Anna Lemańska

Uwagi o pojęciu zbioru

Studia Philosophiae Christianae 28/1, 69-85

1992

Studia Philosophiae Christianae
ATK
28(1992)1

ANNA LEMAŃSKA

UWAGI O POJĘCIU ZBIORU

1. Wstęp. 2. Zbiór w matematyce klasycznej. 3. Niecantorowskie rozumienia zbioru. 4. Uwagi w sprawie istnienia zbiorów.

1. WSTĘP

W obecnej chwili trudno znaleźć pracę matematyczną, w której autor nie stosowałby symboliki teoriomnogościowej i nie posługiwałby się pojęciem zbioru. Co więcej, przy pomocy zbiorów próbuje się definiować inne, tak podstawowe pojęcia matematyczne jak liczba, funkcja czy relacja. Tak więc w matematyce współczesnej pojęcie zbioru zajmuje centralne miejsce, mimo że jego historia jest stosunkowo krótka, gdyż sięga końca lat 70 ubiegłego wieku. Warto jednak pamiętać, iż matematycy, logicy i filozofowie posługiwali się od dawna rozumowaniami mającymi charakter teoriomnogościowy. Rozumowania te dotyczyły jednak tylko przynależności elementu do zbioru i zawierania się zbiorów [1].

Za twórcę teorii mnogości jest uważany Georg Cantor (1845—1918), który rozpoczął systematyczne badania zbiorów nieskończonych. Przez zbiór rozumiał on „każdą wielość, która da się pomyśleć jako jedność, tzn. każdy ogół określonych elementów, który można za pomocą jakiegoś prawa powiązać (myślowo) w całość" [2]. Zbiory złożone z nieskończonej ilości elementów Cantor traktował tak samo jak zbiory skończone. Wprowadził pojęcie równoliczności między zbiorami i badał własności tej relacji. Początkowo wyniki uzyskane przez Cantora nie spotkały się z przychylnym przyjęciem. Pojęcie zbiorów nieskończonych bowiem wzbudzało różne kontrowersje i było eliminowane z rozważań właściwie do końca XIX wieku [3]. Wyjątek stanowią prace G. W. Leibniza,

---

[1] N. Bourbaki, *Elementy historii matematyki*, Warszawa 1980, 37.

[2] Cytuję za: *Logika formalna. Zarys encyklopedyczny z zastosowaniem do informatyki i lingwistyki*, pod red. W. Marciszewskiego, Warszawa 1987, 122.

[3] N. Bourbaki, *dz. cyt.*, 38—40.

w których można znaleźć określenia zbieżne z wyrażonymi później przez Cantora [4]. Obawy matematyków i logików przed wprowadzeniem zbiorów nieskończonych okazały się do pewnego stopnia uzasadnione. Mianowicie w rozwijanej przez Cantora „intuicyjnej" teorii zbiorów pojawiły się antynomie. Przede wszystkim sam Cantor stwierdził, że nie może istnieć zbiór wszystkich liczb porządkowych (paradoks Burali-Forti). Podobnie założenie, że istnieje zbiór wszystkich liczb kardynalnych, czy zbiór wszystkich zbiorów prowadzi do sprzeczności. Antynomia Russella zaś (sformułowana w 1902 r.) ukazała, że nie można przy pomocy dowolnej formuły utworzyć zbioru takich przedmiotów, które mają własność wyrażoną przez tę formułę. Wszystko to zmusiło do rewizji intuicji, jakie wiązano z pojęciem zbioru i do podjęcia prób określenia, czym jest zbiór [5].

Jak się wydaje, szczególne problemy stwarza pojęcie zbioru nieskończonego. Tak więc wysiłki matematyków, mające na celu wyeliminowanie antynomii, skoncentrowały się głównie wokół pojęcia nieskończoności aktualnej. Próby te można podzielić na dwie grupy. Do pierwszej zaliczyłabym te, w których samo rozumienie zbioru pozostaje w zasadzie takie samo jak u Cantora. Przyjmuje się istnienie zbiorów nieskończonych dowolnych mocy. W drugiej grupie są takie teorie, w których zbiór jest rozumiany inaczej niż w cantorowskiej teorii mnogości i gdzie przyjmuje się znaczne ograniczenia dotyczące istnienia zbiorów nieskończonych. W tym artykule przedstawię kilka prób określenia pojęcia zbioru zarówno w matematyce klasycznej jak i w niecantorowskich teoriach. Wskażę też, jakie te próby mogą mieć konsekwencje dla precyzyjniejszego ujęcia zagadnienia, czym jest prawda i istnienie w matematyce.

