Edward Nieznański

Dowód Gödla na istnienie summum bonum

Studia Philosophiae Christianae 25/2, 89-102

1989

Studia Philosophiae Christianae
ATK
25(1989)2

EDWARD NIEZNAŃSKI

DOWÓD GÖDLA NA ISTNIENIE SUMMUM BONUM

0. WSTĘP

Austriacki matematyk Kurt Gödel (1906—1978) największe sukcesy naukowe osiągnął w metamatematyce i teorii mnogości. Wśród matematyków, a także filozofów, zasłynął głównie swym zaskakującym odkryciem istotnej poznawczej ograniczoności metody aksjomatycznej. Jak się jednak okazuje, ten geniusz logiki matematycznej prowadził również, z sobie właściwą precyzją, dociekania w sprawie istnienia Boga — pojętego jako summum bonum, najwyższe dobro i jako summa boni, byt dla nas zdeterminowany sumą koniecznych kwalifikacji pozytywnych, w ściśle określonym znaczeniu pojęć sumy i konieczności.

Dowód, o którym tu mowa, pojawił się na osiem lat przed śmiercią Gödla, 10 lutego 1970 r., w postaci dwu stron rękopisu i pozostał w wersji roboczej dotąd nie opublikowany. Fakt posiadania kserokopii tego rękopisu zawdzięczamy prof. Johannesowi Czermakowi, dyrektorowi Istytutu Matematycznego na uniwersytecie w Salzburgu, sekretarzowi — założonego w ubiegłym roku (a kierowanego przez prof. Hao Wanga) — towarzystwa naukowego „Kurt Gödel Gesellschaft" w Wiedniu. Najwcześniejszy oficjalny sygnał o istnieniu jakiegoś dowodu ontologicznego Gödla znajdujemy w „Ruchu Filozoficznym" 44(1987) s. 107 w informacji o odczycie Jerzego Perzanowskiego w Krakowskim Oddziale PTF, dnia 28 III 1985, na temat „Dowód monizmu? Marginalia do dowodu ontologicznego Gödla". Pierwszy opublikowany wykład wraz z analizą tego dowodu ma miejsce dopiero w podręczniku Essler-Brendel-Martinez, Grundzüge der Logik II, Frankfurt 1987, Anhang III, s. 309—319.

5 maja 1988 r. w Katedrze Logiki ATK w Warszawie prof. Johannes Aloisius Czermak wygłosił odczyt naukowy pt. „Gödels ontologischer Gottesbeweis". Z tego odczytu, jak też z dostarczonego maszynopisu, poznajemy dwa najwcześniejsze (choć nie publikowane) krytyczne opracowania dowodu Gödla, autorstwa prof. Dany Scotta i samego Czermaka.

Rozwiązania Czermaka były oparte na interpretacji Scotta i są niezależne od badań Esslera. Kolejna natomiast próba, pochodząca od Siegwarta, nawiązywała w całości do rozważań Esslera nie pozotając w żadnym związku z rozstrzygnięciami Czermaka. W liczącym 110 stron (przygotowanym do druku) skrypcie „Gott", Eine einführungsmethodologische Untersuchung, Essen, November 1987 dr Geo Siegwart proponuje pewną teoriomnogościową interpretację dowodu Gödla. Naszą uwagę zwraca pewien odnotowany w tym skrypcie szczegół o losach dowodu Gödla, przekazany przez prof. Esslera w liście z dnia 30 czerwca 1987 r.: „Was Ihre Frage zur Quelle des Gödelschen Gottesbeweises betrifft, so kann ich Ihnen hierzu nur folgendes sagen: Herr Prof. Stig Kanger aus Schweden hat mir vor ca 2 Jahren, ..., diesen Beweis mitgeteilt, der ihm wiederum über Dana Scott erhalten hat". Stąd, w kontekście poprzednich ustaleń, można sądzić, że prof. Dana Scott położył największe zasługi w dziele odkrycia i rozpowszechnienia ontologicznego dowodu Gödla.

Ostatnim wreszcie dostępnym nam opracowaniem, które stanowi krytyczny rozbiór omawianego dowodu Gödla, jest maszynopis Otto Mucka, profesora uniwersytetu w Innsbrucku, o tytule „Gödels Gottesbeweis. Analyse, Variationen, Anwendungen", Innsbruck, September 1988, s. 10.

1. ORYGINALNA WERSJA DOWODU

Przytoczonego tu tekstu nie zaliczamy bynajmniej do czegoś w rodzaju „krytyczna edycja dzieł Gödla". Posiadana odbitka rękopisu jest w wielu miejscach nieczytelna. Przypisy — inaczej niż się rzecz ma w samym oryginale — numerujemy i umieszczamy u dołu stronicy. Ze względów technicznych stosujemy też inne niż u Gödla znaki implikacji i małego kwantyfikatora.

