Mieczysław Lubański

Zagadnienie natury myślenia matematycznego

Studia Philosophiae Christianae 27/1, 55-69

1991

Studia Philosophiae Christianae
ATK
27(1991)1

MIECZYSŁAW LUBAŃSKI

ZAGADNIENIE NATURY MYŚLENIA MATEMATYCZNEGO

1. WSTĘP

Przedmiotem naszych rozważań jest matematyka dzisiejsza, a więc obecnie istniejąca, z jej wieloma działami, w których funkcjonują pojęcia na wysokich stopniach abstrakcji, wchodząca w dość już liczne relacje z nowoczesnymi maszynami liczącymi. Nie będziemy więc zastanawiać się nad początkami matematyki, jej rozwojem, historią, nad stopniowym wzbogacaniem jej metod, twierdzeń. Nie będziemy dyskutować proponowanych określeń matematyki oraz problemu ich adekwatności. Punktem wyjścia jest dla nas fakt istnienia matematyki w postaci dzisiejszej. Ona nas interesuje i stanowi przedmiot naszej uwagi badawczej [1].

Celem naszym jest scharakteryzowanie myślenia występującego w matematyce dzisiejszej. Dokonamy tego analizując wybrane typy rozumowań matematycznych. Rozważymy przykłady z kilku działów matematyki i przyjrzymy się własnościom rozumowań w nich występujących. Dzięki temu będziemy mogli również wskazać pewne charakterystyczne własności samej matematyki. Możliwe będzie także dokonanie nie tylko pewnego podsumowania uzyskanych wyników, rzecz jasna podsumowania w formie — gdy chodzi o całą matematykę — niepełnej, niewykluczającej, ale również wysunięcie pewnych sugestii w odniesieniu do klasycznych zagadnień wchodzących w zakres filozofii matematyki.

[1] Jest charakterystyczne, że matematyka, będąc najstarszą i jednocześnie co do przedmiotu badań najprostszą dziedziną wiedzy, nie daje się do chwili obecnej adekwatnie scharakteryzować przy pomocy określenia, na które by się wszyscy zgodzili. Wyraz matematyka ma źródłosłów grecki. Máthema znaczy nauka, uczenie, máthesis — uczenie się.

2. PRZYKŁADY

Zilustrujemy różne style myślenia matematycznego na trzech przykładach. Pierwszy z nich został zaczerpnięty z rachunku prawdopodobieństwa, działu którego początki można datować na wiek XVII. Ukaże on konkretne rozumowanie z tej dziedziny. Przykład drugi odnosić się będzie do odmiennego — jak można sądzić — od poprzedniego typu teorii, mianowicie do teorii katastrof. Jest to względnie nowy dział matematyki, kórego początki można odnosić do roku 1955. Przykład trzeci dotyczyć będzie tzw. matematyki fraktalnej, działu znajdującego się *in statu nascendi*. Racja ich doboru będzie stawała się coraz bardziej widoczna w miarę wypunktowywania przysługujących im charakterystycznych cech.

2.1. ZASADA ODBICIA

Przyjmujemy następującą definicję drogi od początku układu do pewnego punktu na płaszczyźnie.

Definicja. Niech $x>0$ oraz y będą liczbami całkowitymi. Drogą $\{s_1, s_2, ..., s_x\}$ od początku układu do punktu (x, y) będziemy nazywali linię łamaną, której wierzchołki mają odcięte $0, 1, 2, ..., x$ i rzędne $s_0, s_1, s_2, ..., s_x$ spełniające warunek

$$s_i - s_{i-1} = \pm 1, \; s_0 = 0 \quad (i=1,2,...,x),$$

przy czym $s_x = y$.

Zgodnie z powyższą definicją istnieje 10 dróg od punktu $(0, 0)$ do punktu $(5, 1)$. Uważny Czytelnik przekona się o tym bez wielkiego trudu. Dwie drogi spełniają warunek $s_i>0$. Są nimi drogi postaci: $\{1, 2, 1, 2, 1\}$ oraz $\{1, 2, 3, 2, 1\}$.

Niech teraz $A=(a,u)$ oraz $B=(b,v)$ będą dwoma punktami o współrzędnych całkowitych w dodatniej ćwiartce płaszczyzny $b>a\geqslant 0$, $u>0$, $v>0$. Przez odbicie punktu A względem osi x będziemy rozumieć punkt $A'=(a,-u)$.

Rozważać będziemy drogi od punktu A do punktu B, a więc drogi, zgodnie z powyższą definicją, gdzie punkt A odgrywa rolę początku układu współrzędnych.

Zachodzi następujące twierdzenie zwane zasadą odbicia [2].

Zasada odbicia. Liczba dróg z punktu A do punktu B, które dotykają lub przecinają oś x-ów, jest równa liczbie dróg z punktu A' do punktu B.