---

[4] *Logika formalna, dz. cyt.*, 121—122. Warto też dodać, iż również B. Bolzano w swoich *Paradoksach nieskończoności* wyrażał podobne do poglądów Cantora idee (*Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, wybór i opracowanie R. Murawski, Poznań 1986, 115—130).

[5] Przyczyną paradoksów „była niejasność, w bardziej skomplikowanych przypadkach, intuicji łączonej z pojęciem zbioru. W toku polemiki, jaka wywiązała się dokoła antynomii, okazało się wyraźnie, że różni matematycy wiążą istotnie różne intuicje z pojęciem zbioru. Wskutek takiego stanu rzeczy oparcie teorii mnogości wyłącznie na podstawach intuicyjnych stało się niemożliwe". (K. Kuratowski, A. Mostowski, *Teoria mnogości wraz ze wstępem do opisowej teorii mnogości*, Warszawa 1978, 22).

Należy też pamiętać, iż w języku potocznym również używa się słowa „zbiór" oraz bliskoznacznych z nim terminów jak: mnogość, zestaw, kolekcja. Ma ono tu dwa odmienne znaczenia: kolektywne i dystrybutywne. W znaczeniu kolektywnym zbiór jest pewną całością złożoną z przedmiotów. Przykładami zbiorów w tym rozumieniu mogą być stos kamieni składający się z poszczególnych kamieni, czy łańcuch złożony z poszczególnych ogniw. Zbiór w znaczeniu kolektywnym jest na ogół pewnym obiektem dostępnym spostrzeżeniu zmysłowemu. Teorię takich zbiorów rozwinął w mereologii Stanisław Leśniewski (1886—1939). Zbiór w znaczeniu dystrybutywnym jest zaś pewnym abstrakcyjnym tworem składającym się z elementów, które same mogą być obiektami fizycznymi lub też abstrakcyjnymi. Trzeba pamiętać, iż w matematyce używa się pojęcia zbioru wyłącznie w sensie dystrybutywnym. Warto też dodać, iż istotne dla określenia zbioru są tylko jego elementy, a nie mają żadnego znaczenia relacje, jakie między tymi elementami zachodzą.

2. ZBIÓR W MATEMATYCE KLASYCZNEJ

Jedną z pierwszych prób uniknięcia paradoksów było utworzenie przez Russella teorii typów. Teoria ta, ciekawa z teoretycznego punktu widzenia, nie znalazła zastosowania w praktyce matematyków. Znacznie owocniejszą z tego względu okazała się aksjomatyzacja teorii mnogości. Przy pomocy aksjomatów usiłuje się uchwycić najistotniejsze własności zbiorów, z którymi wiąże się intuicje podobne jak w teorii mnogości Cantora.

Najczęściej wykorzystywanym jest układ aksjomatów Zermelo-Fraenkla (ZF). Pojęciami pierwotnymi są: zbiór i dwuargumentowa relacja przynależności elementu do zbioru. Przyjmuje się następujące aksjomaty:

(1) ekstensjonalności — $(x)(y)((z)(z \in x \equiv z \in y) \Rightarrow x = y)$,
(2) pary — $(x)(y)(Ez)(t)(t \in z \equiv (t = x \vee t = y))$,
(3) sumy — $(x)(Ey)(z)(z \in y \equiv (Et)(z \in t \wedge t \in x))$,
(4) zbioru potęgowego — $(x)(Ey)(z)(z \in y \equiv (t)(t \in z \Rightarrow t \in x))$,
(5) zastępowania — dla każdej formuły $H(x, y)$, w której b nie występuje jako zmienna wolna, zachodzi: $(x)(E!y)H(x,y) \Rightarrow (a)(Eb)(y)(y \in b \equiv (Ex)(x \in a \wedge H(x,y)))$,
(6) wyróżniania — dla każdej formuły $H(x)$, w której b nie występuje jako zmienna wolna, zachodzi: $(a)(Eb)(x)(x \in b \equiv x \in a \wedge H(x))$,