From folder 06/41
Feb. 10, 1970

Ontologischer Beweis

$P(\varphi)$ φ is positive (or $\varphi \varepsilon P$)

Ax. 1 $P(\varphi) \cdot P(\psi) \rightarrow P(\varphi \cdot \psi)$ [1]

Ax 2 $P(\varphi)$ v [2] $P(\sim\varphi)$

Df 1 $G(x) \equiv (\varphi)[P(\varphi \rightarrow \varphi(x)]$ (God)

Df 2 $\varphi \text{Ess. } x \equiv (\psi)[\psi(x) \rightarrow N(y)[\varphi(y) \rightarrow \psi(y)]]$ (Essence [3] of x)

$p \rightarrow_N Nq = N(p \rightarrow q)$ Necessity

Ax.2 $P(\varphi) \rightarrow NP(\varphi)$ } because it follows from the nature
$\sim P(\varphi) \rightarrow N \sim P(\varphi)$ } of the property

Th. $G(x) \rightarrow G \text{ Ess. } x$

Df. $E(x) \equiv (\varphi)[\varphi \text{ Ess. } x \rightarrow N(Vx)\varphi(x)]$ necessary Existence

Ax 3 $P(E)$

Th. $G(x) \rightarrow N(Vy)G(y)$

hence $(Vx)G(x) \rightarrow N(Vy)G(y)$

hence $M(Vx)G(x) \rightarrow MN(Vy)G(y)$ M = possibility

" " $\rightarrow N(Vy)G(y)$

$M(Vx)G(x)$ means the system of all pos. prop. is compatible. This is true because of:

Ax. 4: $P(\varphi) \cdot \varphi \rightarrow_N \psi : \rightarrow P(\psi)$ which implies

$\begin{cases} x = x & \text{is positive} \\ x \neq x & \text{is negative} \end{cases}$

But if a system S of pos. prop. were incomp. it would mean that the sum prop. s (which is positive) would be $x \neq x$ [4].

Positive means positive in the moral aesthetic sense (independly of the accidental structure of the world). Only then the ax. true. It may also mean pure „attribution" as opposed to „privation" [5] (or containing privation). This interprets simpler proof.

2. FORMALNO-LOGICZNE INTERPRETACJE DOWODU GÖDLA [6]

Wszyscy interpretatorzy dowodu Gödla na istnienie Boga przyjmują zgodnie, że dowód ten jest zapisany w języku sformalizowanym S5-modalnego rachunku predykatów (z identycz-

---

[1] and for any number of summands.

[2] exclusive or.

[3] any two essences of x are nec. equivalent.

[4] If φ pos., then not: $(x)\, N \sim \varphi(x)$. Otherwise: $\psi(x) \rightarrow_N x \neq x$ hence $x \neq x$ positive, so $x = x$ neg. contrary Ax. 4 on the exist. of pos. prop.

[5] i. e. the disj. normal form in terms of elem. prop. contains a member without negation.

[6] Ponieważ prezentowany materiał jest przeważnie jeszcze in statu fieri, nie przywiązujemy większej wagi do pojawiających się błędów

nością) drugiego rzędu. Dokładniej rzecz biorąc, chodzi właściwie o fragment takiego rachunku, zawierający jeden tylko rodzaj zmiennych predykatowych pierwszego rzędu, a mianowicie tylko jednoargumentowe zmienne wspomianego rodzaju.

Przyjmijmy metajęzykowe oznaczenie „Z_i" dla zbioru zmiennych logicznych i-tego rzędu. Z_0 jest wówczas zbiorem zmiennych indywiduowych, a Z_1 — zbiorem zmiennych reprezentujących jednoargumnetowe predykaty pierwszego rzędu. W języku sformalizowanym, który opisujemy, będą „x", „y", „z" $\in Z_0$ oraz „F", „G", „H" $\in Z_1$. Niech z kolei „S_i" oznacza zbiór stałych pozalogicznych rzędu i, dla i = 0, 1, 2. Wówczas „b" $\in S_0$ (nazwa „Bóg" jest stałą idywiduową), „B" $\in S_1$ (predykat „Bóg" jest stałą predykatową pierwszego rzędu), zaś „P" $\in S_2$ (predykat „pozytywny" jest stałą predykatową drugiego rzędu). Stałymi logicznymi naszego języka są: „$\sim$" (negacja), „$\wedge$" (koniunkcja), „$\rightarrow$" (implikacja), „v" (alternatywa), „$\leftrightarrow$" (równoważność), „A" (kwantyfikator ogólny), „V" (kwantyfikator szczegółowy), „=" (identyczność), „N" (funktor konieczności), „M" (funktor możliwości), „$\hat{}$" (operator abstrakcji). Na gruncie tego słownika możemy określić termy (wyrażenia nazwowe) i formuły prezentowanego języka. Niech „T_i" oznacza zbiór termów rzędu i, dla i = 0, 1, 2. Wówczas $Z_i \cup S_i \subset T_i$. Jeżeli „z" $\in Z_0$, a X jest formułą, to $\hat{z}[X]$ jest elementem zbioru T_1. Jeżeli t $\in T_1$, to $(\sim t)$, Nt, Mt $\in T_1$. Jeżeli t, w $\in T_1$, to $(t \wedge w)$, $(t \vee w)$, $(t \rightarrow w)$, $(t \leftrightarrow w) \in T_1$. Jeżeli i = 0, 1, zaś t $\in T_i$ oraz w $\in T_{i+1}$, to w(t) jest formułą. Jeżeli t, w $\in T_i$, dla i = 0,1, to t = w jest formułą. Jeżeli X oraz Y są formułami, to są nimi również $\sim X$, $X \wedge Y$, $X \vee Y$, $X \rightarrow Y$, $X \leftrightarrow Y$, NX i MX. Jeżeli X jest formułą, zaś u $\in Z_0 \cup Z_1$, to formułami są Au X i Vu X.