Dowód twierdzenia przebiega następująco. Rozważmy drogę $\{s_a=u, s_{a+1}, ..., s_b=v\}$ od punktu A do punktu B, która ma

[2] Twierdzenie powyższe wraz z dowodem oraz wstępną definicją podaję za monografią: W. Feller, *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa*, Tom I, Warszawa 1987 [5], 74, 75, 77—78.

jeden lub więcej wierzchołków na osi x-ów. Niech t będzie rzędną pierwszego z takich wierzchołków: tzn. niech t będzie takie, że $s_a>0, \ldots, s_{t-1}>0, s_t=0$. Wówczas droga $\{-s_a, -s_{a+1}, \ldots, -s_{t-1}, s_t=0, s_{t+1}, s_{t+2}, \ldots, s_b\}$ jest drogą z punktu A′ do punktu B, mającą punkt T=(t,0) jako pierwszy wierzchołek na osi x-ów. Fragmenty drogi AT oraz A′T są odbiciami zwierciadlanymi jeden drugiego i istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między wszystkimi drogami z A′ do B i takimi drogami z A do B, które mają jeden z wierzchołków na osi x, co kończy dowód twierdzenia.

W powyższym rozumowaniu występuje kilka elementów. Są nimi: definicja drogi prowadzącej od początku układu do pewnego punktu na płaszczyźnie, przykład dróg idących z punktu (0,0) do punktu (5,1), określenie odbicia punktu względem osi x oraz twierdzenie zwane zasadą odbicia wraz z jego dowodem. Jest widoczny konkretny i treściowy charakter wymienionych elementów. Rozumiemy o czym się mówi, jaką treść przypisuje się terminom matematycznym, zdajemy sobie sprawę z poprawności merytorycznej dowodu. Rozumowanie występujące w samym dowodzie twierdzenia przebiega — jeśli tak można powiedzieć — na płaszczyźnie treściowej.

Zaprezentowany przykład jest elementarny, choć może nieco żmudny w „rozwikłaniu" zawartej w nim treści. Ale — powtórzmy — ukazuje wyraźnie treściowy charakter całego przedłożonego rozumowania.

2.2. TEORIA KATASTROF

Rozważmy następującą sytuację. Przypuśćmy, że pozioma linijka została końcami umocowana na zawiasach. Przypuśćmy dalej, że obciążono ją pewnym ciężarem umieszczonym na jej środku. Możliwe jest jednoczesne trwanie linijki w równowadze wraz z wygięciem jej łukiem do góry, jak to ma miejsce w przypadku łuków pod mostem. Jeżeli będziemy zwiększać obciążenie linijki, to w pewnej chwili — jak to mówimy — nastąpi „katastrofa", albo inaczej „runięcie". Linijka w sposób skokowy przejdzie z jednego stanu w drugi. Teoria katastrof zajmuje się matematycznym ujęciem tego rodzaju i podobnych sytuacji. Intuicyjnie rzecz ujmując, można więc powiedzieć, że przez katastrofę rozumiemy nagłe, skokowo następujące przejście z jednego stanu w drugi przy założeniu ciągłych, płynnych zmian warunków zewnętrznych [3]. A więc

[3] W. I. Arnold, *Tieorija katastrof*, Izdatielstwo Moskowskogo Uniwiersiteta 1983 [2], 10, 4.

dany układ pod wpływem ciągłych zmian warunków zewnętrznych przechodzi skokowo z jednego swego stanu w drugi.

E. C. Zeeman zaproponował tzw. maszynę katastrof [4]. Zasadniczą jej częścią jest położone na desce kółeczko, które może się swobodnie obracać dokoła swego środka 0. W punkcie B znajdującym się na brzegu kółeczka przytwierdzone są dwie gumki. Drugi koniec jednej z nich zostaje przymocowany na deseczce w punkcie A dostatecznie odległym od środka 0 kółeczka w ten sposób, aby gumka BA była zawsze napięta. Do drugiego końca drugiej gumki (punkt C) jest przymocowany zaostrzony ołówek. Okazuje się, że przy pewnych położeniach ostrza ołówka, mała zmiana jego położenia daje „katastrofę", tj. skok kółeczka do nowego położenia. Jeżeli na deseczce zaznaczyć miejsca wszystkich takich katastrof, to otrzymuje się „krzywą katastrof".

Przy konstrukcji wspomnianej maszyny katastrof zwraca się uwagę na to, aby kółeczko nie było zbyt ciężkie. Jeżeli bowiem tarcie, względnie bezwładność kółeczka, byłyby zbyt wielkie, wówczas zaciemniłyby one te cechy zachowania się kółeczka, które nas tutaj szczególnie interesują. Dodaje się także, że optymalnymi niejako rozmiarami są: promień kółeczka —3 cm, długość odcinka A0 — 12 cm, długość każdej z gumek — 6 cm [5].

Poprzestajemy na samym opisie maszyny katastrof bez podawania ilustrującego ją rysunku. Nie chodzi nam bowiem o prezentowanie szczegółów technicznych, lecz o podkreślenie treściowego — podobnie jak to miało miejsce w poprzednim przykładzie — charakteru występującego tutaj postępowania badawczego.

