Michał Tempczyk

Rozwój pojęcia przestrzeni w geometrii XIX wieku

Studia Philosophiae Christianae 26/1, 184-194

1990

MICHAŁ TEMPCZYK

ROZWÓJ POJĘCIA PRZESTRZENI W GEOMETRII XIX WIEKU

Geometria jest jednym z najstarszych działów matematyki. Rozwijała się ona w ciągu tysięcy lat, lecz prawdziwa rewolucja dokonała się na początku ubiegłego stulecia, gdy N. Łobaczewski i J. Bolyai skonstuowali geometrie nieeuklidesowe. Doprowadziło to do poważnych zmian poglądów na istotę przestrzeni matematycznej i fizycznej.

Geometria jako uporządkowana wiedza praktyczna powstała w Egipcie około czterech tysięcy lat temu. Na jej rozwój poważny wpływ miały praktyczne potrzeby związane z wytyczaniem granic pól zalewanych regularnie przez Nil. Po opadnięciu wód Nilu trzeba było właściwie od nowa określać kształt i zasięg poszczególnych posiadłości ziemskich. Praktyczne doświadczenie mierniczych było porządkowane i rozwijane w postaci pewnych reguł i zasad, o których prawdziwości można się było przekonać dokonując odpowiednich pomiarów. To praktyczne pochodzenie geometrii mało wielki wpływ na rozwój tej nauki, ponieważ utrwaliło się przekonanie, że jej prawa opisują realną przestrzeń fizyczną. Gdy Grecy zaczęli rozwijać geometrię jako naukę teoretyczną, to w dalszym ciągu była to wiedza o przestrzeni świata, w którym żyjemy. Ookoło 300 rpne Euklides pisze *Elementy*, dzieło, które przez ponad dwa tysiące lat było wzorem ścisłości i elegancji matematycznej. Geometria była w *Elementach* zaprezentowana jako teoria dedukcyjna, w której z podstawowych niedefiniowanych pojęć i wyjściowych postulatów wyprowadza się pozostałe twierdzenia, których prawdziwość wynika z prawdziwości postulatów.

Spośród pięciu pewników podanych przez Euklidesa w I księdze *Elementów*, cztery pierwsze robiły wrażenie oczywistych, a jedynie piąty zawierał treść, nad której prawdziwością można się było zastanawiać. Głosi on: Jeżeli linia prosta przecina dwie linie proste w ten sposób, że suma kątów powstałych po jednej stronie jest mniejsza od sumy dwóch kątów prostych, to linie te przecinają się po tej stronie, po której występują te kąty[1]. Następcy Euklidesa przez setki lat starali się udowodnić, że pewnik ten jest prawdziwy. Nie udało się wykazać, że jest on konsekwencją pozostałych czterech. Znaleziono wiele sformułowań równoważnych, na przykład Legendre udowodnił, że jest on równoważny twierdzeniu, że suma kątów trójkąta jest równa sumie dwóch kątów prostych. Inne sformułowanie głosi, że przez punkt nie leżący na prostej można poprowadzić tylko jedną prostą równoległą do niej. Pomimo tych osiągnięć zagadnienie prawdziwości piątego pewnika Euklidesa pozostawało otwarte. Wszystkie prace i wyniki tego rodzaju podzielały jedno fundamentalne przekonanie, to mianowicie, że geometria opisuje własności przestrzeni naszego świata, dlatego wszystkie jej aksjomaty muszą być prawdziwe lub fałszywe. Kłopot polegał na tym, że prawdziwości tej nie udawało się wykazać w sposób przekonujący.

Rewolucyjność nowego typu geometrii, zaproponowanej w 1823 roku przez J. Bolyaia i w 1826 roku przez N. Łobaczewskiego polegała na tym, że ich twórcy przestali wierzyć w to, że budzący tyle dyskusji pewnik

---

[1] Postulaty te są podane w książce H. S. M. Coxeter, *Non-Euclidean Geometry*, Toronto, 1942, s. 1.

musi być badany z punktu widzenia jego prawdziwości. Bolyai sformułował geometrię absolutną, to znaczy zajął się tymi twierdzeniami, które są niezależne od piątego pewnika Euklidesa. Łobaczewski zdefiniował równoległość w taki sposób, że przez każdy punkt poza prostą przechodzą dwie linie proste równoległe do danej. Chociaż każdy z nich stworzył własną geometrię, wspólne im było swobodne potraktowanie problemu prawdziwości postulatu o równoległych. Było to całkowicie nowe spojrzenie na tę sprawę. Miało ono wielorakie i daleko idące konsekwencje. Matematycy ówcześni natychmiast zdali sobie sprawę z tego, że to co proponują Bolyai i Łobaczewski nie konweniuje z powszechnym sposobem myślenia i nie chcieli zgodzić się na poważne i rzeczowe potraktowanie nowych idei geometri. Bolyai zniechęcił się i przestał zajmować się wymyśloną przez siebie geometrią, poprzestając w zasadzie na jednej pracy, która była dodatkiem do napisanej przez jgo ojca książki, poświęconej zagadnieniu równoległych. Łobaczewski był bardziej odporny psychicznie i rozwijał swoją „pangeometrię" do końca życia, czyli przez trzydzieści lat. Był on cenionym uczonym i na uniwersytecie w Kazaniu pełnił ważne funkcje. Dożył czasu, gdy nowe spojrzenie na geometrię stało się już powszechnym i gdy uczeni zaczęli pojmować, na czym polega jej istota.

