutaj „zgrzyty" stylistyczne; trudno jest usunąć je wszystkie w sposób elegancki.

Zilustrujmy powyższe dość abstrakcyjne rozważania konkretnym przykładem [15]. Przypuśćmy, że mamy do czynienia z zespołem elementów postaci {0, 0,1, 0,2, 0,3, 0,4, 0,5, 0,6, 0,7, 0,8, 0,9, 1). Przypuśćmy dalej, że termin „prawdopodobieństwo (x)" został określony następująco:

$$f(0)=f(0{,}1)=f(0{,}2)=f(0{,}3)=f(0{,}4)=f(0{,}5)=0$$
$$f(0{,}6)=0{,}5$$
$$f(0{,}7)=0{,}7$$
$$f(0{,}8)=0{,}9$$

---

[14] Tamże, 114.
[15] Tamże, 114—115.

$f(0,9)=1$
$f(1)=1$

Wówczas termin „nieprawdopodobieństwo (x)" będzie określony przy pomocy funkcji g(x) o własnościach:

$g(0)=g(0,1)=1$
$g(0,2)=0,9$
$g(0,3)=0,7$
$g(0,4)=0,5$
$g(0,5)=g(0,6)=g(0,7)=g(0,8)=g(0,9)=g(1)=0,$

zaś termin „nie jest prawdopodobny (x)" przy pomocy funkcji h(x) postaci poniższej:

$h(0)=h(0,1)=h(0,2)=h(0,3)=h(0,4)=h(0,5)=1$
$h(0,6)=0,5$
$h(0,7)=0,3$
$h(0,8)=0,1$
$h(0,9)=h(1)=0$

Zanotujmy, że przy określeniu prawdopodobieństwa rozmytego występują tzw. zbiory rozmyte wyższych rzędów, w szczególności w definicji zmiennej lingwistycznej mamy do czynienia ze zbiorami rozmytymi drugiego rzędu. Wspominamy jedynie o tym nie rozważając bliżej tej sprawy. Dla osób znających szerzej teorię zbiorów rozmytych rzecz ta jest w pełni widoczna [16].

W punkcie 1.5. zajmowaliśmy się zdarzeniem rozmytym polegającym na wyrzuceniu oczka około 4 przy jednokrotnym rzucie kostką sześcienną. Obliczyliśmy również jego prawdopodobieńswo klasyczne. Obecnie obliczymy prawdopodobieństwo rozmyte wspominanego zdarzenia rozmytego.

W tym celu posłużymy się pojęciem warstwy zbioru rozmytego [17]. Niech s będzie liczbą z przedziału [0,1]. Wówczas s-warstwą danego zbioru rozmytego zwie się zbiór tych elementów zbioru bazowego, dla których funkcja przynależności jest większa, bądź równa s. Jeżeli przez K oznaczymy zbiór rozmyty, to K_s oznaczać będzie jego s-warstwę. Ponieważ zdarzenia rozmyte są zbiorami rozmytymi odpowiedniej przestrzeni bazowej, przeto można do nich stosować pojęcie s-warstwy.

---

[16] Zob. np. E. Czogała, W. Pedrycz, dz. cyt., 41—44.
[17] L. A. Zadeh, dz. cyt., 36; E. Czogała, W. Pedrycz, dz. cyt., 53.

Zastosujmy to pojęcie do wspomnianego zdarzenia rozmytego. Będziemy mieć:

$K_{0,2} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
$K_{0,4} = \{2, 3, 4, 5, 6\}$
$K_{0,8} = \{3, 4, 5\}$
$K_{1,0} = \{4\}$

Prawdopodobieństwa wymienionych warstw wynoszą:
$P(K_{0,2}) = 1$, $P(K_{0,4}) = 5/6$, $P(K_{0,8}) = 1/2$, $P(K_{1,0}) = 1/6$.
Konsekwentnie prawdopodobieństwo rozmyte dyskutowanego zdarzenia rozmytego może zostać przedstawione przy pomocy zbioru rozmytego, którego funkcja przynależności dana jest poniższymi równaniami [18]:

$f(0,2) = 1,$
$f(0,4) = 5/6,$
$f(0,8) = 1/2,$
$f(1,0) = 1/6.$

7. PODSUMOWANIE

Naszkicowaliśmy drogę prowadzącą do konstrukcji dwu pojęć „rozmytych", mianowicie: do pojęcia zdarzenia rozmytego oraz do pojęcia prawdopodobieństwa rozmytego. Konstrukcja wymienionych pojęć została dokonana w oparciu o pojęcie zbioru rozmytego. Pojęcie to odgrywa więc w całym postępowaniu rolę pojęcia fundamentalnego.

