Anna Lemańska

Uwagi w sprawie istnienia przedmiotów matematycznych

Studia Philosophiae Christianae 27/1, 166-176

1991

ANNA LEMAŃSKA

UWAGI W SPRAWIE ISTNIENIA PRZEDMIOTÓW MATEMATYCZNYCH

1. RÓŻNE STANOWISKA NA TEMAT ISTNIENIA PRZEDMIOTÓW MATEMATYCZNYCH

Po odrzuceniu stanowiska, że matematyka jest tylko językiem formalnym, koncepcje na temat istnienia przedmiotów matematycznych można podzielić na trzy grupy. Podstawą tego podziału są relacje między obiektami matematycznymi, a przedmiotami fizycznymi i poznającym podmiotem. W pierwszej grupie będą te poglądy, w myśl których obiekty matematyczne istnieją niezależnie zarówno od świata materialnego, jak i poznającego podmiotu (platonizm). W drugiej grupie znajdą się poglądy głoszące, iż przedmioty matematyczne w swym istnieniu zależą w jakimś stopniu od rzeczywistości materialnej (empiryzm). Trzecia grupa są to poglądy mówiące, że obiekty matematyczne są tworami umysłu matematyka i istnieją w umyśle poznającego podmiotu (konceptualizm). Oczywiście podział ten jest bardzo schematyczny i w każdej z wymienionych grup znajdują się poglądy o różnych odcieniach, często znacznie różniące się między sobą.

Za zwolenników platonizmu uważa się powszechnie większość matematyków, którzy traktują przedmiot swoich badań jako istniejący niezależnie od nich, a także za niezwiązany ze światem materialnym [1]. Takie spojrzenie na obiekty matematyczne wywodzi się z koncepcji Platona. Warto poczynić jednak kilka uwag na temat istotnych różnic, które występują między oryginalną doktryną Platona, a platonizmem we współczesnej filozofii matematyki. Na poglądy Platona składały się cztery powiązane ze sobą stanowiska: w zakresie ontologii Platon głosił skrajny realizm pojęciowy (istnieje obiektywnie świat idei) oraz ontologiczny idealizm obiektywny (świat materialny jest tylko niedoskonałym odbiciem świata idei), zaś w zakresie epistemologii — skrajny racjonalizm (tylko rozum dostarcza wartościowego poznania) oraz skrajny aprioryzm, uzasadniany preegzystencją dusz (pojęcia są wrodzone, my tylko je sobie przypominamy). Platonizm współczesny odnosi się tylko do obiektów matematycznych, głosząc w tym zakresie skrajny realizm pojęciowy. Uważa się, iż przedmioty matematyczne istnieją niezależnie od świata materialnego i od poznającego podmiotu. Pozostałe elementy koncepcji Platona nie występują w zasadzie we współczesnej filozofii matematyki. Wprawdzie uznaje się, iż w matematyce dominującą rolę odgrywa poznanie rozumowe (dzieje się tak pod wpływem konsekwentnie stosowanej w matematyce metody dedukcyjno-aksjomatycznej), to jednak w fazie odkrywania nowej wiedzy matematycznej, czy uczenia się dopuszcza się współwystępowanie różnego typu poznawania pojęć matematycznych, łącznie z indukcją, analogią itp. Odchodzi się więc do pewnego stopnia od skrajnego poglądu Platona, w myśl którego poznanie obiektów matematycznych jest niezależne od świata materialnego. Odmienne również od platońskiej koncepcji jest widzenie powiązania świata obiektów matematycznych ze

[1] J. D. Monk uważa, że 65% matematyków to platonicy. Podaję za: R. Murawski, *„Humanizacja" matematyki, czyli o nowych prądach w filozofii matematyki*, Studia Filozoficzne 8 (1986), 60.

światem materialnym. Przedmioty fizyczne nie są traktowane jako niedoskonałe odbicia doskonałych obiektów matematycznych. Z reguły przyjmuje się istnienie niejako obok siebie tych światów lub w ogóle nie wypowiada się na ten temat. Czasami ten problem zostaje przeniesiony na inny poziom. Twierdzi się mianowicie, iż matematyka bada pewne relacje między rozmaitymi obiektami, w szczególności mogą to być obiekty fizyczne.

Dla przykładu przytoczę wypowiedzi kilku atorów, którzy próbują powiązać ze sobą pojęcia matematyczne i przedmioty fizyczne. Według R. Thoma idee platońskie kształtują rzeczywistość fizyczną [2]. Podobne sugestie znajdują się w wypowiedziach S. MacLane'a. Stwierdza on, iż w matematyce odkrywa się formalne struktury, które odzwierciedlają rozmaite aspekty świata i ludzkiej aktywności [3]. S. Shapiro oraz M. Resnik określają matematykę jako naukę o strukturach czy wzorach (patterns). Odrzucają istnienie jakichś obiektów matematycznych, traktując je jako punkty, miejsca, pozycje w strukturze [4], które są wyznaczone przez relacje między obiektami, a nie przez same te obiekty. W tym ujęciu nie są ważne jakieś przedmioty i ich własności, a tylko relacje między nimi. Bada się tylko relacje i operacje, a nie własności jakichś obiektów [5]. W takim ujęciu zagadnienia widać odbicie tendencji w matematyce współczesnej do badania różnego rodzaju relacji, funkcji, operacji, a pomijania obiektów, między którymi te relacje zachodzą.