Chociaż Bolyai i Łobaczewski byli autorami pierwszych prac jawnie zrywających z geometrią euklidesową, to prawdziwym odkrywcą geometrii nieeuklidesowych był C. F. Gauss. Przez ponad dwadzieścia lat pracował nad dowodem piątego pewnika, by w końcu w 1813 roku rozpocząć prace nad geometrią, w której pewnik ten nie musi być prawdziwy. Badał on takie geometrie, w których suma kątów trójkąta jest mniejsza od sumy dwóch kątów prostych[2]. Jest to geometria równoważna geometrii Łobaczewskiego. Gauss nie ogłosił swych wyników, ponieważ bał się ośmieszenia i hałasu, jaki mogły one spowodować w środowisku matematyków. Pisał jednak o nich w licznych listach do przyjaciół i współpracowników, dlatego można na podstawie zachowanej korespondencji dosyć dokładnie odtworzyć jego rozwój w tej dziedzinie. Był on świadom, że prawdziwość piątego pewnika nie jest sprawą oczywistości ani prawdziwości empirycznej, że możliwe są różne geometrie. Matematyk powinien badać wszystkie możliwości, a dopiero sprawą fizyków jest rozstrzygnięcie, która z tych geometrii obowiązuje w świecie materialnym. Przeciwnicy nowych geometrii byli przekonani o tym, że odrzucenie piątego pewnika powinno doprowadzić do sprzeczności.

Oto co Gauss piał w liście do swego przyjaciela W. Olbersa w 1817 roku: „Jestem coraz bardziej przekonany, że konieczność naszej geometrii nie może być udowodniona ani za pomocą ludzkiego rozumu ani ludzkiemu rozumowi. Być może w innym życiu dojdziemy do innych poglądów na istotę przestrzeni, obecnie nam niedostępnych. Do tego czasu geometrię trzeba porównywać nie z arytmetyką, istniejącą *a priori*, a z mechaniką"[3]. W tym stwierdzeniu widać jasno istotę trudności związanych z uznaniem nowych geometrii. Wynikały one z przekonania, że geometria musi być jedna, ponieważ, jak głosił Kant, jest ona

---

[2] Różnicę pomiędzy sumą kątów trójkąta a sumą dwóch kątów prostych nazywa się defektem trójkąta.

[3] Cytat za książką B. A. Rosenfelda, *Istorija niejewklidowoj geometrii*, Moskwa, 1976, w której podane są dokładne informacje o historii i rozwoju geometrii.

formą ludzkiej zmysłowości i nie możemy świata spostrzegać inaczej niż jako zanurzonego w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej. Inne geometrie były niemożliwe, niedostępne i niewyobrażalne dla ludzkiego umysłu. Kant precyzyjnie i głęboko wyraził to, o czym jego współcześni byli przekonani na podstawie wielowiekowych doświadczeń z geometrią Euklidesa. Z tego powodu sądzono, że odrzucenie postulatu o równoległych prowadzić musi do sprzeczności.

W miarę uświadamiania sobie, że piąty pewnik Euklidesa nie jest wcale oczywisty, a przyjęcie zamiast niego innych aksjomatów nie prowadzi do sprzeczności, trzeba było inaczej spojrzeć na przestrzenie opisywane przez różne geometrie. Przestrzenie te należało oderwać od świata fizycznego, traktując je jako twory umysłu ludzkiego. Już Bolyai w liście do ojca, w którym donosił mu o sformułowaniu nowej geometrii, pisał: „Stworzyłem z niczego nowy wszechświat"[4]. Wszechświat ten był oczywiście tworem umysłu ludzkiego, którego moc twórcza okazała się większa od tej, którą przypisywał mu Kant. Pierwszy krok został wykonany. Geometrię oderwano od świata materialnego, przestała ona być nauką empiryczną i jednoznaczną. Można było wyobrażać sobie i badać różne przestrzenie bez obawy popadnięcia w sprzeczność.

Nie wynika z tego wcale, że geometria nie ma żadnego związku z własnościami materii. Zamiast dowodzić prawdziwości jedynej geometrii Euklidesa należało obecnie zbadać, jaka jest geometria rzeczywistego świata. Mogła to być oczywiście geometria Euklidesa. Różnica pomiędzy sytuacją dawną i nową polegała na tym, że teraz geometria ta występowała w roli jednej z kandydatek i należało drogą pomiarów ustalić, która z możliwości odpowiada prawdzie. Również tym zagadnieniem zajął się Gauss. Skorzystał on z tego, że defekt trójkąta jest proporcjonalny do jego pola, dlatego im większy trójkąt badamy, tym większe prawdopodobieństwo tego, że uda nam się stwierdzić, iż suma kątów tego trójkąta jest mniejsza od sumy dwóch kątów prostych. Szansa na wykrycie tego zjawiska istnieje tylko wtedy, gdy przestrzeń fizyczna jest rzeczywiście hiperboliczna, czyli taka, jaką opisuje geometria Łobaczewskiego. Negatywne wyniki pomiarów można interpretować dwojako. Albo przestrzeń jest naprawdę euklidesowa, albo też badamy zbyt małe trójkąty (wielokąty). Gauss za pomocą teodolitów dokonywał pomiarów kątów trójkąta utworzonego przez trzy wierzchołki górskie. Większych figur nie można było wówczas dokładnie badać. Suma pomierzonych kątów była równa dwóm kątom prostym. W obszarach o tej skali odstępstwo od geometrii Euklidesa było niezauważalne.