2.1. DOWÓD GÖDLA W UJĘCIU DANY SCOTTA

Maszynopis Johannesa Czermaka przytacza na stronach 5—7 formalną interpretację dowodu Gödla w wykonaniu Dany Scotta. Scott przyjmuje najpierw dwa aksjomaty:

Aks1. $P(\sim F) \leftrightarrow \sim P(F)$

Aks2. $P(F) \wedge N\, Ax\, [F(x) \rightarrow G(x)] \rightarrow P(G)$.

Na podstawie tych aksjomatów dowodzi

Tw1. $P(F) \rightarrow M\, Vx\, F(x)$.

Z kolei wprowadza definicję pojęcia Boga:

Def. $B(x) \leftrightarrow AF\, [P(F) \rightarrow F(x)]$.

---

i nieścisłości w maszynopisach interpretatorów Gödla, dążąc raczej do rozwinięcia cennych wątków, niż do wierności słowu.

Dodaje kolejne aksjomaty:
Aks3. P(B)
Aks4. $P(F) \rightarrow N\, P(F)$.
Przytacza następnie definicję istoty bytu:
Def. F Ess. $x \leftrightarrow F(x) \wedge AG\, [G(x) \rightarrow N\, Ay\, [F(y) \rightarrow G(y)]]$.
Wykorzystując tę definicję oraz aksjomaty Aks1 i Aks4 dowodzi założeniowo w logice S5
Tw2. $B(x) \rightarrow B$ Ess. x.
Dorzuca jeszcze dwie uwagi:
F Ess. $x \wedge G$ Ess. $x \rightarrow N\, (F = G)$ i
F Ess. $x \rightarrow N\, Ay\, [F(y) \rightarrow y = x]$.
Na koniec dołącza definicję koniecznego istnienia i aksjomat przypisujący cechę pozytywności temu rodzajowi bytu:
Def. $E(x) \leftrightarrow AF\, [F$ Ess. $x \rightarrow N\, Vx\, F(x)]$
Aks5. P(E).
Wykład rachunku Gödla zamyka postępowanie uzasadniające Tw3.
Tw3. $N\, Vx\, B(x)$, bo:
1. $B(x) \rightarrow E(x)$, z Aks5 i Def. B
2. $E(x) \wedge B$ Ess. $x \rightarrow N\, Vx\, B(x)$, z Def. E
3. $B(x) \rightarrow N\, Vx\, B(x)$, bo 1, Tw2, 2
4. $Vx\, B(x) \rightarrow N\, Vx\, B(x)$, z 3
5. $M\, Vx\, B(x) \rightarrow MN\, Vx\, B(x)$, bo 4, reguła wnioskowana Gödla i prawo $N\, (p \rightarrow q) \rightarrow (Mp \rightarrow Mq)$
6. $M\, Vx\, B(x) \rightarrow N\, Vx\, B(x)$, bo 5 i $MNp \rightarrow Np$
7. $M\, Vx\, B(x)$, bo Tw1 i Aks3
8. $N\, Vx\, B(x)$, bo 6 i 7.

Dana Scott nie komentuje faktu pojawienia się w dowodzie Gödla dwu różnych formuł pod tym samym oznaczeniem „Ax2". Uważa je jednak za dedukcyjnie niezależne, skoro obie wprowadza aksjomatycznie jako Aks1 i Aks4. Aksjomat Ax. 1 Gödla upraszcza Scott do postaci Aks3. Gödla defnicja istoty bytu Df2: F Ess. $x \leftrightarrow AG\, [G(x) \rightarrow F \leqq_N G]$, gdzie $F \leqq_N G \leftrightarrow$ $\leftrightarrow N\, Ax\, [F(x) \rightarrow G(x)]$, jest definicją za szeroką, gdyż według niej każda pusta cecha F byłaby już istotą dowolnego bytu x. Musiał dostrzec to Dana Scott, skoro jego definicja istoty bytu została uzupełniona, koniunkcyjnie dodanym do definiensa, ograniczeniem F(x), które nie wynika z formuły $AG\, [G(x) \rightarrow$ $\rightarrow F \leqq_N G]$.

2.2. KOMENTARZ HANSA CZERMAKA DO DOWODU GÖDLA

W swym 12-stronicowym maszynopisie „Gödels ontologischer Gottesbeweis" Johannes Czermak zauważa najpierw, że dowód