S. Shapiro traktuje strukturę jako powszechnik, dla którego dany system obiektów, powiązanych relacjami o odpowiednich własnościach, jest tylko ukonkretnionym przykładem. Własności struktur są niezależne od matematyka. Poza tym struktury można traktować tak jak obiekty jakiejś teorii i wiązać je kwantyfikatorami [6]. Według Shapiro pewne struktury są egzemplifikowane w dziedzinie rzeczywistości fizycznej. Związek matematyki z naukami przyrodniczymi polega na odczytywaniu struktur matematycznych, które leżą u podstaw niematematycznego uniwersum oraz na badaniu związków i oddziaływań między strukturami [7]. Różnica między strukturami matematycznymi a innego typu strukturami polega tylko na innej metodzie prezentacji i badania — w matematyce występuje metoda aksjomatyczna i dedukcyjna. W ten sposób strukturą matematyczną staje się każda struktura badana przez matematyka [8].

M. Resnik swój pogląd na temat przedmiotów matematycznych wyraźnie łączy z platonizmem. Uznaje mianowicie, iż struktury matematyczne są to niematerialne, niementalne obiekty, które istnieją poza

---

[2] R. Thom, *Matematyka nowoczesna: pomyłka pedagogiczna i filozoficzna?* Wiad. Mat. 18 (1974), 118; *Czy istnieje matematyka nowoczesna?* Wiad. Mat. 18(1974), 136.

[3] S. MacLane, *Mathematical Models: A Sketch for the Philosophy of Mathematics*, Am. Math. Monthly 88(1981), 471.

[4] S. Shapiro, *Mathematics and Reality*, Phil. of Science 50(1983)4, 534; M. D. Resnik, *Mathematics as a Science of Patterns: Ontology and Reference*, Nous 15(1981), 530.

[5] S. Shapiro, *art. cyt.*, 535.

[6] *Tamże*, 536—537.

[7] *Tamże*, 538.

[8] *Tamże*, 542.

czasem i przestrzenią[9]. Te struktury, wzory poznajemy poprzez szereg doświadczeń, które nazywa „doświadczaniem czegoś jako wzoru"[10]. „Posuwamy się poprzez szereg etapów, w czasie których konceptualizujemy nasze doświadczenie w coraz bardziej abstrakcyjnych terminach. Na ostatnim etapie zostawiamy dostatecznie daleko poza sobą doświadczenie, tak aby nasze teorie były skonstruowane jako teorie o abstrakcyjnych obiektach. W trakcie tego procesu wykorzystujemy nasze tendencje do ujmowania rzeczy jako ustrukturalizowanych, nasze skłanianie się w kierunku teoretyzowania oraz naszą potrzebę tworzenia"[11]. Traktowanie matematyki jako nauki o strukturach może, zdaniem Resnika, wyeliminować trudności czystego platonizmu, które wiążą się z istnieniem różnych redukcji teorii matematycznych (na przykład do teorii mnogości czy do teorii kategorii), a także z wynikami uzyskanymi w twierdzeniach limitacyjnych[12].

Platonizm tłumaczy, dlaczego przy uprawianiu matematyki mamy poczucie, iż odkrywamy prawidłowości między obiektami, których własności są od nas niezależne, których własności nie możemy ani dowolnie ustalać, ani dowolnie zmieniać. Stwarza jednak zasadnicze problemy w kwestii poznawania pojęć matematycznych. Nie wyjaśnia, w jaki sposób mamy dostęp do idealnego świata obiektów matematycznych. Nawet uznanie, iż przedmioty fizyczne są materialnymi realizacjami pewnych pojęć matematycznych, nie usuwa wszystkich trudności w tym zakresie. Pozostają też niewyjaśnione kwestie, które wynikają przy interpretacji twierdzeń limitacyjnych. Powstają bowiem następujące pytania. Dlaczego są różne geometrie czy teorie mnogości? Dlaczego mogą istnieć obok siebie rozmaite uniwersa zbiorów o sprzecznych między sobą własnościach? Co więcej żadne uniwersum zbiorów nie jest dla nas w pełni poznawczo dostępne, możemy poznawać tylko pewne ich fragmenty. Wszystkie te problemy nie znalazły zadowalającego uzasadnienia w stanowiskach nawiązujących do koncepcji Platona.

W poglądach empirycznych twierdzi się, że przedmioty matematyczne są jakoś związane z przedmiotami fizycznymi. Ponieważ to powiązanie można widzieć na wiele sposobów, więc w tej grupie znajdują się koncepcje bardzo różniące się między sobą. Wskażę kilka stanowisk, które rozmaicie rozwiązują problem powiązania obiektów matematycznych z fizycznymi.