Dalszy rozwój geometrii dokonał się dzięki B. Riemannowi, który zajął się własnościami powierzchni sferycznych. Własności figur na powierzchni kuli, a zwłaszcza trójkątów, okręgów i kół były od tysiącleci przedmiotem zainteresowania głównie astronomów, którzy obserwowali i opisywali położenie planet i gwiazd na sferze niebieskiej. Na potrzeby astronomii stworzono całą gałąź geometrii, geometrię sferyczną, w której obowiązują specjalne prawa. Szczególnie ciekawa i spójna jest trygonometria sferyczna. W geometrii tej suma kątów trójkąta jest zawsze większa od sumy dwóch kątów prostych, a nadmiar ten jest proporcjonalny do rozmiarów trójkąta. Jeżeli łuki kół łączących wybrane pary punktów potraktujemy jako odcinki, a koła te jako proste,

---

[4] Cytat za Coxeter, *op. cit.*, s. 10.

to otrzymamy geometrię, w której nie ma patrzeb równoległych, to znaczy takich, które nie przecinają się. Każda prosta jest ponadto ograniczona. W geometrii sferycznej każda figura jest ograniczona, ponieważ cała przestrzeń jest ograniczona.

Te dobrze znane sprawy zostały przez Riemanna naświetlone w 1854 roku w nowy sposób. Spojrzał on na geometrię sferyczną jako na nowy rodzaj geometrii nieeuklidesowej, różnej od geometrii Łobaczewskiego. Z punktu widzenia postulatu o równolgłych geometria Łobaczewskiego i geometria sferyczna odchodzą od geometrii Eukldesa w przeciwnych kierunkach. U Łobaczewskiego przez punkt nie leżący na prostej przechodzą dwie proste równoległe, a każda prosta przechodząca przez ten punkt i zawarta pomiędzy nimi nie przecina danej prostej. W geometrii Euklidesa prosta równoległa jest jedna, a w geometrii sferycznej nie ma wcale prostych równoległych. Podobnie przedstawia się sprawa sumy kątów trójkąta. Może ona być mniejsza od sumy dwóch kątów prostych (Łobaczewski), równa jej (Euklides) lub większa (Riemann). Otrzymuje się w ten sposób wszystkie możliwości. Z geometrią badaną przez Riemanna, nazwaną geometrią eliptyczną, łatwiej się było pogodzić, ponieważ od początku istniał dobrze znany model tej geometrii — powierzchnia kuli.

Geometrie nieeuklidesowe posiadają bardzo ważną cechę, różniącą je od geometrii euklidesowej. Istnieje w nich mianowicie wzorzec długości. W przestrzeni Euklidesa nie ma ustalonej skali wielkości figur. Istnieją na przykład podobne trójkąty o najróżniejszych rozmiarach, pewne z nich mogą być tysiące razy mniejsze od innych. Innymi słowy przestrzeń jest taka sama, niezależnie od wielkości badanego obszaru. W geometriach nieeuklidesowych jest inaczej. Zarówno w przestrzeni eliptycznej jak i hiperbolicznj dwa trójkąty o równych odpowiednich kątach muszą być identyczne. Wynika to chociażby z tego, że defekt trójkąta jest addytywny. Jeżeli zbudujemy trójkąt drogą sumowania kilku mniejszych trójkątów, to jego defekt równy będzie sumie defektów trójkątów składowych, nie może więc zdarzyć się tak, że kąty dużego trójkąta będą równe kątom jednego ze składników.

Fakt ten można łatwo zrozumieć w przypadku geometrii eliptycznej, równej geometrii na sferze. Trudniej wyobrazić go sobie w przestrzeni Łobaczewskiego, która nie ma takigo prostego modelu. Jednak już twórca tej geometrii wiedział, że jest ona blisko związana z geometrią sferyczną. Wzory trygonometryczne geometrii Łobaczewskiego otrzymuje się z wzorów geometrii sferycznej, gdy przyjmie się, że chodzi o geometrią sfery o urojonym promieniu i. Jeżeli w trójkącie sferycznym o bokach a, b, c pomnożymy wszystkie boki przez i, otrzymując liczby urojone ia, ib, ic, to otrzymamy wzory geometrii hiperbolicznej. Zwykłe funkcje trygonometryczne sin, cos... zamienią się na funkcje hiperboliczne sh, ch. Dzięki temu związkowi można zrozumieć, dlaczego w przestrzeni Łobaczewskiego również występuje wzorzec długości. Przestrzeń tę można wyobrazić sobie jako obszar, w którym linie proste są łukowato wygięte. Stopień tego wygięcia narzuca całości pewną miarę odległości, która wpływa na wszystkie figury.