Zasygnalizujmy jeszcze, że ideowym niejako kośćcem teorii katastrof jest zbudowana przez H. Whitneya teoria osobliwości, opublikowana w r. 1955 w znanej jego pracy [6].

Wspomnijmy także o słynnym twierdzeniu R. Thoma podającym klasyfikację katastrof. Mówiąc najprościej wyróżnia się ich dwa rodzaje: katastrofy typu c oraz katastrofy typu u. Znakowanie pochodzi od pierwszych liter, odpowiednio, słowa

---

[4] *A catastrophe machine*, w: *Towards a theoretical biology*, ed. C. H. Waddington, vol. 4, Edinburg 1969, 276—282. Por. W. I. Arnold, *op. cit.*, 11 oraz T. Poston, I. Stewart, *Catastrophe theory and its applications*, London 1978 (podaję według tł. ros. *Tieorija katastrof i jeje priłożenija*, Moskwa 1980, 21—24).

[5] T. Poston, I. Stewart, *op. cit.*, 22.

[6] *Mappings of the plane into the plane*, Ann. Math. 62 (1955), 374—410.

angielskiego *cusp* (wierzchołek, szpic, kolec) i słowa łacińskiego *umbilicus* (pępek, punkt środkowy). Do pierwszego typu należą: tzw. fałda, ogon jaskółczy, motyl, wigwam, do drugiego zaś — pępki eliptyczne, hiperboliczne, paraboliczne i symboliczne [7].

Zanotujmy, że funkcjonujące tu nazwy rodzajów katastrof oddają niejako ich wygląd zewnętrzny. Wyjaśnienie tego faktu wydaje się być jednoznaczne. Punktem wyjścia rozważań teorii katastrof jest doświadczenie, empiria szeroko rozumiana, której opisom matematycznym nadajemy nazwy odwołujące się do obrazów dawanych przez nasze nieuzbrojone zmysły. Konsekwentnie nie do pominięcia jest tu element treściowy rozumowania.

2.3. MATEMATYKA FRAKTALNA

Badania prowadzone przez K. Weierstrassa nad związkiem zachodzącym między pojęciem funkcji ciągłej oraz funkcji różniczkowalnej doprowadziły do wniosku orzekającego, że ciągłość jest jedynie warunkiem koniecznym, lecz nie wystarczającym, różniczkowalności. Weierstrass podał przykład funkcji ciągłej, która w żadnym punkcie nie posiada pochodnej, czyli nie jest różniczkowalna. Ówcześnie fakt ten wydał się czymś niezwykłym. Drugi przykład tego rodzaju funkcji pochodzi od L. van der Waerdena. Okazuje się, że funkcje ciągłe nigdzie nie różniczkowalne mają specyficzną budowę. Polega to na tym, że — mówiąc intuicyjnie — części są podobne do całości. Jeżeli „ułamać" z niej część, to ma ona kształt i własności całości. Z sytuacją tego rodzaju nie spotykamy się w przypadku „zwykłych", „normalnych" tworów matematycznych [8].

Innym przykładem konstruktu matematycznego o wymienionej wyżej własności jest tzw. zbiór Cantora. Geometrycznie można go określić następująco. Weźmy odcinek 01 i usuńmy z niego wnętrze odcinka od punktu 1/3 do punktu 2/3. Inaczej mówiąc, dzieliśmy początkowy odcinek na 3 przystające odcinki i usuwamy wnętrze środkowego odcinka. Z pozostałymi dwoma odcinkami postępujemy podobnie. A więc każdy z nich dzielimy na 3 przystające odcinki i usuwamy wnętrze odcinka środkowego. Operację tę powtarzamy do nieskończoności. To, co pozostaje z odcinka 01 zwie się zbiorem Cantora [9]. Zbiorowi temu — oprócz wspomnianej wyżej własności — przysługuje

---

[7] T. Poston, I. Stewart, *op. cit.*, 161—163.

[8] P. S. Aleksandrow, *Wwiedienije w obszczuju tieoriju mnożestw i funkcij*, Moskwa 1948, 223—225.

jeszcze ta własność, że jego dowolny iloczyn kartezjański jest homeomorficzny z nim samym.

Weźmy teraz kwadrat i podzielmy go na 9 przystających kwadratów. Usuńmy wnętrze środkowego kwadratu. Pozostały zbiór jest sumą 8 kwadratów. Każdy z nich dzielimy na 9 przystających kwadratów i usuwamy wnętrza wszystkich kwadratów środkowych. I tak postępujemy w nieskończoność. Zbiór powstały z wyjściowego kwadratu po usunięciu wnętrz wszystkich kolejno uzyskiwanych środkowych kwadratów zwie się dywanem Sierpińskiego [10]. Każda jego część zawiera fragment identyczny z całością (w odowiedniej skali).

Podobnych przykładów można podać wiele. Były one znane już dość dawno, jednakże dopiero od prac B. B. Mandelbrota stały się przedmiotem badań nowego działu matematyki, zwanego geometrią fraktalną, czy też ogólniej matematyką fraktalną [11]. Termin fraktalny został utworzony od wyrazu łacińskiego *fractus*, co znaczy złamany. Słowo to sygnalizuje intuicji, że w każdej „ułamanej" części zawiera się twór identyczny co do kształtu z całością.

