Ryszard Miszczyński

Intuicjonistyczna koncepcja języka matematyki

Studia Philosophiae Christianae 27/2, 49-64

1991

Studia Philosophiae Christianae
ATK
27(1991)2

RYSZARD MISZCZYŃSKI

INTUICJONISTYCZNA KONCEPCJA JĘZYKA MATEMATYKI

1. WSTĘP

Matematyka od dawna wzbudzała zainteresowanie filozofów. Abstrakcyjność, ścisłość i elegancja, tkwiące w dedukcyjnym charakterze jej rozważań, uzasadniały — według wielu myślicieli — nazwanie jej „królową nauk". Leibniz był jednym z pierwszych wśród tych, którzy zauważyli związek między własnością matematyki a jej specyficznym językiem. Później także podkreślano rolę symboliki i charakterystycznego formalizmu, bez których niemożliwe byłoby uprawianie tej dziedziny. Zainteresowania te, odżywszy na początku wieku XX po odkryciu antynomii teorii mnogości, zdecydowanie wykroczyły poza granice refleksji nad matematyką.

Filozoficznie istotnym i posiadającym długą tradycję jest pytanie o rolę języka w matematyce. Odpowiedzi może być wiele. Pewne, wybrane z nich, przedstawiam uporządkowane według kryterium malejącego znaczenia języka. Moim podstawowym celem jest omówienie poglądów intuicjonistów. Pozostałe stanowiska przedstawię krótko, aby jedynie zarysować tło, na jakim rozpatruję opinię szkoły Brouwera. Wstępną prezentację rozpocznę od koncepcji przeciwnych, tj. utożsamiających matematykę z językiem, a zakończę na sądach Fregego, który podstawowe znaczenie przypisuje rzeczywistości matematycznej, i Lorenzena, podkreślającego rolę podmiotu. Intuicjonizm reprezentują Brouwer, Heyting i van Dantzig. Ograniczam się więc do kręgu myślicieli silnie związanych z filozofią matematyki holenderskiego topologa, a tym samym pomijam koncepcje nieco inne, np. M. Dummetta. Wraz z podsumowaniem stanowiska intuicjonistycznego chcę przedstawić pewne, wynikające z niego, filozoficzne wnioski.

2. MATEMATYKA A JĘZYK. PRZEGLĄD STANOWISK

Prezentację rozpoczynam od poglądów maksymalizujących rolę języka w matematyce. Pierwszym z omawianych będzie stanowisko sformułowane w tzw. Programie Hilberta, potocznie zwane formalistycznym. Podejście to, wykorzystywane w badaniach metamatematycznych, charakteryzuje się ujęciem systemu formalnego jako systemu symboli rozumianych całkowicie obiektywnie. To właśnie symbole, relacje między nimi stanowią właściwy przedmiot badań. Nie jest istotne czy dotyczą one czegoś poza sobą, czy posiadają interpretacje albo znaczenia. Wyłącznie na nich koncentruje się zainteresowanie formalisty. Tak rozumiana teoria matematyczna staje się niezinterpretowanym systemem formalnym, a matematyka zespołem niezinterpretowanych języków sformalizowonych.

Podobnej, do formalistycznej, odpowiedzi na postawione pytanie udzielają logicyści. Przedstawiciele tego kierunku, np. W. V. O. Quine, B. Russell, L. Chwistek, głoszą: pojęcia matematyki można za pomocą wyraźnych definicji sprowadzić do pojęć logiki. Podobnie: twierdzenia matematyki można wyprowadzić z aksjomatów logiki czysto logiczną dedukcją. Jeśli więc ograniczyć się do wymienionych dwu podstawowych punktów programu, bez dołączania dodatkowych założeń (np. ontologicznych) uzyska się potwierdzenie tezy — matematyka jest językiem. Zdanie takie różni się jednak od opinii formalistów. Mamy tu bowiem do czynienia z językiem pewnego szczególnego typu — logiką. Symbole nie są bezsensownymi znakami, ale posiadają zaczerpnięte z logiki, jasno określone znaczenie.

Z przedstawionymi powyżej stanowiskami pozornie harmonizują głosy myślicieli działających w grupie zwanej sygnifika (jest ona interesująca m. in. także ze względu na silne związki łączące z nią intuicjonistów). Jeden z jej przywódców — G. Mannoury twierdzi bowiem: „Nie należy myśleć, że matematyka jest czymś tak nadzwyczajnym. Ona jest jednym z typów języka, którego ludzie używają"[1]. Aby w pełni zrozumieć tę wypowiedź, warto krótko scharakteryzować specyfikę stosowanego przez członków grupy podejścia badawczego. Język ujmowany jest pragmatycznie. W analizach stosowane są metody psychologiczno-socjologiczne. Wyróżniając oznajmujące, emocjonalne i wolicjonalne składniki znaczenia, sygnificy pod-

[1] Podaję za A. Heyting, *History of the foundation of mathematics*, „Nieuw Archief voor Wiskunde", Third Series, 26(1978)6. Tł. R. M.

kreślają subiektywizm w rozumieniu znaku przez podmiot. W tym kontekście przytoczone zdanie można interpretować następująco: sformalizowany język, będący matematyką, jest związany z człowiekiem. Nie cechuje go ani obiektywizm, ani precyzja. Gdy logiczne metody zawodzą (np. kiedy pojawiają się paradoksy), to należy odwołać się do analizy podmiotu posługującego się tym językiem.