(7) zbioru pustego — $(Ex)(y) \sim (y \in x)$,
(8) nieskończoności — $(Ex)(0 \in x \wedge (y)(y \in x \Rightarrow \{y\} \in x))$,
(9) regularności — $(x)(x \neq 0 \Rightarrow ((Ey)(y \in x \wedge x \cap y = 0)))$[6].

Zanotujmy, iż schemat aksjomatów wyróżniania zapewnia, że w systemie nie pojawi się sprzeczność typu antynomii Russella; aksjomat ten bowiem ogranicza możliwości tworzenia zbiorów przedmiotów posiadających określoną własność. Zakłada się, że nie każda cecha wyznacza zbiór; można tylko wydzielić (wyróżnić) z pewnego danego już zbioru podzbiór tych jego elementów, które posiadają interesującą nas własność. Aksjomatyka ta jest nieskończona i niezupełna. Klasa wszystkich zbiorów zostaje przy pomocy aksjomatów pary, sumy, zbioru potęgowego i nieskończoności „zbudowana" począwszy od zbioru pustego. Mamy tu do czynienia wyłącznie ze zbiorami, których elementy są znowu zbiorami i tak skończoną ilość razy (wynika to z aksjomatu regularności) aż do zbioru pustego. W takiej teorii mnogości można zinterpretować liczby naturalne, rzeczywiste i w zasadzie wszystkie pojęcia matematyki klasycznej.

W badaniach metamatematycznych, w których rozważa się własności modeli różnych teorii, w tym teorii mnogości, takie podejście jest często niezbyt wygodne. Używa się więc takich układów aksjomatów, w których jako pojęcie pierwotne występuje klasa. Jest to pojęcie szersze niż pojęcie zbioru, który można określić jako klasę będącą elementem jakiejś innej klasy. Pozostałe klasy nazywa się klasami właściwymi. Jednym z takich systemów aksjomatycznych jest teoria mnogości Morse'a (M). Terminami pierwotnymi są klasa i relacja przynależności elementu do klasy. Przyjmuje się aksjomat ekstensjonalności dla klas, schemat aksjomatów istnienia klas (każda formuła o jednej zmiennej wolnej wyznacza klasę — klasa taka może nie być zbiorem!), aksjomaty zbioru potęgowego, pary, sumy, zastępowania, nieskończoności i regularności dla zbiorów. Aksjomatyka ta jest nieskończona i niezupełna. I w tym przypadku uniwersum wszystkich zbiorów zostaje „wybudowane" nad zbiorem pustym. W systemie M

---

[6] Pierwszy system aksjomatyczny teorii mnogości podał E. Zermelo (1908 r.). Aksjomat zastępowania wprowadzili niezależnie od siebie D. Mirimanoff, T. Skolem, A. A. Fraenkel. Sformułowania aksjomatów można znaleźć na przykład w pracy: K. Kuratowski, A. Mostowski, *dz. cyt.*, 70—75. Do tego systemu aksjomatów dodaje się z reguły aksjomat wyboru, a także przyjmuje się hipotezę *continuum*.

na przykład klasa wszystkich liczb porządkowych jest prawidłowo określonym obiektem, który staje się przedmiotem badania. Wygodniej niż w systemie ZF można badać modele dla teorii mnogości. Warto też dodać, iż w systemie M można udowodnić formalną niesprzeczność teorii ZF. Z tego względu teoria M jest często używana w metamatematyce [7].

Innym systemem aksjomatycznym, w którym jako pojęcie pierwotne obok pojęcia zbioru i relacji przynależności przyjmuje się pojęcie klasy, jest układ aksjomatów Gödla-Bernaysa (GB). Cechą charakterystyczną tego systemu jest skończona ilość aksjomatów. Zamiast bowiem schematów aksjomatów zastępowania i wyróżniania przyjmuje się skończoną ilość aksjomatów konstrukcji klas [8].