Dokonane przez Łobaczewskiego odkrycie, że wzory jego geometrii są równe wzorom geometrii sferycznej na powierzchni kuli o urojonym promieniu jednostkowym prowadzi nas do następnego zagadnienia, mianowicie do problemu modeli geometrii nieeuklidesowych i ich niesprzeczności. Jeżeli mamy model jakiejś teorii formalnej, to teoria ta jest niesprzeczna, chyba że sam model jest sprzeczny. Jest to możliwe wtedy, gdy model sam jest konstrukcją formalną. W omawianym przez nas przypadku obie geometrie mogą być zinterpretowane w oparciu o konstrukcje dokonane w geometrii Euklidesa, dla której są one konkurentkami. Dzięki temu założenie o niesprzeczności geometrii Eukldesa prowadzi natychmiast do wniosku, że geometrie nieeuklidesowe są również niesprzeczne. W świetle tego faktu widać, jak nieuzasadnione było przekonanie dawnych geometrów, że odrzucenie piątego pewnika Euklidesa musi prowadzić do sprzeczności. Trzy możliw sformułowania tego pewnika są niezależne od siebie, a ich prawdziwość jest ściśle związana ze sobą. Klasyczne modele geometrii nieeuklidesowych dowodzą, że z niesprzeczności geometrii klasycznej wynika niesprzeczności nowych geometrii. W toku dalszych badań znaleziono na gruncie obu geometrii nieeuklidesowych modele geometrii euklidesowej. Są to więc geometrie wzajemnie interpretowalne, w każdej z nich można skonstruować modele obu pozostałych. Takiego wyniku nikt dawniej nie przewidywał. Nie można już pytać, która z geometrii jest lepsza lub niesprzeczna. Jako konstrukcje formalne są one równoprawne. Można oczywiście stawiać pytanie, jaka jest geometria przestrzeni fizycznej, badanej przez nauki empiryczne. Jest to jednak pytanie wykraczające poza matematykę. W ramach matematyki jako sztuki konstruowania systemów formalnych nie można żadnej geometrii wybrać jako lepszej od konkurentek.

Nie jest to koniec naszej opowieści o rozwoju geometrii XIX w. Dalszy istotny postęp w rozumieniu istoty przestrzeni geometrycznych był dziełem F. Kleina, który w swoim sławnym wykładzie z 1873 roku, wygłoszonym w Erlangen, zaproponował nową interpretację istoty i zadań geometrii. Wystartował on z pojęcia przestrzeni i grupy przekształceń tej przestrzeni na siebie. Przekształcenia te nie zmieniają pewnych wielkości. Na przykład przesunięcia i obroty w zwykłej przestrzeni euklidesowej nie zmieniają odległości ani kątów. Matematycy stwierdzając to mówią, że odległości i kąty są niezmiennikami grupy przekształceń składającej się z przesunięć i obrotów. Klein zaproponował, aby przestrzeń i grupę przekształceń potraktować jako pojęcia pierwotne, a zadaniem geometrii uczynć badanie niezmienników tych przekształceń. Było to całkowicie nowe podejście do geometrii. Do tego czasu przestrzeń i jej elementy składowe, takie jak punkty, linie proste, trójkąty, okręgi itp. były traktowane jako pierwotne dane geometrii. Zadaniem geometrii było badanie własności tych figur. Dopuszczano takie przekształcenia, które nie zmieniają własności uznanych za istotne. Przekształcenia te zależą od tego, co uznamy za ważne. Gdy chcemy, aby kąty i odległości pozostały niezmienione, to możemy jedynie przesuwać i obracać figury. Można jednak badać podobieństwo figur, które wcale nie wymaga zachowania odległości, natomiast nie zezwala na zmianę kątów. Widać z tego, że przekstzałcenia zachowujące odległości są częścią grupy tych przekształceń, które zachowują podobieństwo figur.

Jest to szczegółowa konsekwencja pewnego ogólnego faktu formalnego. Im większa grupa przekształceń, tym mniej własności figur geometrycznych nie ulega zmianie pod działaniem tych przekształceń. Geometria odpowiadająca więc obszernym grupom przekształceń jest uboga. Chcąc otrzymać przestrzeń o bogatych własnościach trzeba odpowiednio ograniczyć grupę przekształceń dopuszczanych w tej przestrzeni.

Potraktowanie własności geometrycznych jako niezmienników pewnej grupy przekształceń stało się punktem wyjścia dla nowego programu rozwoju geometrii, nazwanego programem erlangeńskim. Jego realizacja była w znacznej mierze dziełem Kleina, który go zaproponował. Pozwoliła ona w ostateczny sposób uporządkować i poklasyfikować wszystkie możliwe geometrie. Okazało się, że najogólniejszą geometrią jest geometria rzutowa. Opisuje ona przestrzeń, w której jedynymi elementami pierwotnymi są punkty i proste, a jedyną relacją jest relacja leżenia punktu na prostej, zwana relacją incydencji. Nie ma tu mowy o równoległości prostych w zwykłym znaczeniu, ponieważ wszystkie pary prostych przecinają się. Proste, które nazwalibyśmy równoległymi przecinają się w punkcie leżącym w nieskończoności. Punkt ten dodajemy do przestrzni i traktujemy go jako zwykły składnik tej przestrzeni. Każdej klasie prostych równoleg.ych odpowiada jeden punkt w nieskończoności, a cała płaszczyzna rzutowa jest uzupełniona o prostą leżącą w nieskończoności.

Równoległość prostych nie jest niezmiennikiem, ponieważ za pomocą przekształceń rzutowych możemy dowolny punkt, również punkt z nieskończoności, przesunąć do każdego punktu normalnego lub z nieskończoności. W ten sposób odpowiadające punktowi z nieskończoności proste równoległe mogą po wykonaniu przekształcenia przecinać się w dowolnym punkcie płaszczyzny. W podobny sposób można z prostych przecinających się uczynić proste równoległe w sensie euklidesowym. Proste są przez transformacje rzutowe przekształcane na proste z zachowaniem relacji leżenia punktu na prostej. Jest to bardzo obszerna grupa transformacji.