A zatem przedmiotem badań geometrii fraktalnej są — posłużmy się spolszczonym słowem łacińskim — fraktale. Charakteryzują się one tym, że na każdym poziomie fragmentacji mamy do czynienia z powielaniem tej samej, wyjściowej struktury. A jeśli tak, to jest rzeczą niemożliwą rozróżnić w nich strukturę lokalną od struktury globalnej. Ta cecha wydaje się być istotna, charakterystyczna.

Z czysto geometrycznego punktu widzenia fraktale przedstawiają się jako twory dość „monstrualne". Ocena ta ma, rzecz jasna, charakter raczej „estetyczny", niż „obiektywny". Przeciętny fraktal daleko odbiega od wzorów, które niewykształcona matematycznie intuicja jest skłonna uważać za odpowiednie dla kształtu tworów geometrycznych. Należy jednak zwrócić uwagę na to, że fraktale pojawiają się przy różnego rodzaju postępowaniach badawczych w wielu działach przyrodoznawstwa. Mielibyśmy więc w tych sytuacjach do czynienia nie tylko z treściowym charakterem badań matematycznych,

---

[9] K. Kuratowski, *Wstęp do teorii mnogości i topologii*, Warszawa 1962, 162—163.

[10] A. Lelek, *Zbiory*, Warszawa 1966, 97—98.

[11] B. Mandelbrot, *Les objets fractals: forme, hasard et dimension*, Paris 1975; —, *Fractals: Form, Chance and Dimension*, New York 1977; —, *The Fractal Geometry of Nature*, New York 1982.

lecz także z powiązaniem myśli matematycznej ze światem rzeczywistym [12].

3. TREŚCIOWY CHARAKTER MATEMATYKI

Rozważone przykłady z 3 dziedzin matematyki współczesnej ukazały — jak sądzimy — w sposób nie budzący wątpliwości dwie wzajemnie ze sobą powiązane cechy myślenia matematycznego. Pierwszą z nich jest, na co już zwracaliśmy uwagę, charakter treściowy matematyki. Punktem startu w każdym z dyskutowanych przypadków jest pewien konkret matematyczny, a zatem pewna związana z nim treść matematyczna. Podlega ona przetwarzaniu na różne sposoby (zależnie od działu matematyki, w skład którego wchodzi), następnie zaś formułowane są pewne twierdzenia (a więc, w naszym przypadku, zasada odbicia, tzw. Thoma, nierozróżnialność struktury lokalnej i globalnej). Różnorodność działów, z których zaczerpnięte zostały ilustracje, świadczy o tym, iż nie mamy do czynienia z jakimś wyjątkiem; przeciwnie, należy sytuację tu występującą uważać za typową. Myśl matematyka pozostaje stale nieodłącznie związana z rozumianą treścią. Do niej jest odnoszona.

Podkreślamy tę cechę myślenia matematycznego, ponieważ wydaje się ona być cechą istotną, niepomijalną. Teza głosząca, iż matematyka jest niezinterpretowanym rachunkiem formalnym, może być broniona w odniesieniu jedynie do części matematyki, nie zaś do jej całości, przy jednoczesnym założeniu, iż zbudowane zostały wcześniej w sposób nieformalny systemy matematyczne, które dla uznanych racji logiczno-metodologicznych zostały ujęte w pewne systemy czysto formalne. A więc istnienie niezinterpretowanego rachunku zakłada uprzednią pracę badawczą o charakterze treściowym, której wyniki można na różne sposoby ujmować w systemy formalne. Tego uczy historia myśli matematycznej.

Pojęcie liczby naturalnej czy też elementarnych figur geometrycznych, chociaż wydają się nam bardzo proste, są w rzeczywistości pojęciami abstrakcyjnymi, które powstały w wyniku długotrwałej pracy umysłowej [13]. Toteż jasne jest, że z

---

[12] B. Mandelbrot, *On fractal geometry, and a few of the mathematical questions it has raised, Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Warszawa 1983, vol. 2, Warszawa 1984, 1661.

[13] *Historia matematyki*, Tom I: *Od czasów najdawniejszych do początku czasów nowożytnych*, pod red. A. P. Juszkiewicza, tł. S. Dobrzycki, Warszawa 1975, 11.

formalnym ujęciem systemów matematycznych również wiąże się pojęcie abstrakcji. W matematyce funkcjonują dwa rodzaje abstrakcji: przedmiotowa (punktem wyjścia są konkretne przedmioty) i operacyjna (punkt wyjścia stanowią działania, operacje). Abstrakcja wiąże się z ogólnością. Im dane pojęcie jest bardziej abstrakcyjne, jest też tym bardziej ogólne. A więc np. pojęcie figury geometrycznej jest bardziej abstrakcyjne od pojęcia koła, tym samym pierwsze z nich jest ogólniejsze od drugiego. Ogólność jest pewną wartością, jednakże nie jest celem samym w sobie, do którego matematyk dąży. Matematyk szuka nie największej możliwej, lecz największej potrzebnej ogólności. Pracuje nad takimi nowymi twierdzeniami i teoriami, które 1) są piękne, to znaczy odsłaniają głębszą, czasem nieoczekiwaną istotę rzeczy, dzięki czemu wieńczą lub otwierają jakiś wycinek badań, 2) są celowe, to jest przydadzą się do rozbudowy danej teorii, czy też innych teorii, bądź do różnych zastosowań: biologicznych, ekonomicznych, technicznych [14].