Sygnifika wskazała na daremność prób redukowania matematyki do systemu lingwistycznego, do jego syntaktycznych własności, o ile pominięty zostaje w tych rozważaniach człowiek. Po pracach K. Gödela i A. Churcha zauważono konieczność odwoływania się do pewnej pozajęzykowej rzeczywistości. Powstała, zbudowana przez A. Tarskiego, teoria modeli wiążąca z danym systemem formalnym spełniające go układy przedmiotów. Rzeczywistość wdzierająca się w ten sposób do matematyki zależy jednak od własności języka, które w istotny sposób określają jej dopuszczalną strukturę.

Nieco inne ułożenie akcentów niż w koncepcji sugerowanej przez teorię modeli można znaleźć w poglądach G. Fregego. Niemiecki uczony już w punkcie wyjścia odrzuca formalizm. Język matematyki nie powinien być asemantyczny. Matematyka bez treści nie ma zastosowania, które czyniłoby z niej naukę. Każdy symbol języka musi coś znaczyć. Nie wystarczy jednak sama definicja. Dzięki niej nie można stworzyć obiektu posiadającego pożądane własności. To nie uczony powołuje liczbę do istnienia. On jedynie nadaje jej nazwę, ale dopiero wtedy, gdy udowodni istnienie dokładnie jednego obiektu o określonych cechach. Budowa języka nie jest więc ani wymyślaniem słów, ani także — jak chciałby Carnap w swej zasadzie tolerancji — tworzeniem reguł. System lingwistyczny ściśle wyznacza natura obiektów. To nie akt myślenia determinuje strukturę myśli. Matematyk, podobnie jak geograf, jedynie odkrywa i nazywa to, co istnieje. Matematyka posiada swój własny istniejący świat pojęć, a język jest tylko jego wyrazem, który „otwiera nam zmysłowość świata niezmysłowego".

Znaczenie języka w matematyce można minimalizować w inny sposób, niż uczynił to Frege. P. Lorenzen wybrał drogę sugerowaną przez sygnifikę. Twierdzi on: matematyka jest językiem, jeśli utożsamiamy ją z pierwotnym rodzajem liczenia. Czym jednak jest matematyka właściwa, tj. kiedy wyłączymy liczenie i rachowanie? Uczony mając pewne dane formalne reguły operowania symbolami (mogą to być reguły obliczania w systemie liczbowym, albo reguły geometrii, itp.) stara się opracować odpowiednią technikę ich stosowania. Nie jest to mechaniczne wykorzystywanie reguł, ale poszukiwanie metody, jak wykonać dane zadanie. Na tym właśnie polega podstawowa i charakterystyczna funkcja matematyki. Lorenzen wyciąga stąd następujący wniosek: „Matematyka i język są wzajemnie niezależnymi zdolnościami człowieka. Możność opisu z jednej strony, formalna technika konstrukcji z drugiej"[2]. Mimo konstatowanego oddzielenia obu umiejętności, trudno — jak sądzę — odseparować je w konkretnych przejawach. Język stanowi bowiem ramy w grze, którą może realizować matematyka.

Koncepcją Lorenzena kończę wstępny przegląd poglądów na temat roli języka w matematyce. Zanim jednak przejdę do prezentacji intuicjonizmu, chcę krótko podsumować zebrany materiał. Wśród głosów, negujących traktowanie matematyki wyłącznie jako systemu lingwistycznego, pojawiły się dwie grupy. Jedną reprezentują Tarski i Frege, którzy widzą konieczność dołączenia do formalizmu pewnej pozajęzykowej rzeczywistości. Druga — to członkowie sygnifiki i Lorenzen, którzy dostrzegają w matematyce człowieka. Prezentacja ta nie pretenduje do zupełności. Obok głosu Fregego jest miejsce na realistyczne koncepcje K. Gödela, A. N. Whiteheada i inne, poza Lorenzenem, np. na opinie H. Poincare'go lub Th. Skolema. Oczywiście prócz wymienionych dwu nurtów istnieją także stanowiska pośrednie, bogatsze czy inne, deklarujące konieczność dołączenia do języka takich czynników, jak np. kultury, historii, współdziałania społecznego, itd.

3. POGLĄDY INTUICJONISTÓW

3.1. L. E. J. BROUWER

Koncepcję twórcy intuicjonizmu można streścić następująco: matematyka i język są dwoma niezależnymi od siebie dziedzinami aktywności człowieka. Myśl ta stanowi jedną z podstawowych tez filozofii Brouwera. Została sformułowana już w pracy doktorskiej holenderskiego myśliciela i później była konsekwentnie głoszona. Matematyka to „istotnie pozajęzykowa aktywność umysłu mająca swe źródło w percepcji ruchu czasu, tj. w rozpadaniu się życiowego momentu na dwie rzeczy, jedna z nich ustępuje miejsca drugiej, ale jest zachowywana

[2] P. Lorenzen, *Ist Mathematik eine Sprache*, „Synthese", X(1950—52) 185. Tł. R. M.