Według Arystotelesa nie istnieje pierwotnie żaden idealny świat obiektów matematycznych, które miałyby być pierwszymi zasadami rzeczy[13]. Przedmiotem matematyki jest ilość wyabstrahowana z przedmiotów fizycznych. Ciała fizyczne zawierają powierzchnie, punkty, linie itp., które w specyficzny sposób bada matematyk. Te powierzchnie, punkty, linie są przez niego rozpatrywane w oderwaniu od swych fizycznych odpowiedników. Matematyk bada na przykład długość fizyczną, ale nie jako fizyczną, tylko oddzieloną poprzez akt abstrakcji od swego fizycznego odpowiednika. Uzyskane przy pomocy abstrakcji obie-

[9] M. D. Resnik, *Mathematics as a Science of Patterns: Ontology and Reference, art. cyt.*, 529.

[10] M. D. Resnik, *Mathematics as a Science of Patterns: Epistemology*, Noûs 16 (1982) 1, 97.

[11] *Tamże*, 99 (tł. moje).

[12] *Tamże*, 95.

[13] Arystoteles, *Metafizyka 1093 b*, Warszawa 1983, 386—387.

kty matematyczne w istotny sposób różnią się od przedmiotów fizycznych, są bowiem pozbawione wszelkich zmysłowych jakości, są nieruchome, nie muszą mieć trzech wymiarów, tak jak ciała fizyczne [14]. Ilość wyrażona w liczbie, rozciągłości i kształcie może być rozpatrywana w oderwaniu od innych właściwości ciał fizycznych, mimo że nie istnieje oddzielnie od nich. Umysł, gdy myśli o obiektach matematycznych, „myśli o nich, jak gdyby były oderwane od ciała, chociaż w rzeczywistości nie są one od niego oderwane" [15]. Przedmioty matematyczne istnieją dzięki aktowi abstrakcji. Są więc w pewnym stopniu tworem człowieka. Nie są to jednak dowolne konstrukcje umysłu, bowiem „można zgodnie z prawdą powiedzieć po prostu, że istnieją przedmioty matematyczne z cechami, jakie im przypisują matematycy" [16]. Jednocześnie trzeba podkreślić, iż oddzielenie obiektów matematycznych od rzeczy fizycznych jest możliwe tylko w umyśle matematyka, tak więc przedmiotem matematyki jest realna ilość, tylko badana w specyficzny sposób [17]. Arystoteles związał zatem istnienie obiektów matematycznych ze zmysłowo spostrzeganymi rzeczami. Warto jednak zauważyć, iż ponieważ przedmioty matematyczne są nieruchome, więc matematyka nie może służyć do badania ruchu występującego w przyrodzie.

Do poglądów Arystotelesa w kwestii istnienia przedmiotów matematycznych nawiązał św. Tomasz z Akwinu. Wyróżnił on trzy typy abstrakcji: fizyczną, matematyczną i metafizyczną. Abstrakcja matematyczna pomija materię zmysłową i dotyczy materii inteligibilnej, którą można traktować jako substrat metafizyczny dla ilości, czy *continuum*, będącego materią dla form geometrycznych. Materia ta jest dostępna tylko dla poznania umysłowego i nie jest spostrzegana przez zmysły zewnętrzne. Nasze zmysły spostrzegają tylko kształty konkretnych ciał jednostkowych. Dzięki procesowi abstrakcji matematycznej możemy te formy przedstawić sobie jako oderwane od materii zmysłowej. Przedmiot matematyki jest więc zależny od materii bytowo, ale poznawczo jest od niej niezależny. Pojęcia matematyczne nie są formą, ani przypadłością rzeczy. Matematyka jest jednak nauką realną, mówiącą o ilościowych aspektach świata materialnego.

Współcześnie w tomizmie również są głoszone poglądy na matematykę inspirowane koncepcją św. Tomasza. Matematyka jest w nich włączana do systemu nauk jako nauka znajdująca się między fizyką a metafizyką. Jej przedmiot (ilość) jest związany z materią — z materią inteligibilną, która daje się wydzielić na drodze abstrakcji matematycznej.

Poglądy Arystotelesa i św. Tomasza nie są w stanie ująć specyfiki matematyki współczesnej. Ciekawego rozszerzenia koncepcji św. Tomasza tak, aby można ją było odnieść do abstrakcji wielostopniowych charakterystycznych dla matematyki współczesnej, dokonuje Th. Anderson. Podkreśla on, iż zarówno Arystoteles, jak i św. Tomasz odwoływali się w swych pracach tylko do obiektów matematycznych, których związek z przedmiotami fizycznymi jest widoczny. Następnie próbuje wykazać, iż z całości poglądów św. Tomasza można wyciągnąć wniosek, iż matematyk nie jest ograniczony wyłącznie do obiektów,

---

[14] Arystoteles, *Fizyka 193 b — 194 a*, Warszawa 1968, 39—40.

[15] Arystoteles, *O duszy 431 b*, Warszawa 1972, 100.

[16] Arystoteles, *Metafizyka 1077 b, dz. cyt.*, 333—334.

[17] *Tamże, 1033 a — 1033 b*, 175, *1035 a — 1036 b*, 181—182, *1059 b*, 268—269.

które uzyskał przez abstrakcję z przedmiotów fizycznych. Ponieważ obiekty matematyczne istnieją w wyobraźni, więc matematyk może z prostszych przedmiotów konstruować bardziej złożone, o ile tylko taka konstrukcja nie prowadzi do sprzeczności[18].