Jeszcze innym typem teorii jest teoria mnogości z atomami (ZFA). Terminami pierwotnymi są: zbiór, atom, relacja przynależności elementu do zbioru. W tym przypadku całe uniwersum zbiorów zostaje skonstruowane nad zbiorem atomów przy pomocy aksjomatów: pary, sumy, zbioru potęgowego, nieskończoności. Paradoksu typu antynomii Russella unika się dzięki przyjęciu schematu aksjomatów wyróżniania. System ten pozwala na badanie zbiorów złożonych z obiektów, które same nie zawierają już żadnych elementów, przy czym żaden z nich nie jest zbiorem pustym (jak to ma miejsce w ZF) [9]. Wprowadzenie atomów do teorii mnogości może ułatwiać pewne badania prowadzone nad zbiorami. W szczególności, poprzez konstrukcję tzw. modeli permutacyjnych o wiele łatwiej jest pokazać niezależność aksjomatu wyboru od pozostałych aksjomatów ZFA, niż udowodnić to samo dla teorii

[7] System ten pochodzi od A. Morse'a (1965). Sformułowania aksjomatów znajdują się na przykład w pracy: A. Mostowski, *Konstruktiwnyje mnożiestwa i ich priłożienija*, Moskwa 1973, 16—17.

[8] System ten został stworzony przez J. von Neumanna (1925, 1928 r.), a następnie przeformułowany przez P. Bernaysa oraz K. Gödla, który posłużył się nim przy dowodzie niesprzeczności aksjomatu wyboru i hipotezy *continuum* (K. Gödel, *The consistency of the axiom of choice and the generalized continuum-hipothesis with the axiom of set theory*, Princeton 1940).

[9] Atom jest takim obiektem, który nie posiada żadnego elementu i jest różny od zbioru pustego. Teorię mnogości z atomami badał A. A. Fraenkel, a następnie A. Mostowski. Sformułowania aksjomatów można znaleźć na przykład w: T. J. Jech, *Trieorija mnożiestw i mietod forsinga*, tłum. z ang., Moskwa 1973, 122—125. Istnienie atomów zakłada w swojej pracy M. Davis, *Applied non-standard analysis*, New York—London—Sydney—Toronto 1977, 36, w której tworzy system analizy niestandardowej.

ZF [10]. Z pewnego punktu widzenia teoria ZFA może wydawać się bardziej „naturalna", gdyż w praktyce spotykamy się właściwie ze zbiorami złożonymi z pewnych obiektów, z atomów, a nie ze zbiorami, których elementy są znowu zbiorami itd. W matematyce korzysta się jednak z teorii ZF, gdyż ma mniej terminów pierwotnych. Dla matematyka bowiem w istocie nie ma wielkiego znaczenia „natura" badanych obiektów, a tylko relacje między przedmiotami. Można więc te obiekty tak określić, aby były to zbiory o określonych własnościach [11].

Wszystkie podane teorie aksjomatyczne są istotnie niezupełne, tzn. dodawanie do aksjomatów zdań od nich niezależnych nigdy nie da teorii zupełnej. Najczęściej poszerza się przedstawione teorie mnogości o aksjomat wyboru i hipotezę *continuum*, które są często wykorzystywane w dowodach twierdzeń z analizy, algebry, topologii. Bada się również konsekwencje przyjęcia aksjomatu konstruowalności, bądź aksjomatu determinacji czy innych rozmaitych założeń. Przez ostatnie kilkanaście lat szczególnym zainteresowaniem cieszą się hipotezy dotyczące tzw. dużych liczb kardynalnych.

Przyjmowane we wszystkich teoriach aksjomaty ekstensjonalności zapewniają, iż zbiory są identyczne, gdy mają dokładnie te same elementy. Dzięki temu można udowodnić, że istnieje tylko jeden zbiór pusty, jeden zbiór, który jest sumą danej rodziny zbiorów, jeden zbiór potęgowy dla danego zbioru itp. Ścisłe zaś rozróżnienie między przynależnością elementu do zbioru a zawieraniem się zbiorów powoduje, że termin zbiór jest rozumiany wyłącznie w sensie dystrybutywnym.