w pamięci. Jeśli dwoistość tak powstała jest pozbawiona wszelkich jakości, pozostaje pusta forma wspólnego substratu wszystkich dwoistości. To jest ten wspólny substrat, ta pusta forma, która jest pierwotną intuicją matematyki" [3]. Ta intuicja pozwala na konstruowanie pojęć, które podmiot analizuje, bada ich wzajemne związki. Wszystkie operacje charakteryzować musi oczywistość i bezpośredniość dla umysłu. One bowiem gwarantują ścisłość myślenia, które — według Brouwera — tożsame jest z matematyką. Słowa ani reguły lingwistyczne nie są tu zasadniczo potrzebne. Język spełnia co najwyżej funkcje mnemotechniczne (umysł nieograniczony nie potrzebowałby takiego narzędzia) albo komunikacyjne, tzn. pozwala sugerować innym sposób wykonania pewnych konstrukcji. Między obu dziedzinami istnieje relacja taka, jak między procesami atmosferycznymi i mapą pogody. Każda z nich kieruje się własnymi regułami i tak jak prawa zestawiania elementów mapy nie mają wpływu na pogodę, tak i język nie determinuje aktywności matematycznej. Mieszanie tych obu zjawisk prowadzi do licznych nieporozumień, konstrukcje czysto językowe uznawane są za matematyczne i odwrotnie. Lingwistyczną antynomię Russella potraktowano jako matematyczną, podobnie uważa się niesprzeczne zdefiniowanie jakiegoś obiektu za równoważne z jego zaistnieniem. Pierwszym koniecznym warunkiem uzdrowienia królowej nauk jest więc — według Brouwera — oddzielenie matematyki od towarzyszącego jej języka.

Rozumowanie holenderskiego uczonego wiąże się z tradycyjną opozycją dwu sfer: immanentnej i transcendentnej. Do wnętrza, mentalności podmiotu należy jego aktywność konstrukcyjna, wolna, nieskrępowana żadnymi regułami, nakazami, a uzależniona — jak twierdzi Brouwer — jedynie od pierwotnej intuicji matematyki. Czymś zewnętrznym w stosunku do podmiotu, przeciwstawiającym się jego wolności, jest język. Służy on celom utylitarnym, koordynowaniu działań społecznych, a tym samym zniewoleniu jednostki. Właśnie wpływanie na zachowanie innych, przenoszenie woli — jest podstawową jego funkcją [4]. Matematycy, korzystając z rozpowszechnionego słownictwa, używają języka najpopularniejszej ze względów praktycznych teorii. Podmiot posługując się

[3] L. E. J. Brouwer, *Historical background, principles and methods of intuitionism*, w: L. E. J. Brouwer, *Collected Works*, vol. I — *Philosophy and Foundations of Mathematics*, ed. by A. Heyting, New York 1975, (oznaczane dalej CW), 510. Tł. R. M.

[4] L. E. J. Brouwer, *Point and spaces*, [w:] CW, 524.

nim musi zaakceptowć pewne reguły, które zinternalizowane stanowią sztywne ramy myślenia, niszczące spontaniczną aktywność twórczą. Pojawia się jeszcze inne niebezpieczeństwo. Nie wszystkie pojęcia skonstruowane przez umysł dają się wyrazić za pomocą środków omawianego medium, a ponadto, każda próba zakomunikowania komuś sposobu wykonania pewnych konstrukcji jest nieścisła i niejednoznaczna. Brouwer twierdzi nawet: wśród matematyków żadne dwie osoby nie mają tych samych fundamentalnych pojęć uprawianej przez nich nauki [5].

Twórca intuicjonizmu jest świadomy bardzo silnych ograniczeń języka. Nie można ani ściśle przekazać poleceń, jak wykonać odpowiednią konstrukcję, ani sprawdzić bezpośrednim doświadczeniem czy i jak została wykonana przez słuchacza. Odpowiedzi pozwalają tylko domniemywać sposób realizacji. Znaczenie lingwistycznego aktu jest tylko częściowo zdeterminowane słowami. Brouwer odrzuca więc symboliczną notację. Prowadzone przez niego wykłady przybierają bardziej osobisty, nieformalny charakter, stają się perswazją, pojawiają się częste przykłady. Było to naturalne, bo ścisłość — jak sądził — tkwi nie w języku, a w myśli. Przytaczane definicje miały jedynie pokierować słuchaczem, jak wykonać odpowiednie operacje i pomóc w przypomnieniu ich sobie. Pewne elementy np. ciągłość, dyskretność, jedność, pozostawały niezdefiniowane, są bowiem pierwotnymi składnikami konstrukcji danymi bezpośrednio przez intuicję. Cały klasyczny wzorzec wykładu matematyki jako prezentacji twierdzeń i ich dowodów okazał się nieprzydatny. Poza omówionymi posiada jeszcze jedną wadę. Sugeruje bowiem weryfikację pewnych faktów, a nie ich konstrukcję, o którą chodzi.

Z problemem języka wiąże się także inne istotne zagadnienie — logika. Brouwer uważa ją za wtórną w stosunku do języka, a tym bardziej do matematyki. Pogląd taki uzasadnia następująco: opisując konstrukcje umysłowe można zauważyć pewne prawidłowości w występowaniu określonych figur językowych, nazwano je prawami logiki. Np. jeśli w oparciu o pewien system c konstruujemy system a, to uzyskujemy konstrukcję opierającą system a na c, wtedy odpowiedni opis słowny przyjmuje postać sylogizmu. Program logicystów, aby matematykę wyprowadzić z logiki, jest więc — według Brouwera — nie do przyjęcia. Pewność twierdzeń logiki opiera się na języku, a tym samym jest pochodna względem myślo-

[5] L. E. J. Brouwer, *Life, Art and Mysticism*, [w:] CW, 6.

wych konstrukcji. To nie język i logika kierują matematyką, a odwrotnie, ich pewność i niesprzeczność wynikają z wykonania odpowiednich operacji umysłowych.