Gödla w swej filozoficznej treści jest najbardziej zbliżony do ontologicznego argumentu Leibniza z „Monadologii” 41, 44 i 45, zaś w swej warstwie formalnej asymiluje zwłaszcza Ch. Hartshorne'a (1961), (1962) sformalizowany na gruncie logiki modalnej S5 dowód św. Anzelma na istnienie bytu maksymalnie doskonałego. J. Czermak przyjął w całości, i bez żadnych zmian, interpretację dowodu Gödla podaną przez Danę Scotta. Uzupełnił ją jedynie szczegółową listą aksjomatów logicznych i reguł wnioskowania. Jest ona połączeniem aksjomatyki i reguł rachunku predykatów drugiego rzędu (z identycznością) oraz zestawu aksjomatów i reguł logiki modalnej S5. Gdy chodzi o uwagi szczegółowe, Czermak pokazuje najpierw, że aksjomatykę Dany Scotta można wzmocnić przez dodanie do każdego aksjomatu X znaku konieczności NX. Ważnym — także ze względów filozoficznych — spostrzeżeniem Czermaka jest, wykazany na podstawie Aks1 fakt, że

$$\begin{aligned} B(x) &\leftrightarrow AF\,[P(F) \rightarrow F(x)] \leftrightarrow \\ &\leftrightarrow AF\,[\sim F(x) \rightarrow \sim P(F)] \leftrightarrow \\ &\leftrightarrow AF\,[\sim F(x) \rightarrow P(\sim F)] \leftrightarrow \\ &\leftrightarrow AF\,[F(x) \rightarrow P(F)]. \end{aligned}$$

Znaczy to, że określenie „Bóg jest bytem mającym wszystkie cechy pozytywne” jest równoważne definicji „Bóg jest bytem, którego wszystkie cechy sa pozytywne”. Wobec wykazanej równoważności $B(x) \leftrightarrow AF\,[F(x) \rightarrow P(F)]$ — zauważa Czermak — Twierdzenie Tw1 można wzmocnić do równoważności $P(B) \leftrightarrow M\,Vx\,B(x)$.

Następnie prof. Czermak wykazuje na podstawie Def. Ess, prawa logiki predykatów: $F(x) \leftrightarrow Ay\,[y = x \rightarrow F(y)]$ oraz aksjomatu abstrakcji, że z jednej strony: F Ess. $x \rightarrow F = \hat{z}\,[x = z]$, zaś z drugiej: $\hat{z}\,[x = z]$ Ess. $x \leftrightarrow$ $\leftrightarrow AG\,[G(x) \rightarrow N\,Ay\,(x = y \rightarrow G(y))]$, skąd jednak nie daje się wykazać w prosty sposób, że $Ax\,VF\,(F$ Ess. $x)$.

Na koniec J. Czermak zauważa, że w oparciu o aksjomat abstrakcji i Aks2 uzyskujemy tezy w rodzaju: $P(F) \rightarrow P(F \vee G)$, $P(F) \rightarrow P(G \rightarrow F)$, $P(F \wedge G) \rightarrow P(F)$, zaś z Aks3 i Aks5 — również: $P(F) \wedge P(G) \rightarrow P(F \wedge G)$, $P(F) \rightarrow P(NF)$. Oznacza to, że każda cecha „logiczna” jest pozytywna i tym samym żaden byt nie posiada samych tylko cech nie-pozytywnych.

2.3. ARGUMENTACJA GÖDLA W OPRACOWANIU WILHELMA ESSLERA

Wilhelm Essler uważa, że zasadniczą ideę Gödla można wyłożyć w języku pozbawionym funktorów modalnych. Przedstawia zatem argument Gödla na dwa sposoby. Najpierw wykłada go w asertorycznym rachunku predykatów z identycznością drugiego rzędu. Rozszerza ten rachunek jedynie o trzy aksjomaty pozalogiczne i jedną definicję dla predykatu „Bóg".

a1. $AF\,[P(F) \leftrightarrow \sim P(-F)]$, gdzie $-F(x) \leftrightarrow \sim F(x)$.
a2. $P(\hat{x}\,AF\,[P(F) \rightarrow F(x)])$ lub $P(\frown P)$,
gdzie „$\frown P$" oznacza „iloczyn po wszystkich cechach pozytywnych".
a3. $AF\,AG\,[F \leqq G \wedge P(F) \rightarrow P(G)]$,
gdzie $F \leqq G \leftrightarrow Ax\,[F(x) \rightarrow G(x)]$.
df. B: $Ax\,\{B(x) \leftrightarrow AF\,[P(F) \rightarrow F(x)]\}$ lub $B = \frown P$.

Na przyjętych podstawach W. Essler dowodzi trzech twierdzeń:
t1. $AF\,[P(F) \rightarrow Vx\,F(x)]$, bo:
1. $P(F)$, założenie
2. $\sim Vx\,F(x)$, z. d. n. (założenie dowodu nie wprost)
3. $F = O \leftrightarrow \sim Vx\,F(x)$, df. O
4. $P(O)$, bo 1, 2, 3
5. $F = U \leftrightarrow Ax\,F(x)$, df. U
6. $P(U)$, bo $Ax\,U(x)$, $F \leqq U$, a3, 1
7. $\sim P(-U)$, bo a1, 6
8. $\sim P(O)$, bo 7, $O = -U$
sprzeczność: 4, 8.

t2. $Vx\,B(x)$, bo:
1. $B = \frown P$, df. B
2. $P(\frown P)$, bo a2
3. $P(B)$, bo 1, 2
4. $Vx\,B(x)$, bo t1, 3.

Zarówno Gödel jak Scott i Czermak poprzestawali tylko na wykazywaniu tezy, że Bóg istnieje, pomijając sprawę Jego jedyności. Dowód taki w ich rachunkach jest jednak łatwy do przeprowadzenia, co pokażemy dla przykładu w systemie Dany Scotta.