Na stanowisku skrajnego empiryzmu stał J. S. Mill. Uznawał istnienie tylko rzeczy jednostkowych. Według niego nie istnieją żadne ogóły, rodzaje ani gatunki. Pojęcia matematyczne są kopiami obiektów fizycznych, poznawanych w czasie doświadczenia. Definicje, określające pojęcia matematyczne, trzeba uznać za uogólnienia, dotyczące przedmiotów rzeczywistych. Twierdzenia matematyczne wynikają na drodze dedukcji z przyjętych określeń. Ponieważ jednak określenia te mają tylko przybliżony charakter, więc żadne twierdzenie matematyczne nie jest pewne i konieczne. Twierdzenia matematyczne są tylko indukcyjnymi uogólnieniami faktów empirycznych, są prawami przyrody, a zostają utworzone na podstawie doświadczenia i obserwacji. To, że wydają się nam pewne i konieczne, uważał Mill za złudzenie. Złudzenie to jest spowodowane częstością występowania zjawisk, z których na drodze indukcji uzyskujemy twierdzenia matematyczne[19].

Autorzy marksistowscy również utworzyli koncepcję, w myśl której matematyka zależy od świata fizycznego. Ta zależność jest widziana w czterech głównych aspektach: (1) genetycznym — matematyka powstawała w czasie praktycznego opanowywania przez człowieka sił przyrody, (2) epistemologicznym — pojęcia matematyczne tworzymy przez abstrakcję oraz idealizację z rzeczywistych, fizycznych przedmiotów, (3) metodologicznym — metody rozumowania (m.in. dedukcja) odzwierciedlają prawidłowości występujące w przyrodzie, (4) ontycznym — istnienie pojęć matematycznych jest wtórne w stosunku do istnienia materii i jest ściśle związane ze światem fizycznym.

Trzeba też zaznaczyć, że poglądy głoszące, iż obiekty matematyczne są związane z przedmiotami fizycznymi, wypowiadają również matematycy. L. Kalmár na przykład uważa, iż matematyka ma empiryczne pochodzenie, „jej aksjomaty początkowo zostały wyabstrahowane z faktów empirycznych, a jej reguły wnioskowania dedukcyjnego są ważne dlatego, że zostały sprawdzone w aktualnej praktyce myślowej ludzkości"[20]. R. Courant zaś twierdzi, iż „matematyka musi czerpać swe motywy z konkretnego tworzywa szczególnego i zdążać z powrotem do pewnych warstw rzeczywistości"[21].

Zaprezentowane stanowiska dają wytłumaczenie sukcesów, które odnosi matematyka poprzez swoje zastosowania w naukach przyrodniczych. Jednakże w stosunku do koncepcji empirycznych można również wysunąć szereg zastrzeżeń. W szczególności tylko dla bardzo niewielu (wprawdzie podstawowych) pojęć można wskazać w świecie materialnym ich odpowiedniki. Większość obiektów matematycznych nie ma bezpośredniego odniesienia do świata materialnego. Co więcej, jak

---

[18] T. C. Anderson, *Aristotle and Aquinas on the Freedom of the Mathematician.* The Thomist 36(1972)2, 242—255.

[19] J. S. Mill, *System logiki dedukcyjnej i indukcyjnej,* t. I, Warszawa 1962, 347—353, 358—365.

[20] L. Kalmár, *Foundations of Mathematics — Whiter Now?* w: *Problems in the Philosophy of Mathematics,* ed. by I. Lakatos, Amsterdam 1967, 188 (tł. moje).

[21] R. Courant, *Matematyka w świecie współczesnym,* w: *Matematyka w świecie współczesnym,* Warszawa 1966, 31.

się wydaje, twierdzenia limitacyjne (zwłaszcza twierdzenie Skolema--Löwenheima), istnienie wielu geometrii, teorii mnogości stwarza również trudności dla stanowisk empirystycznych w kwestii istnienia przedmiotów matematycznych, podobnie jak dla platonizmu. Zasadnicze problemy wynikają również w teorii poznawania obiektów matematycznych. Wszyscy w zasadzie autorzy uznają, iż obiekty matematyczne są abstraktami utworzonymi przez poznający podmiot. Zostaje więc zatarta granica między podmiotem a światem zewnętrznym. Nie wiadomo dokładnie, jak dużo w pojęciu matematycznym pochodzi od świata materialnego, a ile od człowieka. Żadne ze stanowisk nie wyjaśnia tego w zadawalający sposób.

Ostatnia grupa stanowisk w kwestii istnienia przedmiotów matematycznych to poglądy, według których istnienie tych obiektów jest związane z poznającym podmiotem. Przedmioty matematyczne są uważane za wytwory umysłu ludzkiego. W tej grupie zostaną ukazane dwa stanowiska: koncepcja intuicjonistyczna i poglądy J. Piageta.