Można łatwo udowodnić, że przekształcenia rzutowe zawierają w sobie wszystkie grupy przekształceń dopuszczalnych w innych, mniej uniwersalnych geometriach. Własność leżenia punktu na prostej jest zachowana we wszystkich geometriach badanych w ubiegłym stuleciu. Przekształcenia charakteryzujące te geometrie są więc przekształceniami rzutowymi. Należało jedynie zbadać, co trzeba dodać do własności rzutowych, aby otrzymać na przykład przestrzeń Łobaczewskiego. Okazało się, że przestrzeń, w której można mierzyć odległości i kąty powstaje z przestrzeni rzutowej, gdy wyróżnimy w niej określoną powierzchnię, opisaną równaniem stopnia drugiego. Na przekształcenia takiej przestrzeni nakłada się warunek, że przeprowadzają one tę powierzchnię na siebie. Używane obecnie nazwy geometrii nieeuklidesowych pochodzą właśnies od rodzaju tej wyróżnionej powierzchni. Geometria Łobaczewskiego jest hiperboliczna, ponieważ interpretowana rzutowo przekształca na siebie hiperbolę. Geometrii sferycznej odpowiada elipsa, stąd nazwa geometria eliptyczna, a geometrii Euklidesa — parabola.

Pod koniec ubiegłego wieku wiedziano już, że każdej geometrii metrycznej można przyporządkować odpowiednią przestrzeń rzutową. Geometria Euklidesa odpowiada przestrzeni, w której wyróżniona jest linia prosta w przypadku płaszczyzny, lub płaszczyzna dla przestrzeni trójwymiarowej. Są one traktowane jako zdegenerowane powierzchnie stopnia drugiego. Daje to pełną klasyfikację możliwych geometrii metrycznych. Nie są to wszystkie przestrzenie lecz podstawowe typy. W każdej przestrzeni mierzy się odległości i kąty. Matematycy udowodnili, że są to pomiary niezależne w tym sensie, iż na przykład hiperboliczne związki pomiędzy odległościami nie muszą wcale odpowiadać hiperbolicznym wzorom na kąty. Oba rodzaje wielkości można określać i mierzyć niezależnie. Na płaszczyźnie mamy więc dziewięć geometrii, powstających z kombinacji trzech rodzajów odległości z trzema rodzajami kątów.

Przy takim postawieniu sprawy geometria staje się rzeczywiście dziedziną swobodnych konstrukcji umysłowych, których związek z codziennymi przeżyciami wynikającymi z percepcji przestrzennej wcale nie znika, lecz przestaje ograniczać i narzucać się w formie przekonania o jednoznaczności i oczywistości pewnej geometrii. Wyobraźnia matematyków, oswobodzona ze zbyt sztywnego powiązania pojęcia przestrzeni geometrycznej z przestrzenią fizyczną, okazała się niezwykle twórcza i bogata. Można stwierdzić, że w drugiej połowie ubiegłego stulecia prześcigali się oni w wymyślaniu najrozmaitszych przestrzeni, powierzchni i figur. Doprowadziło to do powstania wielu ciekawych modeli różnych geometrii. O jednym z nich warto powiedzieć kilka słów, ponieważ miał on wielkie znaczenie geometryczne i filozoficzne. Chodzi o zbudowany przez H. Poincarego model płaszczyzny Łobaczewskiego [5].

W roku 1882 Poincaré ogłosił pracę *Theorie des groupes fuchsiens*, w której wykazał, że w jednostkowym kole można, odpowiednio definiując linie proste i mierząc w określony sposób odległości, otrzymać przestrzeń równoważną płaszczyźnie Łobaczewskiego. Liniami prostymi tego modelu są łuki okręgów prostopadłych do wybranego koła, które oznaczać będziemy symbolem w. Przez dwa dowolnie wybrane punkty przechodzi jeden taki łuk. Odległość jest tak zdefiniowana, że w miarę zbliżania się do w skala odległości staje się coraz mniejsza. Jeżeli weźmiemy pod uwagę dwa punkty wybranego łuku, których euklidesowa odległość jest dana i zaczniemy przesuwać je w kierunku w z zachowaniem tej odległości, to ich odległość hiperboliczna rośnie, osiągając wartość nieskończoną, gdy jeden z tych punktów dojdzie do w. Dzięki temu wnętrze koła jednostkowego w geometrii euklidesowej staje się w nowej metryce niskończoną płaszczyzną. Kąty mierzy się tak jak w zwykłej geometrii. Sam okrąg w pełni rolę prostej w nieskończoności. Przez punkt nie leżący na zadanym łuku można przeprowadzić wiele łuków prostopadłych do w, które nie przecinają danego łuku. Spośród nich dwa są wyróżnione, te mianowicie, które przecinają dany łuk w punktach końcowych, leżących na w. Są to w terminologii Łobaczewskiego dwie proste równoległe do danej, przechodzące przez zadany punkt.

W przeciwieństwie do modeli geometrii nieeuklidesowych znanych do tego czasu, model Poincarego polega na istotnej deformacji odległości w porównaniu z odległościami mierzonymi w standardowej geometrii rysunku. Na przykład w geometrii powierzchni kuli, traktowanej jako model geometrii eliptycznej, wzory opisują kąty i odległości rzeczywiście mierzone na tej kuli. Poincare zmienił funkcję odległości, zachowując kąty. Taką zmianę nazywa się transformacją konforemną, a odpowiadającą jej geometrię — geometrią konforemną. Jest to ciekawy typ geometrii, używanej obecnie w szczególnej teorii względności. Konforemny model płaszczyzny Łobaczewskiego stał się znany dzięki pewnym obrazom Eschera, sławnego malarza holenderskiego. Przykładem może być obraz, w którym diabły przeplatają się z aniołami. W centrum rysunku postacie są dosyć duże i wyraźne, a w miarę zbliżania się do ograniczającego rysunek koła maleją one w odpowiedniej skali. Dzięki temu na rysunku powinna się zmieścić nieskończona liczba aniołów i diabłów, których oczywiście nie udało się narysować.