Tw4. $B(x) \wedge B(y) \rightarrow x = y$, bo:
1. $B(x)$, założ.
2. $B(y)$, założ.
1.1 $\sim P(\hat{z}[z = y])$, z d. n.
1.2 $P(\sim \hat{z}[z = y])$, z Aks1 i 1.1
1.3 $\sim \hat{z}[z = y](y)$, bo 2, Def. B, 1.2
1.4 $\sim y = y$, bo 1.1., aksjomat abstrakcji

sprzecz.: 1.4, $y = y$.

3. $P(\hat{z}[z = y])$, bo z 1.1 wynika sprzecz.
4. $x = y$, bo 1, Def. B, aksjomat abstrakcji.

Pierwszym jednak interpretatorem Gödla, który dowiódł tezy o jedyności Boga, był W. Essler.

t3. $Ax\, Ay\, [B(x) \wedge B(y) \rightarrow x = y]$, bo:

1. $B(x)$, założ.
2. $B(y)$, założ.

1.1. $\sim P(\{x\})$, z. d. n.

1.2 $P(-\{x\})$, bo a1, 1.1

1.3 $-\{x\}(x)$, bo df. B, 1, 1.2

1.4 $\sim x = x$, bo $-F(x) \leftrightarrow \sim F(x)$ i $\{y\}(x) \leftrightarrow x = y$

sprzecz.: 1,4 z $x = x$

3. $P(\{x\})$, bo z 1.1 wynika sprzecz.
4. $x = y$, bo 2, df. B, 3, $\{x\}(y) \leftrightarrow x = y$.

Z twierdzeń t2 i t3 w oparciu o pojęcie kwantyfikatora jednostkowego V_1x... wyprowadza Essler ostatnią tezę:

t4. $V_1x\, B(x)$.

Prof Essler — świadom tego, że niektórych pojęć i tez Gödla nie da się odnotować w języku niemodalnym — przytacza również modalny wykład argumentu Gödla. Wypowiada jednak od razu na wstępie swoje krytyczne „credo" odnośnie do logik modalnych. Stosownie do semantyki Kripkego dla logik modalnych, mówi o światach możliwych i relacji R „względnej dostępności światów". Relacja ta w przypadku systemu S5 ma być zwrotna, symetryczna i przechodnia zarazem, a skoro logika ta jest prawdziwa we wszystkich modelach z równoważnościowymi relacjami R, więc tym samym i w takich, w których R jest identycznością. Wówczas jednak $p \leftrightarrow Np \leftrightarrow Mp$. W zastosowaniu zaś do modeli „empirycznie" wybranych, logika modalna — zdaniem Esslera — miałaby już być niestosowna (man benötigt dann allerdings nicht mehr die Modallogik"). Mimo swej negatywnej oceny przydatności logik modalnych Essler odtwarza modalny argument Gödla i przyjmuje:

A1. $AF\, AG\, [F \leqq_N G \wedge P(F) \rightarrow P(G)]$

A2. $AF \sim [P(F) \leftrightarrow P(-F)]$.

Z tych dwu aksjomatów wyprowadza tezę

T1. $AF\, [P(F) \rightarrow F \neq O]$, gdzie $O = \hat{x}[x \neq x]$.

Następnie dodana zostaje definicja:

D1. $B = \cap P$

i kolejny aksjomat:

A3. $P(B)$.

Z A3 i T1 uzyskuje się od razu

T2. $B \neq O$.

Następnie dodaje Essler definicję istoty bytu:

D2. $\mathrm{AF\,Ax}\,\{F\ \mathrm{Ess.}\ x \leftrightarrow F(x) \wedge \mathrm{AG}\,[G(x) \rightarrow F \leqq_N G]\}$.

Powiększa aksjomatykę o kolejny aksjomat:

A4. $\mathrm{AF}\,[P(F) \rightarrow N\,P(F)]$.

i dowodzi twierdzenia

T3. $\mathrm{Ax}\,[B(x) \rightarrow B\ \mathrm{Ess.}\ x]$.

Na koniec Essler dodaje jeszcze definicję koniecznego istnienia:

D3. $\mathrm{Ax}\,\{E(x) \leftrightarrow \mathrm{AF}\,[F\ \mathrm{Ess.}\ x \rightarrow N(F \neq O)]\}$

i uzupełnia aksjomatykę ostatnim aksjomatem:

A5. $P(E)$.

Całą prezentację modalnego argumentu Gödla zamyka dowód tezy

T4. $N(B \neq O)$.