Mimo minimalizowania roli języka i logiki, Brouwer nie neguje całkowicie ich znaczenia. Twierdzi: gdyby pozostawić na uboczu pewien matematyczny system, a następnie operować na odpowiadającej mu lingwistycznej strukturze, zgodnie z zasadami sprzeczności i sylogizmu, to można ufać w uprawomocnienie tej argumentacji, przez odwołanie się do odpowiednich matematycznych konstrukcji. Zaufanie nie przysługuje jednak prawu wyłączonego środka, które ma wartość jedynie w opisie systemów skończonych. Zawodzi, gdy stosować je bez ograniczeń w całej matematyce intuicjonistycznej. Jej twórca przytaczał nawet specjalne kontrprzykłady, by ukazać nieprzydatność omawianej zasady.

3.2. A. HEYTING

Filozoficzne kanony intuicjonizmu i podstawowe wyniki są dziełem Brouwera. Inni wykonywali zadania skromniejsze. Zgodnie z postulowanym programem rekonstruowali nieopracowane jeszcze działy, zajmowali się popularyzacją. Olbrzymie zasługi w propagowaniu intuicjonizmu przypisywane są uczniowi Brouwera — Arendowi Heytingowi. Mimo deklarowanej akceptacji podstawowych tez nauczyciela, można zauważyć w jego pracach pewne nowe akcenty, dotyczące problemu języka. Na nich chcę głównie się skoncentrować. O ile filozofia Brouwera jest mocno związana z jego solipsystycznym nastawieniem, z przekonaniem o rozgrywaniu się matematyki w myślach zasadniczo odizolowanego podmiotu (którego ideałem jest nieograniczony umysł), to Heyting stoi na stanowisku realistycznym i widzi naukę w kontekście społecznym. Obraz rysowany przez nauczyciela uważa za zbyt uproszczony. Twierdzi: „W swej najprostszej formie matematyka pozostaje ograniczona do jednego umysłu; my musimy przedyskutować (...) jak może być zakomunikowana" [6]. Autor tych słów podkreśla jednocześnie znaczenie wzajemnego zrozumienia między matematykami. Tak wprowadzone „uspołecznienie" podmiotu jest połączone ze zmianą nastawienia w stosunku do języka. Łatwo ją dostrzec w następującym określeniu: „Intuicjonistyczną matematykę najlepiej rozumie się jako

---

[6] A. Heyting, *Intuitionistic Views on the Nature of Mathematics*, „Bolletino dell'Unione Matematica Italiana" (4)9, Suppl. fasc. 2(1974)124. Tł. R. M.

zjawisko kulturowe, gdzie język gra ważną, chociaż nie rozstrzygającą rolę" [7]. Podkreślanie znaczenia środka przekazu jest wynikiem pewnego zaufania, jakim darzy go Heyting. Nie jest ono — jak uważa — bezpodstawne. W zasadzie prawie cały język matematyki intuicjonistycznej opiera się na pojęciach liczb naturalnych. Małe liczby są jednakowo rozumiane przez różnych ludzi i używanie ich nazw nie grozi nieporozumieniem. Heyting pokazuje, jak oczywiste są one dla człowieka. W tym celu przeprowadza następujące rozumowanie: Fundamentalna funkcja naszego umysłu, umożliwiająca myślenie, polega na izolowaniu przedmiotu i skupianiu na nim uwagi. Skoncentrowanie się na pewnej percepcji, następnie na innej, przy zachowaniu pierwszej w pamięci, jest podstawą liczenia. Nie są ważne cechy obiektów. Istotna jest sama mentalna aktywność, która prowadzi do umysłowego kreowania liczb naturalnych. W przypadku komunikowania innych takich i podobnych prostych konstrukcji, nie dochodzi do nieporozumień. Sytuacja jest trudniejsza, gdy przekaz dotyczy bardziej skomplikowanych systemów. Tu nie zawsze zrozumienie jest całkowite. Heyting powtarza za nauczycielem: język to tylko akompaniament, a nie reprezentacja. Twierdzenia matematyki nie podają dokładnego opisu konstrukcji, one jedynie konstatują fakt ich wykonania. „My jesteśmy zazwyczaj przekonani, że inni ludzie myślą podobnie do nas i że oni mogą nas zrozumieć, kiedy wyrażamy nasze myśli w słowach, ale również wiemy, iż nigdy nie jesteśmy całkiem pewni, czy zostaliśmy bezbłędnie zrozumiani" [8].

Warto wspomnieć o pewnej istotnej konsekwencji, wynikającej z ułomności języka oraz odzielenia go od matematyki. Jest to, zauważony już przez Brouwera, problem natury dydaktycznej: jak nauczyć kogoś intuicjonistycznej matematyki, jak wskazać akceptowane operacje myślowe? Klasyczne metody zawodzą. Heyting proponuje odwołać się do filozoficznych rozważań, które — jak twierdzi — mogą wywołać „korzystne umysłowe nastawienie, konieczne dla zrozumienia czystej matematyki" [9]. Sama w sobie filozofia jest tu nieistotna, gdy bowiem zostanie osiągnięty pożądany efekt, staje się ona

[7] Podaję za A. S. Troelstra, *Logic in the writings of Brouwer and Heyting. Report 83. 03*, Amsterdam, 7. Tł. R. M.