Przestrzeń rzutowa, która w ostateczności stała się podstawą wszystkich geometrii metrycznych, nie była wcale odkryciem XIX wieku. Już

---

[5] Ładny wykład modelu Poincarego znajduje się w D. Pedoe, *A Course of Geometry for Colleges and Universities*, Cambridge, 1970.

w starożytności badano zagadnienie, w jaki sposób człowiek widzi świat. Harmonijne kształty greckich świątyń powstały dzięki znajomości praw geometrii rzutowej. Oko ludzkie nie mierzy bezpośrednio odległości. Trójwymiarowa bryła świątyni jest zamieniana na dwuwymiarowy obraz rzutowany na siatkówkę oka. Chcąc w obrazie tym otrzymać określone proporcje odległości i kątów należy odpowiednio zdeformować proporcje gmachu. Grecy pisali na ten temat całe traktaty, a wiele podstawowych twierdzeń tej dziedziny, np. twierdzenie Pappusa, nosi greckie nazwiska.

Matematycy powrócili do tych spraw w okresie Odrodzenia, gdy malarze ponownie odkryli perspektywę i zaczęli stosować ją w swoich obrazach. Powstała w ten sposób bogata i ciekawa dziedzina matematyczna, która intensywnie rozwijała się do naszych czasów. Jednym z jej twórców był W. Hamilton, który tak bardzo zasłużył się w mechanice, optyce i algebrze. Pewne działy algebry powstawały zresztą dla potrzeb geometrii. Ich przykładem może być wynaleziony przez Hamiltona rachunek kwaternionów, służący do opisu obrotów w przestrzeni trójwymiarowej. Liczby zespolone były uznane przez społeczność matematyków dopiero wtedy, gdy Gauss wynalazł ich geometryczny model na płaszczyźnie.

Na zakończenie wspomnijmy jeszcze o innym osiągnięciu geometrii tego okresu, o przejściu do badnia przestrzeni wielowymiarowych. W matematyce i fizyce często pojawiały się sytuacje, gdy pewne wielkości zachowywały się tak jak zmienne przestrzenne. W hamiltonowskim sformułowaniu mechaniki wielkościami takimi są pędy. Stan punktu materialnego jest w przestrzeni fazowej opisany za pomocą trójwymiarowego położenia i trójwymiarowego pędu. Razem daje to przestrzeń sześciowymiarową. Zasługą Hamiltona było sformułowanie praw mechaniki w taki sposób, że formalna różnica pomiędzy położeniem i pędem znika, dając jednorodną przestrzeń fazową o sześciu wymiarach. Oderwanie przestrzeni geomtrycznych od ich związku z przestrzenią fizyczną pozwoliło na stworzenie samodzielnej teorii przestrzeni fazowych. Teoria ta jest ogólna i bardzo elegancka. Można za jej pomocą opisywać wiele klas układów fizycznych i sytuacji matematycznych, w których stosuje się równania różniczkowe zwyczajne.

Przejdźmy teraz do filozofii i przypomnijmy najpierw, jak w ciągu ubiegłego stulecia zmieniała się filozofia geometrii. Na początku sądzono powszechnie, że geometria jst działem matematyki opisującym przestrzeń fizyczną. Dzięki temu przestrzeń tę traktowano jako zadany obiekt badań, a geometrię — jako teorię tego obiektu. Można było stawiać pytanie o prawdziwość i niesprzeczność aksjomatów, które Euklides przyjął jako podstawy dedukcyjnej teorii wyłożonej w jego dziele. Najwięcej kłopotów sprawiał piąty aksjomat, który w przeciwieństwie do pozostałych nie robił wrażenia oczywistego ani prawdziwego bez zastrzeżeń. Wielowiekowe prace nad tym zagadnieniem nie doprowadziły do żadnego zadowalającego rozwiąznia. Ich rezultatem było znalezienie wielu twierdzeń równoważnych, które jednak też nie był oczywiste ani pewne.

Rozwiązanie przyszło z nieoczekiwanej strony. Gauss, Łobaczewski, Bolyai, a potem wielu innych matematyków, uświadomili sobie, że aksjomatu tego nie należy traktować jako jedynego możliwego, że nasza wyobraźnia geometryczna nie jest ograniczona do gometrii Euklidesa. Łobaczewski zajął się systemem, w którym zamiast piątego pewnika przyjął twierdzenie sprzeczne z nim. Dało to nową ciekawą geometrię, w której nie znaleziono sprzeczności. Okazało się, że istnieją co najmniej dwie niezależne od siebie geometrie. Przestała obowiązywać zasad jednoznaczności geometrii. Wyzwoliło to geometrię z więzów empirycznej oczywistości. Nowe geometrie, przyjmowane zrazu przez większość matematyków z oburzeniem, wyzwoliły fantazję i konstrukcyjne możliwości geometrów, dając w efekcie bogactwo przestrzeni, figur, przekształceń, struktur algebraicznych i modeli. Powoli wyłaniał się pełny obraz możliwych geometrii i ich wzajemnych związków. Geometria stawała się najbardziej rozwiniętą i uporządkowaną dziedziną badań matematycznych. Gdy na początku XX wieku D. Hilbert sformułował program formalizacji matematyki, to zaczął od poprawnej aksjomatyzacji geometrii. Udowodnił wówczas, że trzy podstawowe geometrie metryczne są sobie równoważne, że za pomocą odpowiednich definicji można każdą z nich przekształcić na dwie pozostałe.