Intuicjoniści uważają, że matematyka jest swobodnym wytworem umysłu ludzkiego. Ten proces tworzenia opiera się na apriorycznej, pierwotnej intuicji „nagiej dwujedności". Intuicja ta bierze swój początek ze zjawiska „rozpadania się momentów życia na jakościowo różne części, które rozdzielone przez czas mogą być na nowo połączone"[22]. Dzięki tej intuicji możemy utworzyć liczby naturalne, skonstruować najmniejszą nieskończoną liczbę porządkową. Prowadzi też ona do powstania intuicji liniowego *continuum*[23]. Inne obiekty istnieją, o ile zostały skontruowane w umyśle matematyka z elementów wcześniejszych. Intuicja również podpowiada nam, które konstrukcje są dopuszczalne. I tak na przykład liczba rzeczywista istnieje, jeżeli potrafimy podać prawo konstrukcji odpowiadającego jej ciągu liczb wymiernych. Warto tu jednak dodać, iż Brouwer dopuszczał istnienie nie tylko ciągów konstruowalnych według pewnego prawa, ale również ciągów, które mogą się swobodnie rozwijać, bez jakiejś z góry narzuconej zasady tworzenia.

Takie stanowisko w kwestii istnienia obiektów matematycznych pociąga za sobą daleko idące konsekwencje. Matematyka jest wytworem umysłu matematyka, więc do jej uprawiania nie jest potrzebny język. Język służy co najwyżej do zakomunikowania, przekazania komuś innemu swojej konstrukcji. Logika jest pewną częścią matematyki, a jej prawa znacznie różnią się od praw logiki klasycznej.

Zasadniczym elementem w koncepcji J. Piageta jest to, że pojęcia matematyczne są, według niego, tworzone wyłącznie przy pomocy abstrakcji reflektywnej, czyli abstrakcji z czynności podmiotu i cech tych czynności. Dla poznania logiczno-matematycznego ważny jest przede wszystkim „schemat" czynności podmiotu, który można rozpatrywać niezależnie od poszczególnych sytuacji. Pozwala to na powtarzanie tego samego działania lub na stosowanie go w nowym, innym kontekście[24]. Ważne jest też i to, że doświadczenie logiczno-matematyczne jest zwią-

[22] L. E. J. Brouwer, *Intuicjonizm i formalizm*, w: *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, pod red. R. Murawskiego, Poznań 1986, 266.

[23] *Tamże*, 266—267.

[24] J. Piaget, *Psychologia i epistemologia*, Warszawa 1977, 77; E. W. Beth, J. Piaget, *Mathematical Epistemology and Psychology*, Dordrecht 1966, 235.

zane z działaniami, które po zinterioryzowaniu stają się operacjami. Matematyka w ujęciu Piageta jest tworem poszczególnych ludzi — matematyków [25], gdyż w konstrukcji pojęć matematycznych (struktur matematycznych) istotną rolę odgrywają działania, operacje podmiotu. Bez tego nie byłoby możliwe powstanie matematyki. W tym sensie pojęcia matematyczne trzeba traktować jako zależne od podmiotu. Jednocześnie trzeba wyraźnie podkreślić, że podmiot dla Piageta jest tylko pewnym elementem środowiska, z którym jest bardzo ściśle związany. Nie można podmiotu wyizolować, oddzielić od całego otoczenia i to zarówno od fizyczno-biologicznego, jak i społecznego.

Przedstawione w tej grupie poglądy nie wyjaśniają, dlaczego matematyka może być stosowana do badania rzeczywistości fizycznej. Wprawdzie w koncepcji Piageta ten element został do pewnego stopnia uwzględniony, lecz kosztem zatarcia granicy między poznającym podmiotem a otaczającym go środowiskiem. Brakuje też w pełni wyczerpującego wyjaśnienia, dlaczego wiedza matematyczna jest obiektywna, dlaczego matematycy akceptują wyniki uzyskane przez innych. Należy też dodać, iż ograniczenie wiedzy matematycznej, występujące w koncepcji intuicjonistów, nie znalazło powszechnej akceptacji wśród matematyków.

2. DYSKUSJA

Jak już zaznaczyłam, w stosunku do każdej z zaprezentowanych koncepcji można wysunąć istotne zastrzeżenia. Nadto żadne ze stanowisk nie jest w stanie ująć wszystkich charakterystycznych cech matematyki współczesnej, w której, jak się wydaje, ścierają się przeciwstawne tendencje. Matematyka bowiem jawi się z jednej strony jako nauka sformalizowana, z drugiej zaś nie można usunąć z niej aspektów treściowych. Warto wymienić kilka zasadniczych faktów, które dotyczą matematyki współczesnej:

1. Nie wszystkie pojęcia matematyczne są uzyskiwane przez prostą abstrakcję czy idealizację z występujących w przyrodzie obiektów.
2. Obiekty matematyczne mają rozmaitą naturę, tj. znajdują się na różnych poziomach abstrakcji.
3. Metodą wykładu matematyki jest metoda dedukcyjna; w wykładzie nie odwołujemy się do faktów empirycznych.
4. Ostatnio próbuje się do dowodzenia twierdzeń wykorzystać maszyny cyfrowe.
5. Teoriom matematycznym staramy się nadać postać zaksjomatyzowaną, a nawet sformalizowaną; twierdzenia limitacyjne zaś ukazują ograniczenia formalizacji, które powodują, iż konieczne staje się posługiwanie niesformalizowanym metajęzykiem.
6. Twierdzenia udowodnione ogólnie przyjętą metodą nie są odrzucane bez względu na dalszy rozwój wiedzy.
7. Wiedza matematyczna jest obiektywna, to znaczy, że jest tworzona według pewnych praw akceptowanych przez wszystkich matematyków, zaś uzyskane wyniki są ogólnie przyjmowane. Wyjątek stanowią zwolennicy konstruktywizmu, którzy odrzucają pewne metody tworzenia nowej wiedzy matematycznej.
8. Matematyka jest wykorzystywana przez nauki przyrodnicze i spo-

[25] E. W. Beth, J. Piaget, *dz. cyt.*, 151; J. Piaget, *Psychologia i epistemologia*, *dz. cyt.*, 19—20, 22—23.