[8] A. Heyting, *Intuitionism. An Introduction*, Amsterdam 1956, 8. Tł. R. M.

[9] A. Heyting, *Obzor issledowanij po osnowanijam matematiki. Intuicionizm — teoria dokazatielstwa*, Prieriewod A. P. Juszkiewicza, Moskwa 1936 Leningrad, 21.

dla uprawiania matematyki zbyteczna. Do ukształtowania odpowiedniej umysłowości ucznia mogą przyczynić się także, mniej czy bardziej niedookreślone, opisy lub wykorzystywanie naiwnego stosowania matematycznych pojęć, np. liczb naturalnych.

Krytyka, jaką intuicjoniści kierowali w stronę języka, odnosiła się oczywiście także do systemów sformalizowanych. W ich przypadku istnieją jednak jeszcze inne problemy. Należałoby bowiem podać reguły wnioskowania i listę aksjomatów, co — jak twierdzi Heyting — jest zadaniem niewykonalnym. „Bezsensownym jest starać się ułożyć możliwości myślenia w prokustowe łoże wcześniej danych konstruktywnych zasad" [10]. Ponadto, już między różnymi przedstawicielami tego kierunku, istnieją spory czy akceptować pewne sposoby rozumowania, czy nie. Same metody aksjomatyczne nie były przez Heytinga odrzucane. Za swym nauczycielem kwestionował jednak spełnianie przez nie funkcji kreatywnych. Obiekt nie pojawia się wraz z niesprzecznym systemem zdań. Z punktu widzenia intuicjonizmu — jak sądził — można jednak dopuścić przeprowadzenie dedukcji w systemie aksjomatycznym o nieznanym modelu. Taki opis należy jednak traktować hipotetyczne. Aksjomaty to założenia, które mogą być spełniane przez pewne matematyczne obiekty, dedukcja zaś pozwala nam opisać konstrukcje, które w oparciu o nie mogą być wykonane.

Mimo ograniczeń metod formalnych i pewnej ich nieadekwatności w stosunku do matematyki intuicjonistycznej, Heyting wykorzystywał je. Trudno nie wspomnieć o jego opisach logiki intuicjonistycznej [11]. Jak już podawałem, Brouwer traktował logikę głównie jako naukę o regułach lingwistycznych. Czasem jednak rozumiał ją jako matematykę ograniczoną do relacji części i całości. W podobny sposób pojmuje Heyting logikę w swych publikacjach, a jej twierdzenia traktuje jako tezy matematyczne o najwyższej ogólności. Prace te zyskały szeroki rozgłos i nieco spopularyzowały intuicjonizm. Ścisłe definicje oraz język formalny ułatwiały ich czytanie, a tym samym przyczyniały się do zdjęcia z matematyki intuicjonistycznej odium powodowanego jej ezoterycznością.

---

[10] *Tamże.*

[11] Zob. A. Heyting, *Die formalen Regeln der intuitionistischen Logic; Die formalen Regeln der intuitionistischen Mathematik II, III*, „Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften, Phys.-Mathemat. Klasse", 1930, 42—56, 57—71, 158—169.

Niestety, wbrew intencjom autora, czytelnicy zwracali uwagę nie na leżące u ich podstaw idee, a na sam formalny system. Rozgoryczony autor żałował nawet decyzji opublikowania niektórych z tych prac. Pisał: „One były małą pomocą w walce, której poświęciłem swe życie, mianowicie lepszemu zrozumieniu i podkreśleniu znaczenia idei Brouwera" [12].

3.3. D. VAN DANTZIG

Ostatnim z prezentowanych jest stanowisko D. van Dantziga — uczonego, którego badania wiązały klasyczną analizę i intuicjonizm. Podobnie jak poprzednio omawiani myśliciele, odróżnia on matematykę od systemu twierdzeń, słów czy symboli. Pojmuje ją jako specyficzny rodzaj ludzkiej aktywności, która jak inne czynności człowieka posiada składnik emocjonalny i oznajmujący. W nauce staramy się wyeliminować pierwszy z czynników na tyle, na ile to możliwe. W tym celu stosuje się formalizację, która jest w istocie zastąpieniem człowieka nie posiadającą uczuć maszyną. Tak jak działań ludzkiego podmiotu, tak matematyki i języka nie można odseparować od emocji.

Matematyka jako czysty proces myślowy jest pozajęzykowa, gdy jednak podmiot chce przekazać komuś swoje rozumowanie, musi opisać je w słowach. Przedstawienie takie pomija jednak liczne elementy przeżycia, dopuszcza nieporozumienia. Sformułowane twierdzenia nie są więc adekwatnym opisem konstrukcji podmiotu, stwierdzają jedynie wykonanie jej, a „dowodzenie (...) polega istotnie na »sugestii« nie »prawdziwości« twierdzenia, ale metody konstrukcji" [13].