Dzięki pracom Kleina naczelne miejsce zajęła geometria rzutowa, z której drogą dodatkowych ograniczeń można uzyskać pozostałe systemy. Na jej przykładzie, jak również na stosunku do geometrii sferycznej widać, jak zmienił się stosunek matematyków do pojęcia przestrzeni. Geometrie te znano i badano już w starożytności, lecz były one traktowane jako opis pewnych szczególnych sytuacji, zawierających się w jedynej sensownej geometrii Euklidesa. W geometrii rzutowej bada się te własności figur, które nie zależą od odległości i kątów, lecz jest to część prawdy o tych figurach. W starożytności matematycy pasjonowali się zagadnieniami konstrukcyjnymi. Pytano na przykład, co można skonstruować mając do dyspozycji określone przyrządy, głównie linijkę i cyrkiel. Klasyczne problemy podziału kąta na trzy równe części, podwojenia objętości sześcianu lub kwadratury koła są tego rodzaju. Otóż geometrii rzutowej odpowiada sytuacja, w której mamy do dyspozycji linijkę bez skali i kąt prosty. Konstrukcje dokonywane za pomocą tych przyrządów mają charakter rzutowy.

Gdy badano i opisywano takie konstrukcje nikomu nie przyszło do głowy, że mogą one odpowiadać przestrzeni niezależnej i ogólniejszej od przestrzeni Euklidesa, że można wyobrazić sobie świat bez skal pomiarowych i bez kątomierzy. Stało się to możliwe dopiero po wykazaniu, że odrzucenie lub zmiana piątego pewnika Euklidesa nie prowadzą do sprzeczności, że możliwe są inne geometrie. Podobnie było z geometrią sferyczną, która również usamodzielniła się i oderwała od swego standardowego modelu na sferze.

Opracowanie modeli jednej geometrii w innych było dalszym krokiem na drodze relatywizacji pojęcia przestrzeni. Okazało się, że taka sama sytuacja może być opisana na różne sposoby, często bardzo różniące się. Na przykład geometria Łobaczewskiego opisuje sytuację na nieskończonej hiperboloidzie i na skończonym kole jednostkowym. Jest to możliwe dzięki temu, że skala długości w tym kole staje się drobniejsza, gdy zbliżamy się do jego granicy. Gdybyśmy wyobrazili sobie, że po łuku imitującym prostą porusza się ciało punktowe ze stałą prędkością, to z punktu widzenia euklidesowego obserwatora prędkość tego ciała maleje w miarę oddalania się od środka i w konsekwencji ciało to nigdy nie dojdzie do granicznego okręgu, który jest dla niego prostą w nieskończoności.

Taka sytuacja, w której można było wybierać geometrie i zmieniać ich modele doprowadziła do konwencjonalizmu. Twórcą tego kierunku w filozofii nauki był Poincaré. Interesował się on stosunkiem geometrii do świata fizycznego. Wiedział, że geometrii możliwych do skonstruowania jest wiele, lecz panowało przekonanie, iż tylko jedna z nich może opisywać wyniki obserwacji i eksperymentów nauk przyrodniczych. Poincare wiedział jednak, że w samej geometrii określoną sytuację można opisywać na wiele sposobów. Skoro istnieje wiele sposobów matematycznego opisu geometrii, to warto było zastanawiać się nad tym, czy istnieje wyróżniony opis przestrzeni fizycznej. Do tego czasu przyjmowano w tej sprawie rozwiązanie realistyczne, stwierdzając, że w zasadzie można eksperymentalnie rozstrzygać to pytanie. Przykładem takiego eksperymentu były wspomniane pomiary Gaussa.

Poincare miał inny pogląd na tę sprawę. Wiedział, że każdy pomiar jest oparty na apriorycznie przyjętych jednostkach odległości i kątów. W skonstruowanym przez niego konforemnym modelu płaszczyzny hiperbolicznej można tak przedefiniować odległości, że z koła jednostkowego otrzymuje się nieskończoną płaszczyznę uzupełnioną o prostą w nieskończoności. Można sobie wyobrazić przyrząd pomiarowy realizujący te pomiary. Za pomocą tego przyrządu otrzymalibyśmy opis doświadczeń bardzo różny od tego, co obserwujemy w standardowy sposób. Inne byłyby prawa fizyki i opis sytuacji, a obie teorie, standardowa i nowa równie dobrze przewidywałyby trajektorie ciał, ich oddziaływania i własności. Nie byłoby sposobu wykazania, że jedna teoria jest lepsza od drugiej, że jedną trzeba przyjąć jako prawdziwą, a drugą odrzucić. Wybór jednego z możliwych języków matematycznego opisu faktów jest więc sprawą konwencji. Nie znaczy to wcale, że nie mamy żadnych kryteriów tego wyboru. Możemy na przykład wyobrazić sobie, jak skomplikowane byłyby prawa fizyki i opis faktów, gdybyśmy do opisu przestrzeni wybrali jakąś dziwną geometrię. Trudno byłoby uprawiać mechanikę w takim mało intuicyjnym formalizmie, lecz w zasadzie jest to możliwe.