Z treściowym charakterem matematyki wiąże się sprawa rodzajów umysłowości matematyków. Przyjęło się wyróżniać dwa ich rodzaje: umysły logiczne i intuitywne. Mówi się także, że matematycy bywają analitykami bądź geometrami. H. Poincaré jest zdania, że „matematycy nie są do siebie podobni: jedni znają wyłącznie nieubłaganą logikę, inni odwołują się do intuicji i widzą w niej jedyne źródło odkryć. I to byłby powód do nieufności. Czy umysłom tak odmiennym same twierdzenia matematyczne będą mogły ukazać się w tym samym świetle? Czy prawda, która nie jest taka sama dla wszystkich, w ogóle jest prawdą? Przyglądając się jednak tym sprawom dokładniej, widzimy jak ci twórcy, tak odmienni, współpracują przy wspólnym dziele, którego nie można byłoby wykończyć bez ich pomocy. I to już nas uspokaja" [15]. A zatem niezależnie od tego, do której grupy należy konkretny matematyk, istotne jest zawsze dla niego rozumienie, sens, treść tego nad czym pracuje. I choć drogi, czy sposoby rozumienia bywają różne, bez zdania sobie sprawy z tego, co się robi, nie powstałoby żadne dzieło matematyczne.

Drugą cechą myśli matematycznej jest jej powiązanie z empirią, ze światem rzeczywistym. Sygnalizowaliśmy tę sprawę pod koniec poprzedniego punktu. Obecnie można mówić o bez-

[14] W. Kleiner, *Zarys analizy matematycznej*, Warszawa 1978, 255.
[15] *Wartość nauki*, Warszawa 1908, 6; J. Hadamard, *Psychologia odkryć matematycznych*, tł. R. Molski, Warszawa 1964, 98, 100.

pośrednim związku z empirią oraz o związku pośrednim. Matematyka współczesna jest tak rozbudowaną dziedziną wiedzy, że mamy w niej do czynienia z różnego rodzaju powiązaniami z empirią. U początków matematyki było niewątpliwie bezpośrednie odniesienie do codziennego doświadczenia. Dziś ono również występuje. Ale obok niego punktem wyjścia dla badań matematycznych bywają istniejące już pojęcia i teorie, które doznają dalszego uogólnienia, zostają — jeśli tak można powiedzieć — przeniesione na wyższym poziom abstrakcji. Dobrą ilustracją tego stanu rzeczy są podręczniki matematyczne. Jeśli porównać na przykład podręczniki algebry czy też geometrii sprzed stu laty ze współczesną ich wersją, widać bez trudu większe niejako „oderwanie się" dzisiejszego tekstu od zwykłego doświadczenia [16]. Jednakże powiązanie z empirią nie zostaje przerwane.

Istotą żywej matematyki jest wzajemne oddziaływanie konkretnego i ogólnego, logiki i wyobraźni, dedukcji i interpretacji. Dowolny z tych aspektów może dominować w danym szczególnym wyniku. Ale w dalekosiężnie rozwijającej się teorii występują one wszystkie. Początek stanowi „konkretna" podstawa. Następnym etapem jest przejście do abstrakcji, skąd wraca się do indywidualnej rzeczywistości. Lot w abstrakcyjne uogólnienia musi się zaczynać i kończyć w tym, co konkretne i szczególne. Matematyka musi czerpać swe motywy z konkretnego tworzywa szczególnego i zdążać z powrotem do pewnych warstw rzeczywistości. Lot przez abstrakcję musi być czymś więcej niż zwykłą ucieczką; start z ziemi i powrót są jednakowo niezbędne, nawet jeżeli ten sam pilot nie zdoła odbyć wszystkich faz podróży [17].

4. ZŁOŻONOŚĆ MATEMATYKI

Zwróćmy najpierw uwagę na funkcjonowanie w matematyce współczesnej różnych stopni, czy też poziomów abstrakcji. Z poziomem pierwszym mamy do czynienia wówczas, kiedy rozważamy zbiory indywiduów. A więc na przykład zbiory

[16] Widać to doskonale, zarówno w treści zadań, jak i w sposobie wykładu, w takich choćby podręcznikach: J. Todhunter, *Algebra początkowa* (pierwsze wydanie w języku angielskim ukazało się w roku 1863, tłumaczenie polskie — w r. 1890), W. Sierpiński, *Zasady algebry wyższej*, z przypisem A. Mostowskiego: *Zarys teorii Galois*, Warszawa 1946, A. Białynicki-Birula, *Algebra*, Warszawa 1971.