Matematyka nie daje się więc wyrazić słowami, a tym bardziej — jak wspomniałem — sformalizować. Tak jak muzyk nie może podać zestawu praw, których zastosowanie wystarczy do skomponowania utworu, tak nie można podać systemu reguł, zgodnie z którym przeprowadza się rozumowania. Takie zasady można dostrzec dopiero a posteriori, badając uzyskane efekty. Formalizacji matematyki nie można więc dokonać, a przeprowadzenie jej w oparciu o znane prawidłowości będzie zawsze niezupełne. Pokrywać ona bowiem będzie jedynie część matematyki, szczególnie tę, która jest skończona, zamknięta. Zawsze wraz z nowymi rozumowaniami można odkryć nowe regularności. Formalizacja nie jest więc nigdy w stanie objąć całą matematykę, ona jedynie podąża za nią.

---

[12] A. Heyting, *History of the foundation...*, 15.

[13] D. van Dantzig, *On the principles of intuitionistic and affirmative*

Przytoczone rozumowanie nie implikuje konieczności całkowitego odrzucenia metod formalnych. Matematykiem — jak twierdzi van Dantzig — jest nie ten, kto zna mnóstwo twierdzeń i ich dowodów, ale ten kto odkrywa nowe własności. Może w tym celu stosować różne narzędzia. Sformalizowanie systemu pomaga np. zauważyć nowe analogie lub nieznane regularności. Zbyt silne przywiązanie do tej metody ma jednak także swoje negatywne strony. Często utrudnia odkrycie własności wymagających subtelniejszych odróżnień niż stosowane dotychczas, np. dwa obiekty traktowane jako identyczne w jednym systemie formalnym, mogą być różne przy skoncentrowaniu się na dotychczas nieuwzględnianych cechach.

Na przedstawieniu poglądów na temat formalizacji kończę prezentację stanowiska van Dantziga. Badacz ten nie wprowadza zasadniczo nowych tez do intuicjonistycznej koncepcji języka matematyki. Rozwija on pewne typowe myśli, w sposób wskazujący na wpływy sygnifiki.

4. PODSUMOWANIE. ZNACZENIE KONCEPCJI INTUICJONISTYCZNEJ

Oryginalność intuicjonistycznej koncepcji języka matematyki polega na jej zasadniczo negatywnym charakterze. Twierdzi się: język i matematyka stanowią dwie odrębne dziedziny. Żaden system znaków nie jest w stanie reprezentować matematyki, która jest niezależnym od słów i reguł lingwistycznych czystym myśleniem. Językowi pozostają więc do spełnienia następujące zadania: wspomaganie pamięci oraz przekazywanie sugestii jak wykonać daną matematyczną konstrukcję (według intuicjonistów język przenosi nie tyle treści matematyczne, co informuje o sposobach wykonania odpowiednich niosących je konstrukcji). Taki zsubiektywizowany język nie podlega już wszystkim prawom logiki klasycznej, a w szczególności prawu wyłączonego środka.

Teza o niewyrażalności matematyki przez język nie stanowi tylko filozoficznej deklaracji o istnieniu pewnej nadwyżki myślowej rozumowania w stosunku do przekazu zawartego w słowach. Brouwer konstruował obiekty zwane ciągami nieskończenie postępującymi, w których dobór kolejnych wyrazów był uzależniony od swobodnych decyzji podmiotu lub od jego możliwych przyszłych doświadczeń. Jednoznaczna skończona definicja, która pozwalałaby odróżnić taki byt od innych podobnych mu, jest nie zawsze możliwa. Obiekty te, podobnie

---

mathematics, „Indagationes Mathematicae", vol. 9, 1947, 431.

jak cała matematyka intuicjonistyczna, są dynamicznymi procesami i jako takie nie poddają się statycznemu opisowi językowemu.

Poglądy głoszące oddzielenie matematyki od języka odróżnia stopień podkreślanej odrębności obu dziedzin. Skrajne stanowisko Brouwera silnie akcentuje rozdźwięk między nimi, a priopozycja Heytinga wskazuje na ich wzajemne związki, co łączy się z dostrzeganiem społecznego kontekstu matematyki. Większą ilość zwolenników zdobył drugi z poglądów. Zawiera on jednak pewną teoretyczną trudność: jak pogodzić deklarowaną niewerbalizowalność matematyki i wzajemne zrozumienie. Sam autor nie udziela wyraźnej odpowiedzi. Podkreśla jedynie naturalność podstawowych pojęć oraz odwołuje się do odpowiedniego nastawienia umysłowego. Inną postacią tego dylematu jest problem: jak ujmować w istocie indywidualisyczną matematykę intuicjonistyczną w kontekście społecznym? Zadawalające rozwiązanie zagadnienia jest — jak sądzę — niemożliwe w filozofii, której rdzeń stanowi koncepcja Brouwera. Mimo — co brzmi może paradoksalnie — empirycznego potwierdzenia słuszności poglądów Heytinga, które stanowi fakt istnienia ruchu intuicjonistów, ich publikacje, wzajemna współpraca, to uważam je za nieco mniej atrakcyjne niż skrajne, a przez to chyba bardziej konsekwentne, stanowisko Brouwera.