Konwencjonalizm rozwinął się w szeroko znaną filozofię przyrody. Omawianie jego filozoficznego znaczenia nie jest celem tej pracy. Chcemy jednak zauważyć, że w sprawie stosunku geometrii do doświadczenia jest on negacją stanowiska klasycznego, tysiące lat panującego w matematyce, nauce i filozofii. Stanowisko to polegało na przekonaniu, że geometria opisuje świat rzeczywisty, dlatego powinna być prawdziwa i jednoznaczna. Później oderwano geometrię od doświadczenia, czyniąc ją sztuką konstruowania niesprzecznych systemów i modeli przestrzeni, pozostawiając światu fizycznemu jego jednoznaczną geometrię. Która z geometrii opisuje ten świat to sprawa doświadczenia. Sądzono, że możliwe są doświadczenia pokazujące, jaka jest geometria przestrzeni fizycznej. Poincare odrzucił to założenie. Zauważył on mianowicie, że nigdy nie mierzymy własności samej przestrzeni. Są one zawsze uwikłane w jakieś procesy. Z teoretycznego punktu widzenia opis geometrii przestrzeni jest pierwszym krokiem rekonstrukcji badanych procesów, krokowi temu nie odpowiada jednak w sferze empirycznej żadna niezależna sfera doświadczeń ani pomiarów. Geometrię możemy przyjąć w sposób dosyć dowolny, a dostosować do niej musimy opis zdarzeń, mierząc następnie zgodność tego opisu z rzeczywistym przebiegm zjawisk. Stanowisko konwencjonalistyczne jest ważną częścią metodologii nowoczesnej fizyki, w której bez oporów korzysta się z najrozmaitszych topologii i geometrii, aby opisując za ich pomocą pewne zjawiska starać się uzyskać przewidywania dotyczące nowych zjawisk. W fizyce teoretycznej pojęcie geometrii tak się zrelatywizowało, że fizycy nie są już nawet świadomi tego. Są oni po prostu przyzwyczajeni do tego, że próbują zastosować nowe formalizmy, licząc na uzyskanie nowych wyników lub na nową interpretację rzeczy dobrze znanych.

Jest to zagadnienie wymagające odrębnych badań, opartych na materiale najnowszych teorii fizycznych. Celem tej pracy było pokazanie jak długą i ciekawą drogę przebyła geometria XIX wieku po odkryciu geometrii nieeuklidesowych. Powstanie tych geometrii nie bez powodu uważa się za jedną z najważniejszbych rewolucji jakie dokonały się w matematyce w ciągu jej historii. Rewolucja ta otworzyła drogę rewolucjom fizykalnym, przede wszystkim fizyce relatywistycznej. Na początku naszego stulecia geometria stała się nauką dojrzałą i bardzo uporządkowaną. Jej rozwój w tym kierunku został zahamowany. Pojawiła się geometria różniczkowa, a starymi problemami zajmuje się nieliczna grupa entuzjastów. Coraz trudniej znaleźć książki poświęcone tym zagadnieniom. Z punktu widzenia geometrii różnczkowej przestrzenie, które są takie same w każdym punkcie, zwane przestrzeniami symetrycznymi, są najprostszą klasą przestrzeni geometrycznych. Istnieje pełna klasyfikacja takich przestrzeni, do której nie można nic dodać[6]. Geometrie nieeuklidesowe mają liczne zastosowania w analizie, teorii funkcji analitycznych i w algebrze, lecz ich teoria jest w zasadzie skończona. Nie wiadomo czy na zawsze. Zawsze może pojawić się matematyk, który te sprawy osadzi w nowym szerszym kontekście, otwierając tym drogę do nowych badań, pokazując nowe perspektywy. Przykładem ogólnej podstawowej teorii matematycznej, która wyrosła z geometrii jest topologia. Opisuje ona wszystkie przekształcenia przestrzeni, które zachowują ciągłość i zmierzanie do granicy. Zanim nastąpi nowe odrodzenie geometrii syntetycznej, opisującej w całościowy sposób przstrzenie geometryczne, warto wracać i przypominać osiągnięcia XIX wieku, ponieważ tkwią w nich korzenie wielu współczesnych działów matematyki i nauk przyrodniczych, szczególnie fizyki i kosmologii.

WIESŁAW WÓJCIK

KONCEPCJA DOWODU A STRUKTURA ROZWOJU NAUKI

1. WSTĘP. PRÓBY UKAZANIA SPECYFIKI DZIAŁALNOŚCI NAUKOWEJ

XX wieku cechuje ogromny rozwój i osiągnięcia nauki, a zarazem znamienne dla naszych czasów jest powątpiewanie w wartość nauki, w jej prawdziwie twórczy charakter. Z jednej strony analizy filozofów nauki ukazują hipotetyczny charakter naukowych twierdzeń oraz kruchość podstaw, na których wspiera się gmach wiedzy. Z drugiej strony filozofowie XX wieku, poczynając od egzystercjalizmu a kończąc na filozofii dialogu, podważają wręcz wartość naukowego poznania.

Próby ukazania, iż nauka jest tworem, w którym gromadzi się fakty, niezbite twierdzenia oraz całkowicie opracowane teorie, zakończyły się fiaskiem. Filozoficzne ujęcie nauki w wymiarze synchronicznym przez neopozytywistów Koła Wiedeńskiego okazało się niewystarczające do

[6] Patrz S. Helgason, *Differential Geometry and Symmetric Spaces*, New York, London, 1962.