[17] R. Courant, *Matematyka w świecie współczesnym*, w: *Matematyka w świecie współczesnym*, Zbiór artykułów z „Scientific American", Warszawa 1966, 13, 31—32.

liczb, bądź zbiory punktów. Mówi się przecież o zbiorze liczb całkowitych, wymiernych, rzeczywistych, zespolonych, o zbiorze punktów odcinka, prostej, czy dowolnej figury geometrycznej. Istotne jest więc dla tego poziomu rozważanie zbioru indywiduów. Jeżeli teraz przejdziemy do rozważania zbioru różnych zbiorów indywiduów, to przechodzimy na drugi stopień abstrakcji. Na tym poziomie znajdują się takie pojęcia, jak np. pojęcie grupy, ciała, przestrzeni liniowej. Tu pojawia się także analogia, czyli umiejętność dojrzenia pewnych wspólnych własności różnych zbiorów indywiduów. Jeżeli przedmiotem naszych zainteresowań badawczych staną się zbiory zbiorów zbiorów indywiduów, to znajdziemy się na dalszym, trzecim stopniu abstrakcji. Grupa wolna, kategoria w sensie Eilenberga i MacLane'a — to przykłady pojęć z tego poziomu [18]. Wyższy poziom abstrakcji wyraża się od strony psychologicznej koniecznością większego wysiłku wkładanego w zrozumienie danego pojęcia. Łatwiej jest zrozumieć na przykład pojęcie przestrzeni liniowej, niż pojęcie grupy wolnej. Podobnie jest w przypadku pojęcia kategorii. Osoba, która po raz pierwszy z nim się spotyka nie bardzo „widzi" istotny jego sens. Rzecz jasna możliwe jest tworzenie pojęć o coraz wyższym stopniu abstrakcji. Mogą one być symbolizowane następującym zapisem:

$$\{\{\{\{.......\}...\}....\}...\}$$

Nawias klamrowy oznacza zbiór, zaś najbardziej zewnętrzny nawias może oznaczać także klasę, aby uniknąć niebezpieczeństwa utworzenia pojęcia antynomialnego.

Przypomnijmy, że ani abstrakcja sama w sobie, ani ogólność jako taka nie są celami matematyki. Są one jedynie środkami służącymi do osiągania prawdziwie interesujących wyników, mających walor zarówno teoretyczny, jak i praktyczny. Powtórzmy raz jeszcze, że w matematyce jest zawarty sens, zawarta jest treść. Bez nich nie byłoby matematyki.

Dotychczasowe uwagi uzasadniają tezę głoszącą złożoność matematyki z racji na funkcjonujące w niej różne poziomy abstrakcji. Można również mówić o drugim rodzaju złożoności matematyki. Polega on na fakcie obejmowania przez nią wielu różnych działów. Dla ilustracji wymieniamy kilka z nich: analiza funkcjonalna, analiza harmoniczna, geometria różniczkowa, równania całkowe, równania różniczkowe, rachunek wa-

[18] W. S. Massey, *Algebraiczeskaja topologija: Wwiedienije*, Moskwa 1977, 126.

riacyjny, teoria grup, teoria liczb, teoria mnogości, teoria kategorii, topologia ogólna, topologia algebraiczna. Podstawę do dalszego rodzaju złożoności matematyki można widzieć w jej podobieństwie do żywego organizmu, dzięki czemu znajduje się w nieustannym rozwoju, jest otwarta na nowe ubogacenia pojęciowe, nie daje się zamknąć w sztywnych ramach, schematach. Innymi słowy, kontekst odkrycia przeplata się nieustannie z kontekstem wykładu. Nic więc dziwnego, że nie potrafiono w zadawalający sposób określić czym jest matematyka. Wydaje się, że nie da się tego w ogóle osiągnąć. Zachodzące niejako sprzężenie zwrotne między wymienionymi dwoma kontekstami zdaje się również pośrednio świadczyć o istotności dla matematyki elementu treściowego, elementu rozumienia. W celu uniknięcia ewentualnych nieporozumień dopowiedzmy, że przez matematykę w kontekście odkrycia rozumiemy ją jako zespół czynności uczonych, zaś przez matematykę w kontekście wykładu — jako wytwór wspomnianych czynności. Z podanym przed chwilą rozróżnieniem na naukę ujmowaną jako rzemiosło uczonych i jako jego wytwór blisko jest spokrewnione pojmowanie funkcjonalne i przedmiotowe nauki [19]. Nie będziemy bliżej dyskutować całego kompleksu istniejącej tu tematyki. Oddaliłoby nas to bowiem zbytnio od celu przyświecającemu obecnemu opracowaniu. Wystarczy jeżeli powiemy, że przez kontekst wykładu będziemy rozumieli przedmiotowe ujęcie matematyki.