łeczne, a co za tym idzie, służy do badania otaczającej nas rzeczywistości.

Trzeba też podkreślić, że matematyk bardzo często używa słowa „istnieje". Przede wszystkim w aksjomatach danej teorii mogą występować kwantyfikatory egzystencjalne. Należy wyróżnić tu dwa przypadki: pierwszy, gdzie kwantyfikator szczegółowy występuje na początku formuły, drugi, gdy ten kwantyfikator jest poprzedzony jednym lub kilkoma kwantyfikatorami ogólnymi. W przypadku pierwszym postuluje się, że istnieje dany przedmiot o własnościach określonych przy pomocy tego aksjomatu (na przykład: aksjomat zbioru pustego czy aksjomat o istnieniu czterech niewspółpłaszczyznowych punktów). Aksjomaty te można określić jako bezwzględne aksjomaty istnienia [26]. W drugim przypadku istnienie pewnych obiektów zależy od istnienia obiektów innych. Z tego typu sytuacją mamy do czynienia na przykład w aksjomacie pary, w którym dla danych dwóch zbiorów x i y zakłada się istnienie trzeciego zbioru, będącego ich parą. Można tu mówić o relatywnych aksjomatach istnienia [27]. Trzeba dodać w tym miejscu jedną uwagę. W językach pewnych teorii występują stałe, których własności zostają określone poprzez aksjomaty, na przykład w arytmetyce przyjmuje się w języku stałą zero (0) i aksjomat, stwierdzający, iż zero nie jest następnikiem żadnej liczby naturalnej. W tym przypadku wprawdzie nie używa się *explicite* określenia „istnieje" w stosunku do zera, to jednak istnienie zera jest milcząco zakładane przez włączenie tej stałej do języka.

W wielu twierdzenia matematycznych mówi się również o istnieniu pewnych obiektów. Twierdzenia takie muszą posiadać dowody. Można ogólnie wyróżnić dwa sposoby wykazywania, że jakiś przedmiot matematyczny istnieje. W pierwszym mamy do czynienia z bardzo ogólnie rozumianą konstrukcją obiektów. Może to być po prostu wskazanie danego obiektu wśród tych, którymi dysponujemy lub konstruowanie przez przejście na wyższy poziom abstrakcji, czy wykonanie innego typu operacji, które z danych przedmiotów pozwolą uzyskać nowy obiekt [28].

W drugim typie dowodów mamy do czynienia z dowodzeniem przez sprowadzenie do sprzeczności lub przez zastosowanie pewnych procedur, które dają nam wprawdzie konstrukcję danego obiektu, ale konstrukcja ta jest nieefektywna. Takie konstrukcje uzyskujemy przy stosowaniu na przykład aksjomatu wyboru. Jako przykład można podać twierdzenie o paradoksalnym rozkładzie kuli. Wiemy, że taki rozkład istnieje, ale nie jesteśmy w stanie pokazać części, na które należy kulę podzielić [29].

W pewnych sytuacjach mamy do czynienia jeszcze z jednym przypadkiem. W teorii niezupełnej może się okazać, że nie potrafimy udowodnić, ani że istnieje jakiś przedmiot, ani że on nie istnieje. Wtedy

---

[26] M. Lubański, *Zagadnienie istnienia w matematyce, II*, St. Phil. Christ. 20(1984)1, 149.

[27] Szerzej na ten temat: M. Lubański, *tamże*, 147—154.

[28] Szerzej: M. Lubański, *Zagadnienie istnienia w matematyce, I*, St. Phil. Christ. 19(1983)2, 182—186.

[29] Twierdzenie o paradoksalnym rozkładzie kuli: Kulę K można rozłożyć na pięć zbiorów A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 takich, że każde dwa z nich są rozłączne oraz że ze zbiorów A_1, A_2 i ze zbiorów A_3, A_4, A_5 dają się z powrotem złożyć dwie kule przystające do kuli K.

teorię można rozszerzyć dodając nowy aksjomat, na przykład mówiący o istnieniu interesującego nas obiektu.

Z przedstawionych powyżej sytuacji wynika, iż w matematyce klasycznej, albo z góry zakłada się istnienie pewnych przedmiotów w aksjomatach i przyjmuje się, iż te obiekty istnieją, o ile aksjomaty są niesprzeczne, albo dowodzi się istnienia nowych obiektów. Tak więc istnienie przedmiotów matematycznych można w pewnym sensie sprowadzić do niesprzeczności zdań, które o tym istnieniu orzekają.