W przedstawionych systemach teorii mnogości można utożsamiać zbiór z własnością, którą posiadają elementy tego zbioru. Warto podkreślić, że w każdej z zaprezentowanych teorii mnogości można pokazać istnienie zbiorów o coraz większych mocach (twierdzenie Cantora). W dowodzie korzysta się z aksjomatów nieskończoności i zbioru potęgowego. Przyjmuje się więc, że istnieją w sensie aktualnym zbiory nieskończone, co może wzbudzać różnego rodzaju zastrzeżenia.

---

[10] A. Mostowski wykorzystując modele permutacyjne pokazał, że aksjomat wyboru jest istotnie silniejszy niż zdanie mówiące, że każdy zbiór można liniowo uporządkować (A. Mostowski, *Über die Unäbhangigkeit des Wohlordnungssatzes von Ordnungsprinzip*, Fund. Math. 32 (1939), 201—252).

[11] Opisowi różnych systemów teorii mnogości i pewnym filozoficznym problemom związanym z pojęciem zbioru jest poświęcona praca: A. A. Fraenkel, Y. Bar-Hillel, A. Levy, *Foundations of Set Theory*, Amsterdam 1973.

Utożsamienie zbioru z własnością może w praktycznych zastosowaniach klasycznej teorii mnogości prowadzić do pewnych niejasności, gdyż nie zawsze daje się w jednoznaczny sposób stwierdzić, czy jakiś przedmiot posiada daną własność, czy też nie. Trudności te usuwa rozwijana od lat sześćdziesiątych teoria zbiorów rozmytych. Przez zbiór rozmyty rozumie się funkcję ustalającą stopień przynależności danego przedmiotu do zbioru. Teoria ta zyskuje sobie coraz większe praktyczne zastosowania [12]; jednakże samo rozumienie istoty zbioru jest tu takie samo jak w klasycznej teorii mnogości.

3. NIECANTOROWSKIE ROZUMIENIA ZBIORU

Zdaniem intuicjonistów [13], trudności pojawiające się przy próbach określenia, czym jest zbiór w matematyce klasycznej, antynomie, które powstają, są spowodowane stosowaniem logiki klasycznej do zbiorów nieskończonych. Z tego też względu w intuicjonizmie zostają odrzucone pewne prawa logiki klasycznej. Inaczej też ujmuje się wzajemne związki między matematyką a logiką. Odmiennie również jest rozumiana istota matematyki. Według intuicjonistów matematyka jest swobodnym tworem umysłu matematyka. Twórczość ta opiera się na intuicji liczby naturalnej. Język, który odgrywa w matematyce klasycznej doniosłą rolę, dla matematyka-intuicjonisty nie ma w zasadzie żadnego znaczenia, służy mu tylko do zakomunikowania konstrukcji innym matematykom, natomiast nie ma żadnego wpływu na samo tworzenie matematyki. Istotne dla intuicjonisty jest przyjęcie zasady, że wszystkie obiekty muszą być przez niego w efektywny sposób skonstruowane z przedmiotów, które ma do dyspozycji w danym momencie. Istnienie więc zostało powiązane w ścisły sposób z możliwością wykonania konstrukcji. Często nawet mówi się, że dla intuicjonisty „istnieć" jest równoznaczne z „być skonstruowanym". Stąd odrzucenie prawa wyłączonego środka, podwójnego przeczenia, a co za tym idzie, nie przyjmowanie jako prawomocnych dowodów nie wprost.

Takie rozumienie matematyki powoduje, że intuicjoniści nie przyjmują istnienia nieskończoności aktualnej. Możliwa jest tylko nieskończoność potencjalna. W ten sposób z matematy-

---

[12] Pojęcie zbioru rozmytego zostało wprowadzone przez L. A. Zadeha w 1965 r.