Podkreślmy jednak, że w przypadku bujnie rozwijającej się dziedziny wiedzy, a taką jest matematyka, kontekst odkrycia i kontekst wykładu (czyli kontekst przedmiotowy) wzajemnie się warunkują. Odkrycie, uzyskany wynik to punkt wyjścia dla ujęcia go w postaci logicznie uporządkowanego wykładu; konkretna postać wykładu, z kolei, inspiruje do nowego jego ujęcia, do dalszych badań. I pojawia się zwykle (jeśli inwencja twórcza nie zawiedzie uczonego) następny kontekst odkrycia, który zaowocowawszy nowymi wynikami domaga się ujęcia ich w formie wykładu, w formie przedmiotowej. Historia zaczyna się powtarzać.

Dla pełności rozważań wypada dodać, że w odniesieniu do matematyki można wyróżnić jeszcze kontekst dydaktyczny oraz kontekst zastosowań. Matematyka w nauczaniu wykorzystuje różnego rodzaju zabiegi dydaktyczne, aby przybliżyć słu-

[19] K. Ajdukiewicz, *Logika pragmatyczna*, Warszawa 1965, 173; S. Kamiński, M. A. Krąpiec, *Z teorii i metodologii metafizyki*, Lublin 1962, 13.

chaczowi sens pojęć, twierdzeń, teorii i ułatwić ich zrozumienie. Jest to szeroka dziedzina wiedzy korzystająca m.in. z psychologii i pokrewnych dyscyplin. Zastosowania matematyki zakładają umiejętność dojrzenia w zagadnieniach różnych nauk, czy też w problemach dnia codziennego, zawartej w nich treści matematycznej oraz odpowiedniego ich sformułowania. Dziedzina zastosowań matematyki jest dziedziną trudną, ponieważ wymaga znajomości zarówno matematyki, jak i konkretnej nauki. W ostatnich latach zaczęto posługiwać się w badaniach matematycznych komputerem. Spektakularnym jego zastosowaniem było rozwiązanie tzw. zagadnienia 4 barw, które postawione około 1840 r. uzyskało rozwiązanie dopiero w r. 1977, dzięki współpracy z komputerem IBM 360 [20].

Można więc powiedzieć, że „cała", „pełna" matematyka zawiera różne poziomy abstrakcji, różne działy oraz różne jej ujęcia czy konteksty (odkrycia, przedmiotowy, dydaktyczny, zastosowań). Widoczna jest wieloraka jej złożoność. Pomijamy jeden jeszcze rodzaj złożoności, mianowicie w odniesieniu do metod. Omawianie go oddaliło by nas od głównego tematu artykułu.

Podkreślmy w tym miejscu jeden aspekt, który wydaje się być istotny. Otóż w każdym z wymienionych kontekstów podstawową rolę gra inwencja twórcza, albo inaczej umiejętność intuicyjnego ujęcia problemu. Bez tego nie nastąpiłyby dalsze etapy rozwoju teorii. Wypada dopowiedzieć, że intuicja „budzi się" w nas przez kontakt z empirią (w szerokim tego słowa znaczeniu). Ale nie należy zapominać, że na matematyka przy tworzeniu przezeń teorii, oprócz empirii, może także działać (i rzeczywiście tak bywa) myśl filozoficzna, którą wyznaje, względnie idea, której jego umysł ulega.

5. PODSUMOWANIE

Wskazaliśmy, jak sądzimy, w sposób wystarczający na charakterystyczne cechy matematyki współczesnej, do których zaliczyliśmy niewątpliwy jej charakter treściowy, wieloraką jej złożoność oraz powiązanie z empirią. Szczególnie podkreślaliśmy charakter treściowy rozumowania matematycznego. Matematyk wie i rozumie o co mu chodzi, co bada, czego poszukuje, co głosi.

---

[20] K. Appel and W. Haken, *Every planar map is four colorable*, part I: *Discharding*, Illinois J. Math. 1977, nr 21, 429—490; K. Appel and W. Haken and J. Koch, *Every planar map is four colorable*, part II: *Reducibility*, *Ibidem*, 491—567.

Podsumowując nasze rozważania zilustrujmy treściowy charakter matematyki jednym jeszcze bardzo prostym przykładem. Otóż z chwilą wprowadzenia liczb ujemnych zwrócono uwagę na następującą równość dwu stosunków:

$$\frac{1}{-1} = \frac{-1}{1}$$

Równość ta wydała się paradoksalna. Bowiem po jej lewej stronie w liczniku figuruje liczba większa niż w mianowniku, zaś po stronie prawej jest przeciwnie, w liczniku figuruje liczba mniejsza niż w mianowniku. Konsekwentnie większy stosunek (strona lewa) byłby równy stosunkowi mniejszemu (strona prawa). Na ten paradoks zwrócono uwagę w XVII wieku [21]. Nie byłoby to możliwe, gdyby się zapomniało o znaczeniu występujących tu symboli, o ich rozumieniu, traktowało się zaś całą sprawę czysto formalnie.