Z akcentowanymi trudnościami wiąże się jeszcze jeden zasadniczy dla prezentowanej koncepcji problem: czy można rzeczywiście oddzielić matematykę od języka? Pogląd intuicjonistów jest pozytywną odpowiedzią na podstawowe pytanie psycholingwistyki: czy istnieje czyste pozajęzykowe myślenie? Przeciw temu stanowisku przytoczyć można szereg tradycyjnych argumentów. Na przykład twierdzi się: nasze rozumowania są oparte na mechanizmach ukształtowanych przez wychowanie w kulturze preferującej logiczne, językowe sposoby myślenia, i od nich nie jesteśmy w stanie wyzwolić się. Biorąc pod uwagę, że problemy, z którymi boryka się matematyka intuicjonistyczna, i ich rozwiązania są bardzo często zaczerpnięte z matematyki klasycznej, nie można jej uznawać za czysto pozajęzykową.

Zwracając uwagę na powstające wątpliwości mam świadomość rozmiaru zadania, jakim jest rozwiązanie ich. Nie podejmuję go. Uważam bowiem, że wartość filozoficzna rozważań intuicjonistów jest w znacznym stopniu niezależna od ich ewentualnych rozstrzygnięć. Na przykład analiza konsekwencji wypływających z odrzucenia założenia o możliwości wyrażania matematyki przez język pozwala dostrzec nie zawsze zauważalną rolę tego medium w nauce klasycznej. W tym celu warto porównać prace oraz pewne zaplecza filozoficzne matematyka tradycyjnego i intuicjonisty.

Rozumowaniu można zapewnić ścisłość co najmniej w dwojaki sposób: idąc śladami Kartezjusza dbać o jasność i wyraźność myśli albo, korzystając z propozycji Leibniza, sformalizować zapis towarzyszący rozważaniu. W drugim przypadku zakłada się, że system znaków jest jakby izomorficzny w stosunku do naszych myśli. Poddanie go odpowiednim rygorom, tj. określenie dopuszczalnych przekształceń, wyszczególnienie aksjomatów, itp., zapewnić ma poprawność przeprowadzanych operacji myślowych. Stanowisko takie wydaje się dobrze harmonizować z systemem wartości preferowanych w nauce. Zamiast mówić o przeżyciach uczonego: myślach, intuicjach, które stanowią jego intymną własność, i jako takie są tylko jemu dostępne, zajmujemy się obiektywnym przedmiotem: zbiorem znaków uporządkowanych zgodnie z ustalonymi regułami. Słuszność rozumowania jest więc tożsama z formalną poprawnością dowodu i może ją w zasadzie sprawdzić każdy, co zapewnia obiektywność wyników. Jeśli uczony przyjmuje platoński punkt widzenia (aprobowany przez większość matematyków), to pewność i prawdziwość tak przedstawionego poznania jest wyraźnie zrelatywizowana do używanego systemu znaków. Zgodność otrzymywanych wniosków z rzeczywistością matematyczną zależy bowiem od adekwatności aksjomatów i trafności przyjętych reguł wnioskowania. Powyższy wniosek nie jest jednak koniecznie związany z platońskimi założeniami. Immanentna krytyka matematyki pokazuje, w jak znacznym stopniu prawda aksjomatów poprzez prawa transmisji przepływa do wszystkich pozostałych twierdzeń teorii [14].

Przedstawione stanowisko niesie jednak pewne negatywne konsekwencje. Istnieje możliwość pojawienia się twierdzień „formalnie prawdziwych", którym jednak nie potrafimy przypisać żadnego znaczenia. Po drugie obserwując rozwój nauki można zauważyć proces zdobywania przez język pewnej autonomii, której skrajnym wyrazem jest formalizacja. Zjawisko to jest wynikiem pewnej koniecznej stałości i niezależności od jednostek, jaka musi cechować środek intersubiektywnej komunikacji. Przekonanie o izomorficzności języka i myśli po-

[14] Stopień tej zależności jest uwarunkowany współczynnikiem ingerencji procedur dedukcyjnych w budowę matematyki.

woduje traktowanie systemu formalnego jako opisującego wszystkie możliwe rozumowana matematyczne. Uczony przeprowadzający dowód twierdzenia aktualizuje więc jedynie potencje tkwiące w aksjomatach i regułach wnioskowania. Naukowiec przestaje być twórcą, a staje się jedynie odkrywcą.

Opisane powyżej rozwiązanie jest nie do przyjęcia dla kogoś, kto odrzuca zdolność języka do reprezentowania myśli. Skoro żadna sekwencja znaków nie gwarantuje przeprowadzenia pożądanego rozumowania, to należy skoncentrować się na myślach i ich treściach. Z nimi utożsamiają intuicjoniści rzeczywistość matematyczną, nie dopuszczając przyjmowania jakichkolwiek nieuzasadnionych założeń filozoficznych. Obiekty te są dostępne umysłowi w doświadczeniu wewnętrznym. Brouwer i jego uczniowie mówią tu o intuicji. Takie poznanie jest bezpośrednie, a tym samym niezależne od ograniczeń i wpływów używanych środków. Doświadczany jest sam obiekt, a nie jego symboliczne przedstawienie kierujące się właściwymi dla siebie prawami. Pewność jaką daje intuicja jest więc większa od uzyskiwanej w matematyce klasycznej, która, będąc zapośredniczona językowo, opiera się na zaufaniu jakim darzymy przyjęte reguły i aksjomaty. Przedstawione poznanie jest oczywiście subiektywne. Podmiot nie uznaje żadnego rozumowania za prawdziwe, o ile sam nie wykona odpowiedniej konstrukcji. Cała matematyka należy więc do umysłu jako jego własny wytwór. Ewentualna genetyczna niezależność byłaby możliwą do wytłumaczenia jedynie ze stanowiska natywistycznego.