[13] Podstawy dla intuicjonizmu stworzył L. E. Brouwer. A. Heyting sformalizował logikę intuicjonistyczną (1930 r.).

ki zostały wyłączone zbiory aktualnie nieskończone. Zamiast o zbiorach mówi się o ciągach, które potencjalnie mogą składać się z nieskończonej ilości elementów. W zasadzie kolejne wyrazy ciągu muszą być skonstruowane przy pomocy pewnego prawa. Musi być podana efektywna konstrukcja poszczególnych elementów ciągu. W takim ujęciu ciąg może być oczywiście do pewnego stopnia utożsamiony z efektywnym procesem jego konstrukcji. Od tej zasady Brouwer dopuszczał jednak odstępstwo, wprowadzając tzw. ciągi swobodnych wyborów, dla których nie ma z góry narzuconego prawa konstrukcji poszczególnych elementów. Sposób określenia następnego wyrazu może być zupełnie inny niż wyrazów poprzednich, w szczególności może zależeć od przypadku. Taki ciąg jest więc nam dany zawsze tylko poprzez swój skończony początkowy odcinek. Ciągi swobodnych wyborów były potrzebne przy konstrukcji *continuum* liczb rzeczywistych. Przy ich pomocy można uniknąć pewnych trudności, które powstają przy ścisłym trzymaniu się zasady, że każdy obiekt musi być w efektywny sposób skonstruowany z obiektów już istniejących. Tak więc obok liczb rzeczywistych, które są konstruowane przy pomocy pewnego prawa, pewnej zasady, dopuszcza się takie punkty *continuum*, które znajdują się jakby nieustannie w procesie tworzenia przy pomocy ciągów swobodnych wyborów. *Continuum* nie jest więc jakimś zamkniętym obiektem, składającym się z punktów, tak jak w matematyce klasycznej, lecz jest ciągle w procesie stawania się, rozwoju. Takie rozumienie *continuum* liczb rzeczywistych ma oczywiście ogromne znaczenie dla uprawiania analizy, topologii, algebry. Wyniki, które uzyskuje się w matematyce intuicjonistycznej, są odmienne niż w klasycznej. Na przykład wszystkie funkcje, których wartość jest określona dla dowolnej liczby rzeczywistej, są funkcjami ciągłymi. Trzeba też pamiętać, iż pewne zagadnienia rozpatrywane w matematyce klasycznej w intuicjonizmie tracą swój sens (na przykład hipoteza *continuum*), co powoduje znaczne zubożenie problemów, które mogą być rozwiązywane w matematyce intuicjonistycznej.

W takim „elementarnym" uprawianiu matematyki intuicjonistycznej można w zasadzie obyć się bez pojęcia zbioru. Intuicjoniści wprowadzają jednak dwa pojęcia, na które można patrzeć jak na konstruktywistyczny odpowiednik zbioru. Bliskie klasycznemu sposobowi wyznacznia zbiorów jest określanie gatunku (*species*). Gatunek zostaje wyznaczony poprzez podanie charakterystycznej własności jego elementów, które już wcześniej zostały skonstruowane. Natomiast zakres (*spread*) jest wyznaczony przez efektywną procedurę, która działa na skończonych ciągach złożonych z liczb naturalnych. Procedura ta wybiera skończone ciągi w taki sposób, że zostaje utworzone z nich drzewo. Nieskończony ciąg, którego każdy skończony odcinek początkowy znajduje się w tym drzewie, jest zakresem [14].

Przyjęcie w intuicjonizmie istnienia tylko nieskończoności potencjalnej powoduje, że w każdym momencie naszej konstrukcji nowego obiektu mamy do czynienia jedynie ze skończonym jego fragmentem. Do utworzonej już części zawsze można dołączyć nowy element. Tak więc ciągi, zakresy oraz *continuum* można utożsamiać z procesem ich tworzenia.

Jeszcze dalej niż intuicjoniści w ograniczeniach dotyczących nieskończoności posuwają się finityści, którzy odrzucają istnienie nie tylko nieskończoności aktualnej, ale również potencjalnej. W konsekwencji, uznają tylko istnienie zbiorów skończonych. Na marginesie warto dodać, że skrajne poglądy w tym zakresie głoszą ultrafinityści, dla których nawet nie istnieją duże liczby naturalne rzędu $10^{10^{10}}$. Z tego też względu można mówić tylko o zbiorach złożonych ze skończonej i to niedużej liczby elementów [15].