Zwykle mówi się, że matematyk posługuje się dedukcją. Można się pod tą tezą podpisać, jeżeli przez dedukcję będziemy rozumieć dedukcję treściową. Z oczynionych przez nas uwag zdaje się jednoznacznie wynikać, że w podtekście dedukcji formalnej znajduje się myśl pewna, rozumienie, treść pewna, sens, czyli, innymi słowy, dedukcja co do treści.

Podobne stanowisko zajmował H. Steinhaus. Logikę cenił nisko. Uważał ją tylko za metodę i w dodatku dla matematyka za nie najlepszą. Z jednego punktu na ziemi do drugiego można iść po łuku krótszym lub też po dłuższym dookoła ziemi; logikę uważał za tę drogę dookoła ziemi [22]. Także R. Thom jest zdania, że zwykłe myślenie prawie zawsze posługuje się rozumieniem pojęcia i prawie nigdy jego zakresem [23] oraz, iż matematyka własny sens odkrywa w próbach nadawania sensu rzeczom, zaś w rozumieniu rzeczywistości ustawicznie odnawia się rozumienie matematyczne [24].

Skoro więc myślenie matematyczne jest w istocie swej treściowe, skoro matematyka nieustannie się rozwija, skoro jest nauką „otwartą", przeto klasyczna problematyka z zakresu

---

[21] *Historia matematyki*, Tom II: *Matematyka XVII stulecia*, pod red. A. P. Juszkiewicza, tł. S. Dobrzycki, Warszawa 1976, 41.

[22] A. Dawidowicz, *Wspomnienia o Leonie Chwistku, Hugonie Steinhausie i Włodzimierzu Stożku*, Wiadomości Matematyczne 23 (1980—1981), 235.

[23] *Czy możliwa jest matematyka kontinuum?*, Wiadomości Matematyczne 24 (1982), 17.

[24] *Matematyka a rozumienie*, Wiadomości Matematyczne 23 (1980—1981), 212.

filozofii matematyki (a więc problem istnienia w matematyce, problem jej przedmiotu, zagadnienie prawdy, relacja matematyki do logiki itp.) winna być badana na drodze „oddolnej". Znaczy to, że wspomniane zagadnienia należy rozważać w sytuacjach „konkretnych", a więc na różnych poziomach abstrakcji, w różnych kontekstach, w różnym powiązaniu z empirią itd., a następnie, na podstawie uzyskanych danych, dochodzić do ujęcia syntetycznego.

Zilustrujmy wysuniętą propozycję na przykładzie zagadnienia prawdy w matematyce. Zgodnie z naszą sugestią należy badać, jak bywa rozumiana prawda (ściślej: zdanie prawdziwe) w matematyce, tej matematyce bogatej w różne aspekty, działy, konteksty itd. Wymaga to konkretnych, szczegółowych i wnikliwych rozważań. Dobrze będzie, jeżeli uda nam się dojść do cząstkowego rozumienia prawdy w matematyce. Wówczas otwiera się droga do uogólnienia, ale zawsze ostrożnego, wspartego na niepodważalnych wynikach. Można wówczas zastanowić się, czy będzie nim tzw. klasyczna (korespondencyjna) koncepcja prawdy. Tak postępując niczego z góry nie przesądzamy. Pytamy po prostu jak jest i chcemy uzyskać możliwie wierne oddanie faktycznego stanu rezczy.

Dodajmy, że filozoficzne problemy matematyki nie są od siebie niezależne. Przyjęcie jakiegoś rozwiązania jednego z nich wyznacza w pewnym sensie możliwą postać rozwiazania pozostałych zagadnień. A jeśli tak, to przedłożona wyżej sugestia postępowania badawczego zdaje się uzyskiwać dodatkowe uzasadnienie. Istotne bowiem jest to, co się dzieje w samej, „żywej" matematyce, nie zaś to, co my dowolnie o niej sądzimy.

A zatem, nie wysuwamy żadnych rozwiązań, żadnych koncepcji teoretycznych, jedynie proponujemy oddolną drogę — a więc drogę aposterioryczną — rozpatrywania klasycznych zagadnień filozofii matematyki.

Przypomnijmy na koniec, jak to już sygnalizowaliśmy w uwagach wstępnych, że wyniki naszych analiz traktujemy jako niepełne, fragmentaryczne z racji tej, iż matematyka jest nauką znajdującą się w nieustannym rozwoju. Uważamy je również za niewyłączające, tzn. zależnie od dalszej formy rozwoju matematyki mogą dojść dalsze, nowe jej charakterystyki, które wprawdzie nie przekreślą obecnych jej cech, ale mogą je ukazać na bogatszym tle wielu nowych jej właściwości.

A NOTE ON THE NATURE OF MATHEMATICAL THINKING

Summary

In this paper we study the character of mathematical thinking. We analyse some examples of mathematical thinking which come from diverse branches of mathematics. We opt for the thesis the above mentioned thinking is content in character. Modern mathematics is a very complicated science: it contains many multidirectional domains, its conceptions lie on diverse abstraction levels and it contacts with the real world. Mathematics today is an „open" science, it develops continually, therefore we propose the classical philosophical problems of mathematics ought to be studied „from below", i.e. through the *a posteriori* way.