2.4. GÖDLOWSKI DOWÓD W TEORIOMNOGOŚCIOWEJ INTERPRETACJI GEO SIEGWARTA

Na stronach 69—75 swego skryptu dr Geo Siegwart stara się wyłożyć argument Gödla „in einer naiven Mengensprache erster Stufe". Zapewne pod wpływem krytycznych uwag Esslera na temat logik modalnych rezygnuje z modalnej wersji argumentu Gödla na rzecz asertorycznego dowodu Esslera. Usiłuje jednak dowód ten zapisać w języku naiwnej teorii mnogości, z jednym tylko rodzajem zmiennych. Ponieważ teoria taka jest antynomialna (bo przyjęty przez Siegwarta aksjomat definicyjny prowadzi do antynomii Russella), interpretację dowodu Gödla (czy raczej Esslera) w wykonaniu Siegwarta można traktować poważnie dopiero po jej gruntownym przeredagowaniu na język algebry zbiorów, w takiej np. postaci tej algebry, jaką znajdujemy w podręczniku J. Słupeckiego i L. Borkowskiego (1963) s. 125—136. Trzy aksjomaty Esslera (a1, a2, a3) i jedna definicja (df. B) przyjęłyby wówczas ich mnogościowy wyraz:

a1⁺. $\mathrm{AX}\,(X \in P \leftrightarrow \sim X' \in P)$,

gdzie stała „P" oznacza rodzinę zbiorów „pozytywnych", zaś $x \in X' \leftrightarrow \sim x \in X$.

a2⁺. $(\cap P) \in P$.

(Iloczyn po wszystkich zbiorach rodziny P jest elementem tej rodziny).

a3⁺. $\mathrm{AX\,AY}\,(X \subset Y \wedge X \in P \rightarrow Y \in P)$.

df. B⁺. $B = (\cap P)$

(Zbiór Bogów jest identyczny z iloczynem uogólnionym rodziny wszystkich zbiorów „pozytywnych").

Można wówczas udowodnić, że $Vx(\{x\} = \cap P)$.

Przyjmijmy na koniec oznaczenia: „aI" dla $Vx\,AF\,[P(F) \leftrightarrow \leftrightarrow F(x)]$ i „aI^{+}" dla $Vx\,AX\,(X \in P \leftrightarrow x \in X)$. Wówczas można także wykazać w rachunku predykatów (z identycznością) drugiego rzędu, w oparciu o df. B, że

tI. $aI \leftrightarrow aI \wedge a2 \wedge a3$ i

tII. $aI \rightarrow Vx(\{x\} = \cap P)$,

zaś w algebrze zbiorów — z dodaną do niej definicją df. B^{+} —

tI^{+}. $aI^{+} \leftrightarrow aI^{+} \wedge a2^{+} \wedge a3^{+}$ i

tII^{+}. $aI^{+} \rightarrow Vx(\{x\} = \cap P)$.

Możliwe jest zatem — co do liczby aksjomatów — dalsze uproszczenie rachunków w wersji Esslera i oparcie ich na jednym tylko aksjomacie.

2.5. OTTO MUCKA ANALIZA DOWODU GÖDLA

W swym opracowaniu prof. Otto Muck powołuje się — co do źródeł — na rękopis Gödla, oraz interpretacje Esslera i Siegwarta. Nie są mu natomiast znane analizy Scotta i Czermaka. Swoje rozważania rozpoczyna od wiernego zreferowania treści rękopisu Gödla. Odnośnie do dwu różnych formuł oznaczonych przez Gödla tym samym numerem „Ax2", prof. Muck twierdzi, że są to dwa aksjomaty dedukcyjnie niezależne i w związku z tym, aksjomat drugi w kolejności występowania w tekście Gödla oznacza przez „Ax2′".

Rozmaite związki wynikania inferencyjnego w rozwiniętym przez siebie rachunku Gödla przedstawia O. Muck w postaci trzech czytelnych, choć znacznie skomplikowanych wykresów. Związki te, niektóre z nich, zreferujemy za pomocą schematów inferencyjnych, w rodzaju $P_1, P_2, \ldots, P_n : W$ (n przesłanek P_i oddzielonych przecinkami, dwukropek jako skrót spójnika „więc", W — wniosek).

(1) $Ax1,\ P(F) \wedge P(G) \rightarrow P(F.G) : P(F) \wedge (PG) \rightarrow \rightarrow VH\,[H \leq F.G \wedge P(H) \wedge H \neq O]$.

(2) $Ax4 : P(F) \wedge F \leq G \rightarrow P(G)$.

(3) $P(F) \wedge F \leq G \rightarrow P(G),\ F \leq U,\ VF\,P(F) : P(U)$.

(4) $Ax1,\ P(F) \rightarrow F \neq O : \sim [P(F) \wedge P(-F)]$.

(5) $\sim [P(F) \wedge P(-F)],\ P(U),\ O = -U : \sim P(O)$.

(6) $P(F) \rightarrow F \neq O : \sim P(O)$.

(7) $P(F) \wedge P(G) \rightarrow VH\,[H \leq F \cdot G \wedge P(H) \wedge H \neq O] : \sim P(O)$.

(8) $P(O) \wedge O \leq F \rightarrow P(F) : AF\,P(F)$.

(9) $\bigvee F \sim P(F),\ P(O) \wedge O \leqq F \rightarrow P(F) : \sim P(O)$.
(10) $Ax2,\ P(U),\ O = -U : \sim P(O)$.
(11) $Ax2 : P(F) \vee P(-F)$.
(12) $Ax2 : \sim [P(F) \wedge P(-F)]$.
(13) $\sim [P(F) \wedge P(-F)],\ P(F) \vee P(-F) : \sim [P(F) \leftrightarrow P(-F)]$.