Można zatem mówić o zdarzeniu klasycznym oraz o zdarzeniu rozmytym, a także o prawdopodobieństwie klasycznym oraz o prawdopodobieństwie rozmytym. Sensowne są również zwroty: prawdopodobieństwo klasyczne zdarzenia rozmytego, prawdopodobieństwo rozmyte zdarzenia klasycznego, prawdopodobieństwo rozmyte zdarzenia rozmytego.

Dzięki temu otrzymuje się bardziej rozbudowaną aparaturę z teorii zdarzeń oraz z teorii prawdopodobieństwa, która obejmuje większą ilość przypadków, niż to ma miejsce w ujęciu klasycznym.

Cecha „rozmytości" przysługująca zdarzeniom oraz prawdopodobieństwu zdaje się stanowić ten czynnik, który umożliwia precyzyjne opisywanie procesów zachodzących w otaczającym nas świecie. A mają one przecież charakter dynamiczny. Nie ma w nich statyzmu, spetryfikowanego, raz na zawsze u-

[18] E. Czogała, W. Pedrycz, dz. cyt., 54—55.

stalonego przebiegu zjawisk zachodzących w świecie, w którym żyjemy. Rzeczywistość jest zmienna, różnorodna, bogata w formy; tworzy zarazem układ powiązanych ze sobą elementów. Innymi słowy jest ona systemem dynamicznym [19].

Systemowe spojrzenie na rzeczywistość harmonizuje z wynikami badań przeprowadzanych w naukach przyrodniczych, zaś teoria zbiorów rozmytych służy pomocą przy wypracowywaniu odpowiedniej aparatury pojęciowej.

Wspomniana cecha „rozmytości" przysługująca rozważanym pojęciom pozwala także na przeredagowanie nieostrych wypowiedzi, z którymi spotykamy się również w nauce. Przytoczmy jedną z tego rodzaju wypowiedzi: „Przeciwstawny punkt widzenia powstał w wyniku badań na pograniczu fizyki i filozofii. Niechęć wielu dziewiętnastowiecznych fizyków do filozofii jest prawdopodobnie powodem zaniedbania tej linii postępowania aż do ostatnich czasów."[20]. Nie jest jasne, co znaczy w tym tekście słowo „prawdopodobnie". Wypowiedzi podobnej postaci można podać wiele. Są one konsekwencją posługiwania się w nauce językiem naturalnym. W celu zwiększenia stopnia precyzji wypowiedzi naukowych niezbędne jest dysponowanie odpowiednią aparaturą pojęciową, która by to umożliwiała. Jak widzieliśmy, teoria zbiorów rozmytych okazuje się w tych sprawach wielce pożyteczna.

Wyrażając się obrazowo powiemy, że procesy zachodzące w nauce są ze sobą powiązane, wzajemnie na siebie oddziałują i tworzą dynamiczną całość; tworzą więc system. A zatem nie tylko rzeczywistość nas otaczająca jest systemem, jest nim także nauka. A wszędzie tam, gdzie są systemy, niezależnie od tego, czy chodzi o rzeczywistość od nas niezależną, czy też o twory naszego umysłu, pojawiają się obiekty rozmyte. Ich pojęciowe ujęcie wymaga aparatury wykraczającej poza standardowe, statyczne koncepcje. Innymi słowy, systemowy punkt widzenia koincyduje z rozmytymi koncepcjami. Wymienione koncepcje oraz wspomniany punkt widzenia warunkują się wzajemnie. Stwierdzenie to wydaje się być filozoficznie interesujące.

Zauważmy jeszcze, że terminu prawdopodobieństwo używa się na oznaczenie samego pojęcia prawdopodobieństwa, jak też jego ilości, czyli miary prawdopodobieństwa. Podobny zwyczaj

---

[19] Por. N. M. Wildiers, *Obraz świata a teologia od średniowiecza do dzisiaj*, tł. J. Doktór, Warszawa 1985.

[20] H. Bondi, *Kosmologia*, Warszawa 1965, 13.

daje się zaobserwować w odniesieniu do pojęcia informacji. Ostatni ten termin oznacza nie tylko pojęcie informacji, ale także jej ilość, zwłaszcza w ujęciu zaproponowanym przez C. E. Shannona [21].

EVENTS, PROBABILITY, FUZZINESS

(Summary)

The aim of this paper is to present the notions of fuzzy events and fuzzy probability. These notions are generalizations, respectively, of the notions of event and of probability. It seems that these notions are philosophically interesting. Indirectly they concern the problem of the systemic character of the reality and of the science.

---

[21] Zob. C. E. Shannon, *A mathematical theory of communication*, Bell System tech. J. 27 1948, 379—423, 623—656.