Przeciwstawienie matematyki tradycyjnej i intuicjonistycznej jest z konieczności uproszczone. Wskazuje jednak — jak sądzę — na istotną rolę języka w nauce klasycznej. Przestawszy być przezroczystym środkiem przekazu informacji, w znacznym stopniu determinuje jej obraz: kieruje na drogę formalizacji; mediatyzując poznanie matematyczne, staje się fundamentem jego wartości — stopnia pewności i prawdziwości rezultatów.

Konsekwencje zanegowania roli języka, logiki, a tym samym zakwestionowania formalności i dedukcyjności matematyki, sugerują znaczenie interesującego nas medium w powstawaniu zjawiska określanego jako alienacja matematyki. Oczywiście nie implikują one jasnego rozwiązania problemu. Zadanie takie wymaga o wiele głębszej analizy. Przedstawiony materiał pozwala jednak uznać język za konieczny czynnik zachodzenia tego procesu.

Dotychczasowe rozważania dotyczyły między innymi problemu prawdziwości. Nie wskazaliśmy jednak wyraźnie jak pojęcie to rozumieją intuicjoniści. Tradycyjnie funkcjonujące koncepcje, tj. klasyczna i koherencyjna, nie mogą być zaakceptowane przez intuicjonisów. Obie wiążą się z językiem, który — jak twierdzą — nie może odzwierciedlać matematyki. Heyting stara się unikać omawianej kategorii. Przeciwnie Brouwer, nie chcąc pozbawić matematyki tradycyjnej wartości, sugeruje następujące podejście: „(...) Prawda jest jedynie w rzeczywistości, tj. w obecnych i przeszłych przeżyciach świadomości. Między nimi są (...) czyny ((...) akty myśli, matematyczne akty)" [15]. Prawda tkwi w matematyce, w myślowych konstrukcjach doświadczanych przez umysł, a nie w twierdzeniach. Twórca intuicjonizmu proponuje więc przyjęcie pozajęzykowej koncepcji prawdy. Reprezentuje stanowisko bliższe immanentystycznej koncepcji fenomenologów, niż definicjom dotychcząs spotykanym w filozofii matematyki. Przedstawiony pomysł jest spójny z całym programem reform Brouwera i — jak sądzę — możliwy do zaakceptownia przez innych intuicjonistów.

Sceptyczny pogląd na język Brouwer zaprezentował już w 1905 r. w pracy *Life, Art and Mysticism*, to jest jeszcze przed przedstawieniem programu intuicjonistycznej matematyki. Koncepcja języka matematyki stanowi rozwinięcie i konkretyzację tych wczesnych myśli. Biorąc pod uwagę wnioski o pewnej zależności intuicjonistycznej matematyki od tez o jej języku — sądzę — że można sformułować następującą konkluzję: sceptyczny pogląd na język stanowi historyczną i merytorycznie istotną przesłankę intuicjonistycznego rozumienia matematyki. Za naturalną konsekwencję wspomnianego założenia, świadczącą o specyfice tego pojmowania, uznać można podkreślane już odrzucenie intersubiektywnej komunikowalności i sprawdzalności. Jest to bardzo ważna cecha. Matematyka, która zawsze służyła do testowania konieczności pewnych oczywistych zasad, będących podstawą racjonalnych i obiektywnych procedur, poddana przez Brouwera rekonstrukcji przestała być nauką [16]. Zbliżyła się ku sztuce czy religii. Uprawianie jej wymaga pewnego „słuchu", odpowiedniego nastawienia. Odrzucenie tradycyjnie pojmowanej nauko-

---

[15] L. E. J. Brouwer, *Consciousness, Philosophy and Mathematics* [w:] CW, 488. Tł. R. M.

[16] K. Ajdukiewicz, *Zagadnienia i kierunki filozofii. Teoria poznania. Metafizyka*, Warszawa 1983, 71.

wości nie jest jednak tożsame z rezygnacją z prawdziwości, pewności, ścisłości, jasności rozważań. Cechy te uzasadniają nawet uznanie matematyki intuicjonistycznej za bardziej atrakcyjną od klasycznej. Niestety filozofowie nauki pomijają ją w swych rozważaniach. Wypracowany przez nich aparat okazuje się być nieprzydatny do jej analizy. Ponieważ burzy ona standardowe kanony racjonalności, jako irracjonalizm epistemologiczny zostaje usunięta z pola zainteresowań naukoznawczych.

INTUITIONISTIC CONCEPT OF MATHEMATICAL LANGUAGE

Summary

The aim of the paper is to discuss the intuitionistic concept of mathematical language, according to ideas of Brouwer, Heyting and van Dantzig. It is compared to other points of view represented in philosophy of mathematics. Intuitionism, rejecting the role of language in mathematics, is the opposition to formalism. The autor shows, how the intuitionistic staindpoint evolves from Brouwer to Heyting, becoming more realistic. The concept of language, although generating difficulties and unsolved problems, plays the central role in the intuitionistic conception of mathematics, which in turn is an important element of modern philosophy of mathematics. It helps to bring out the role of language in classical mathematics.