Przytoczone związki stanowią zaledwie połowę tych inferencji, które notuje pierwszy wykres Mucka. Oryginalnym pomysłem w dalszych analizach jest próba pokazania konsekwencji przyjęcia założenia, że „nie-pozytywne właściwości dają się przedstawić za pomocą cech pozytywnych i ich dopełnień":

z1. $\sim P(F) \rightarrow \bigvee G \bigvee H [P(G) \wedge P(H) \wedge F = G \cdot -H]$.

O. Muck stwierdza:

(14) $Ax4 : \bigvee F \sim P(F) \rightarrow \sim P(O)$, bo (9).
(15) $Ax4 : \bigvee F\, P(F) \rightarrow P(U)$, bo (3).
(16) $z1 : \bigvee F \sim P(F) \rightarrow \bigvee G\, P(G)$.
(17) $z1 : \bigvee F \sim P(F) \rightarrow \sim P(O) \wedge P(U)$, bo (14), (15) i (16).
(18) $Ax1,\ Ax2' : \sim P(O) \rightarrow \bigvee G \bigwedge F [P(F) \rightarrow G \leqq_N F \wedge N(G \neq O)]$.
(19) $G(x) \wedge G(y) \wedge x \neq y,\quad x \neq y \rightarrow \bigvee F [F(x) \wedge \sim F(y)] : \ : \sim \bigvee F \bigvee x \bigvee y [G(x) \wedge F(x) \wedge G(y) \wedge \sim F(y)] \rightarrow [G(x) \wedge G(y) \rightarrow x = y]$.
(20) $Df. B : P(F) \rightarrow B \leqq F$.
(21) $Df. B : P(F) \rightarrow \sim \bigvee y [B(y) \wedge \sim F(y)]$, bo (20).
(22) $Df. B,\ z1 : \sim P(F) \rightarrow \sim \bigvee y [B(y) \wedge \sim F(y)]$.
(23) $Ax1,\ Ax4,\ Def. B,\ z1 : \bigvee F \sim P(F) \rightarrow \bigvee G (\bigwedge F [P(F) \rightarrow G \leqq_N F] \wedge \bigwedge x \bigwedge y [G(x) \wedge G(y) \rightarrow x = y])$.

3. SPRAWA SEMANTYCZNEJ I METAFIZYCZNEJ INTERPRETACJI DOWODU GÖDLA

Gödel przeprowadza rozumowanie:

(g1) $\bigvee x\, B(x) \rightarrow N \bigvee y\, B(y)$, skąd
(g2) $M \bigvee x\, B(x) \rightarrow MN \bigvee y\, B(y)$, a stąd
(g3) $M \bigvee x\, B(x) \rightarrow N \bigvee y\, B(y)$.

W systemach logiki modalnej (budowanych metodą Gödla) od twierdzenia (g1) o potaci $p \rightarrow Nq$, z pomocą reguły inferencyjnej Gödla (RG: X, zatem NX, dla każdej tezy X) przechodzimy do formuły o postaci $N(p \rightarrow Nq)$. Z pomocą prawa L1. $N(p \rightarrow q) \rightarrow (Mp \rightarrow Mq)$ uzyskujemy następnie z (g1) tezę (g2) o postaci $Mp \rightarrow MNq$. Jeżeli wykorzystamy teraz prawo L2. $MNp \rightarrow Np$, otrzymamy od razu z (g2) wniosek (g3). Możemy jednak zamiast L2 zastosować L3. $MNp \rightarrow p$ i wówczas z (g1) i (g2) uzyskamy (g3). Rozumowanie Gödla można wobec tego przeprowadzić w systemie S5 (który zawiera tezy L1, L2 i regułę RG), bądź w logice modalnej Brouwera (która posiada L1, L3 i RG, choć nie zawiera prawa L2). Semantyki Kripkego, jakie w tym przypadku są stosowane, muszą o relacji R zachodzącej między światami możliwymi zakładać, że jest ona zwrotna i symetryczna w swym polu (dla systemu B) i dodatkowo przechodnia (dla S5).

Pewne uwagi semantyczne do języka argumentu Gödla poczynił W. Essler. J Czermak, korzytając z semantyki Kripkego, przeprowadził natomiast dowód niesprzeczności dla Gödla teorii summum bonum, zgodny z pojęciem niesprzeczności określonym przez Posta. Próby zaś zbudowania adekwatnej semantyki teorii opartej na aksjomatach Gödla podjął się O. Muck.

Niech zbiorem światów możliwych będzie rodzina $W = \{w_1, w_2, ..., w_n\}$, gdzie dla każdego w_i $i \in I = \{1, 2, ..., n\}$. Zakłada się, że każdy świat możliwy w_i, mający uniwersum indywiduów U_i, jest algebrą Boole'a pojęć, zawartą w zbiorze potęgowym 2^{U_i}. Niech $U = U_1 \cup U_2 \cup ... \cup U_n$. Zakładamy, że relacja R — zawarta w I^2 — jest relacją równoważnościową w zbiorze I. Oznacza to według Mucka tyle samo co fakt, że R spełnia warunek: $iRj \wedge iRk \rightarrow jRk$, dla każdego i, j, $k \in I$. Zakładamy wreszcie, że Ai Ak $(iRk \rightarrow U_i = U_k)$. Korzystając z niekórych ustaleń Otto Mucka przyjmujemy dla formuł języka argumentu Gödla następującą interpretację semantyczną:

$(Np)_i \leftrightarrow Aj\,(iRj \rightarrow p_j)$, $(Mp)_i \leftrightarrow Vj\,(iRj \wedge p_j)$.