Nieco odmiennie wygląda problem istnienia obiektów matematycznych w matematyce konstruktywistycznej. Tu w zasadzie ogranicza się tylko do takich obiektów, które można w sposób efektywny, przy pomocy dopuszczalnych, ściśle określonych operacji skonstruować z obiektów wyjściowych. Przedmiotami, od których rozpoczyna się wszelkie konstrukcje są przede wszystkim liczby naturalne. Ich istnienie traktuje się jako pierwotne, oczywiste, dane intuicji. W matematyce konstruktywistycznej można więc powiedzieć, że istnieć sprowadza się do być skonstruowanym.

Trzeba jednak zaznaczyć, że matematyk nie zastanawia się, co oznacza słowo „istnieje". W praktyce „istnieć" to tylko tyle, że dany obiekt jest, czy może być przedmiotem badania. Przedmiot matematyczny jest w jakiś sposób dany, jeśli powstał zgodnie z przyjętymi zasadami. Tak więc sposób istnienia nie jest zagadnieniem matematycznym; to problem filozoficzny.

Obiekty, które są przedmiotem badania matematyka, nie mają jednakowej „natury". Są pewne obiekty podstawowe i inne, które powstają przez rozmaite operacje. Na przykład często stosowaną konstrukcją jest tworzenie nowych obiektów poprzez klasy abstrakcji relacji równoważności. Szuka się wprawdzie pewnych podstawowych zasad tworzenia nowych obiektów, ale każda próba sprowadzenia matematyki do jakiejś jednej podstawowej teorii, podporządkowania wszystkich obiektów jednej zasadzie tworzenia nie jest w stanie wyczerpać całej złożoności matematyki współczesnej.

Przy rozpatrywaniu możliwych stanowisk w kwestii istnienia przedmiotów matematycznych należy zdać sobie sprawę ze wspomnianej różnorodności tych obiektów. Matematyk bada bowiem rozmaitego typu pojęcia: liczby naturalne, liczby rzeczywiste, liczby zespolone, macierze, figury geometryczne, funkcje, relacje, zbiory, struktury algebraiczne, przestrzenie wielowymiarowe, przestrzenie topologiczne, kategorie, teorie sformalizowane, modele teorii sformalizowanych. Każdy z wymienionych obiektów w istotny sposób różni się od pozostałych. Wszystkie one jednak są przedmiotem badania matematyka i teorie dotyczące ich własności są teoriami wchodzącymi w obręb matematyki. Wszystkie wymienione obiekty łączy metoda ich badania: z przyjętych własności uzyskuje się, przy pomocy rozumowania dedukcyjnego, inne własności. Należy też zdać sobie sprawę z tego, że teorie matematyczne również nie są jednolite, są tworzone dla rozmaitych celów. Teoria liczb naturalnych ma inne zadanie, niż teoria grup, chociaż formalnie obie mogą wyglądać podobnie. Pierwsza ma za zadanie opisać własności liczb naturalnych — jest to jeden zbiór określonych obiektów. W teorii grup zaś bada się własności wszystkich możliwych bardzo różnorodnych zbiorów, których elementy spełniają aksjomaty teorii grup. Aksjomaty są tak dobrane, aby ujmowały minimalną ilość własności, które nas interesują.

Powstaje zatem naturalne pytanie, czy wszystkie przedmioty matematyczne istnieją w taki sam sposób. Można bowiem tworzyć pewne szeregi pojęć od mniej ogólnych do coraz bardziej uniwersalnych, na przykład liczba całkowita, zbiór liczb całkowitych, pierścień liczb całkowitych, pierścień, ciało, struktra algebraiczna, kategoria pierścieni, kategoria. Każde z tych pojęć jest ogólniejsze niż poprzednie. W niektórych przypadkach w zakres następnego pojecia z tej liczby wchodzi pojęcie poprzednie. Jeszcze raz pragnę podkreślić, że matematyk bada te wszystkie pojęcia przy pomocy tej samej metody. Dla niego nie ma znaczenia, czy badanym pojęciem jest zbiór liczb całkowitych, czy kategoria pierścieni. W pewnym sensie traktuje obiekty swego zainteresowania w taki sam sposób. Nie wyklucza to jednak możliwości postawienia w sensowny sposób pytania, czy w taki sam sposób istnieje liczba całkowita jak pojęcie pierścienia, które swym zakresem obejmuje dowolne pierścienie. Ta różnorodność obiektów matematycznych, różny stopień ich ogólności sugerują, iż być może, rozwiązanie kwestii ich istnienia nie jest jednolite i nie da się zawrzeć w jednej wszystko obejmującej i wyczerpującej formule.

3. PRÓBA SYNTEZY

Przy tworzeniu jakiejkolwiek koncepcji istnienia obiektów matematycznych trzeba pamiętać, że problemu istnienia nie da się oddzielić od problemu poznawania przedmiotów matematycznych. W tej drugiej sprawie, jak się wydaje, konieczne jest przyjęcie jakiejś wersji empiryzmu. Bez poznawczego kontaktu człowieka z otaczającą go rzeczywistością nie byłoby bowiem możliwe ukształtowanie się matematyki. Również uczenie się matematyki opiera się w znacznym stopniu na indywidualnym doświadczeniu, czy intuicji ucznia. Odwoływanie się do doświadczenia, do intuicji, powoływanie się na analogie, posługiwanie się indukcją są obecne na każdym etapie uczenia się i tworzenia wiedzy matematycznej. Tak więc należy zdać sobie sprawę, iż doświadczenie jest niezbędne w całym procesie tworzenia matematyki. Są to oczywiście bardzo ogólne stwierdzenia, wymagające uściśleń. W próbach wypracowania jakiegoś stanowiska w tej kwestii mogą być pomocne wyniki uzyskiwane w psychologii, biologii i w innych naukach przyrodniczych. Przyjęcie jednak jakiejś wersji empiryzmu w zakresie poznawania przedmiotów matematycznych nie przesądza jeszcze kwestii w sprawie sposobu ich istnienia. Warto też zaznaczyć, iż w każdej z prezentowanych koncepcji są obecne elementy stanowisk empirycznych.