$(F(a))_i \leftrightarrow a \in F/U_i \in w_i$,

gdzie $F/U_i = \{x \in U_i : F(x)\}$.

$F_i(a) \leftrightarrow a \in F \in w_i$, gdzie $F = \{x \in U : F(x)\}$.

$(Vx\, F(x))_i \leftrightarrow Va\,(a \in U_i \wedge a \in F/U_i \in w_i)$.

$Vx\, F_i(x) \leftrightarrow Va\,(a \in U \wedge a \in F \in w_i)$.

$(Ax\, F(x))_i \leftrightarrow Aa\,(a \in U_i \rightarrow a \in F/U_i \in w_i)$.

$Ax\, F_i(x) \leftrightarrow Aa\,(a \in U \rightarrow a \in F \in w_i)$.

Wszystkie dalsze warunki są kombinacjami przytoczonych ustaleń interpretacyjnych. Osobnej interpretacji wymaga jeszcze tylko pierwotna stała predykatowa drugiego rzędu „P". Sprawę tę rostrzygnął najpierw J. Czermak, a następnie O. Muck. Predykat „P" denotuje filtry maksymalne (ultrafiltry) w światach w_i. Gödlowskie aksjomaty Ax1 i Ax4 stwierdzają właśnie, że „P" denotuje filtry, zaś pierwszy z aksjomatów Ax2 przesądza dodatkowo, że chodzi wyłącznie o filtry maksymalne. Należy w tym miejscu zauważyć, że jedonelementowość pojęcia Boga daje się dowieść jedynie wówczas, gdy nie nakładamy żadnych ograniczeń na regułę podstawiania za zmienne predykatowe, co w języku semantyki znaczy, że każdy świat możliwy w_i ma być największą z algebr Boole'a dającą się utworzyć z uniwersum indywiduów U_i, czyli każde $w_i = 2^{U_i}$. Oznacza to niezwykłe utrudnienie dla poszukiwań semantyki Gödlowskiej teorii summum bonum, zgodnej równocześnie z oczekiwaniami metafizycznymi. Moglibyśmy np. w miejsce przyjętego przez O. Mucka zbioru indeksów naturalnych I wprowadzić zbiór punktów czasowych T. Każdy wówczas świat możliwy w_i byłby światem aktualnym w czasie $i \in T$. Relacja „dostępności światów" R mogłaby zachodzić między w_i oraz w_j, powiedzmy wówczas, gdy światy te podlegałyby tym samym prawom natury. Każde uniwersum U_i byłoby zbiorem bytów aktualnych w chwili i, zaś U — ogółem bytów realnych. Znalezienie wówczas w algebrach pojęć 2^{U_i} ultrafiltru wspólnego wszystkim tak pojętym światom możliwym, złożonego z pojęć „pozytywnych" i przy tym w jakimś ugruntowanym sensie „realnych", wydaje się być przedsięwzięciem karkołomnym, które wymaga zapewne długich jeszcze i wielce skomplikowanych dociekań semantyczno-metafizycznych.

LITERATURA

J. A. Czermak, *Gödels antologischer Gottesbeweis*, Salzburg, maszynopis, 12 stron.

Essler-Brendel-Martinez, *Grundzüge der Logik II*, Frankfurt 1987.

K. Gödel, *Ontologicher Beweis*, from folder 06/41, Februar 1970, kserokopia rękopisu, 2 strony.

Ch. Hartshorne, *The Logic of the Ontological Argument*, Journal of Philosophy 58(1961), s. 471—473.

Ch. Hartshorne, *The Logic of Perfection*, Lasalle 1962.

O. Muck, *Gödels Gottesbeweis. Analyse, Variationen, Anwendungen*, Innsbruck, September 1988, maszynopis, 10 stron.

D. Scott, *Gödel's Ontological Proof*, (w:) J. A. Czermak, s. 5—7.

G. Siegwart, *'Gott'. Eine einführungsmethodologische Untersuchung*, Essen, November 1987, maszynopis, 110 stron.

J. Słupecki, L. Borkowski, *Elementy logiki matematycznej i teorii mnogości*, Warszawa 1963.

GÖDELS BEWEIS FÜR DIE EXISTENZ DES SUMMUM BONUM

Zusammenfassung

In diesem Aufsatz wird am Anfang die Gödels Originalversion (Handschrift) des ontologischen Gottesbeweises dargestellt. Danach treten die Interpretationen dieses Beweises von Dana Scott, Johannes Czermak,

Wilhelm Essler, Geo Siegwart und Otto Muck hervor. Alle Überlegungen führen zum Schluss, dass jede Semantik vom Kripke's Typ für das Gödelschen System als die möglichen Welten nur die Booleschen Algebren w_i enthält, die bei dem Individuenbereich U_i mit der Potenzmenge 2^{U_i} gleich sind. Nur in diesem Fall kann die „Göttlichkeit" als Durchschnitt aller positiven Eigenschaften, d. h. der Durchschnitt aller Elemente des Ultrafilters in der Algebra w_i, die einelementige Menge sein.