Z trzech zaprezentowanych grup stanowisk koncepcje konceptualistyczne, jak się wydaje, wzbudzają najwięcej kontrowersji. Przedmioty matematyczne mają bowiem pewne odniesienie do rzeczywistości pozapodmiotowej. Nie mogą więc być tylko swobodnym tworem umysłu ludzkiego. Pozostają więc dwie koncepcje: platonizm oraz empiryzm. Jednakże w związku z zasygnalizowaną różnorodnością obiektów matematycznych stanowiska te mogą dotyczyć tylko pojęć matematycznych z najniższych pięter wspomnianej hierarchii. Istnienie bowiem liczby naturalnej czy kwadratu wydaje się być odmienne niż istnienie na przykład pojęcia przestrzeni riemannowskiej. Na pewnym więc piętrze tej hierarchii konieczne staje się uwzględnienie tworzącej roli człowieka i uznanie, iż być może te pojęcia są konstruowane przez matematyka i istnieją w jego umyśle. Należy jednak podkreślić, iż matematyk nie tworzy pojęć zupełnie dowolnie. Pojęcia muszą czemuś służyć i z reguły są konstruowane na bazie pojęć wcześniejszych. Nie chcę się tu wypowiadać na temat, w którym momencie istnienie pojęć matematycznych zaczyna być istotnie związane z umysłem człowieka, nie można tu oczywiście niczego z góry dekretować. Wydaje mi się jednak, że można jeszcze zgodzić się, że poszczególne pierścienie istnieją niezależnie od człowieka, natomiast pojęcie pierścienia jest tworem matematyka i funkcjonuje jako nazwa.

Nie podejmuję się dokonać rozstrzygnięcia między platonizmem a empiryzmem w kwestii istnienia pojęć z początkowych szczebli hierarchii. W przedstawionym tutaj ujęciu oba stanowiska wydają się być jednakowo prawomocne, a próba rozstrzygnięcia na korzyść któregoś z nich nie wydaje się wiele wnosić do zrozumienia istoty matematyki.

ZBIGNIEW ŁEPKO

ETYKA EKOLOGICZNA KONRADA LORENZA

1. WSTĘP

W ramach ekologicznych analiz zachowania się istot żywych podjął Lorenz próbę przyrodoznawczego wejrzenia w ludzkiego ducha, czyli wyznaczenia biologicznych uwarunkowań ludzkiego myślenia i poznania. O charakterze tego przedsięwzięcia zdecydowało przekonanie Lorenza, że „wszystkie istoty żywe są istotami historycznymi i zrozumienie ich istnienia (*So-Sein*) jest zasadniczo możliwe na gruncie historycznego zrozumienia owego jednorazowego procesu rozwojowego, który doprowadził do ich powstania właśnie w tej, a nie żadnej innej formie" [1]. To przekonanie prowadzi do wniosku, że człowiek jako istota żywa „swoje właściwości i zdolności, z wybitnymi uzdolnieniami poznawczymi włącznie, zawdzięcza ewolucji" [2]. Niepowtarzalność swoiście ludzkich właściwości i uzdolnień można więc dostrzec jedynie wówczas, gdy „patrzy się na nie okiem przyrodnika, jako na produkt naturalnego procesu stwarzania" [3]. Stąd też próbę wyznaczenia biologicznych uwarunkowań ludzkiego myślenia i poznania sprowadza Lorenz do hipotetycznej rekonstrukcji filogenetycznej drogi, na której pod koniec trzeciorzędu pojawiła się jedyna w swoim rodzaju całość systemowa, zdolna do pojęciowego myślenia i mowy słownej [4].

Przekonanie Lorenza, że człowiek jest istotą żywą, która swoje właściwości i zdolności, z wybitnymi uzdolnieniami włącznie, zawdzięcza ewolucji, stanowi podstawę do refleksji zarówno nad możliwościami, jak i ograniczeniami człowieka w świecie. W koncepcji tej człowiek nie jest, jak u Monoda,, osamotnionym tworem przypadkowo zaistniałym na krańcach wszechświata, ani też, jak u Kanta, oponentem świata. Jest on bowiem całkowicie i ze wszystkim powiązany ze światem.

---

[1] K. Lorenz, *Über tierisches und menschliches Verhalten. Aus dem Werdegang der Verhaltenslehre.* Gesammelte Abhandlungen, Bd. I, München 1984, 358.

[2] K. Lorenz, *Odwrotna strona zwierciadła. Próba historii naturalnej ludzkiego poznania*, tłum. K. Wolicki, Warszawa 1977, 36.

[3] *Tamże*, 34.

[4] Por. *tamże*, 278.