Odmiennie niż w matematyce klasycznej czy intuicjonistycznej jest rozumiany zbiór w teorii rozwijanej przez czeską szkołę matematyków. Dopuszczają oni mianowicie istnienie tzw. półzbiorów (*semisets*). Są to klasy, które są podklasami zbiorów. W klasycznej teorii mnogości można udowodnić, że takie podklasy muszą być zbiorami. Matematycy czescy przyjmują, że istnieją półzbiory, które są klasami właściwymi, nie są zbiorami [16]. Jako argument za przyjęciem istnienia półzbiorów może służyć choćby następujący przykład. Z teorii ewolucji wiadomo, że istnieje skończony ciąg zaczynający się od pew-

---

14 A. A. Fraenkel, Y. Bar-Hillel, A. Levy, *dz. cyt.*, 257—258.

15 Takie poglądy głosi A. S. Jesenin-Volpin, *Le programme ultra-intuitioniste des fondements des mathématiques*, w: *Infinistic Methods. Proceedings of the Symposium on Foundations of Mathematics. Warsaw, 2—9, September 1959*, Warszawa 1961, 201—223.

16 Teorii półzbiorów obszerną monografię poświęcili P. Vopenka, P. Hájek, *The theory of semisets*, Prague 1972. Teorię zbiorów Cantora można traktować jako rozszerzenie teorii półzbiorów o aksjomat mówiący, że każdy półzbiór jest zbiorem. Jest to rozszerzenie konserwatywne, tzn. każda własność dotycząca zbiorów jest dowodliwa w teorii zbiorów wtedy i tylko wtedy, gdy jest dowodliwa w teorii półzbiorów.

nej małpy Charlie, a kończący się na Charlsie Darwinie taki, że każdy element tego ciągu jest ojcem elementu następnego. Wszystkie małpy z tego ciągu nie mogą utworzyć zbioru. Gdyby bowiem tworzyły zbiór, musiałby posiadać on ostatni element. Ponieważ jednak syn małpy jest również małpą, więc w takiej sytuacji sam Darwin byłby małpą [17].

Pojęcie półzbioru występuje także w alternatywnej teorii mnogości (AST), stworzonej również przez czeską szkołę matematyków. W teorii tej mamy do czynienia ze zbiorami z uniwersum, które składa się ze zbiorów skonstruowanych ze zbioru pustego. Przyjmuje się następujące aksjomaty dla zbiorów:

(1) ekstensjonalności,
(2) zbioru pustego,
(3) konstrukcji zbiorów — $(x)(y)(Ez)(u)(u \in z \equiv (u \in x \vee u = y))$,
(4) schemat indukcji — dla każdej teoriomnogościowej formuły o jednej zmiennej wolnej zachodzi: $F(0) \wedge (x)(y)(F(x) \Rightarrow F(x \cup \{y\})) \Rightarrow (x)F(x)$,
(5) regularności — dla każdej teoriomnogościowej formuły $F(x)$ zachodzi: jeżeli $(Ex)F(x)$, to $(Ex)(F(x) \wedge ((y \in x) \sim F(y)))$.

Ten fragment alternatywnej teorii mnogości nie różni się od teorii mnogości ZF dla zbiorów skończonych. Nietrudne wnioski z przyjętych aksjomatów mówią, że podstawowe operacje na zbiorach w wyniku również dają zbiory.

Obok zbiorów przedmiotem badania są klasy, czyli obiekty składające się ze zbiorów i wyznaczone przy pomocy własności zbiorów. Przyjmuje się następujące aksjomaty dla klas:

(6) istnienia klas — dla każdej własności $H(x)$ zbiorów z uniwersum zbiorów istnieje klasa $\{x: H(x)\}$
(7) każdy zbiór jest klasą,
(8) ekstensjonalności dla klas.

Oczywiście istnieją klasy właściwe, które nie są zbiorami. Należy w tym miejscu zauważyć, iż klasy właściwe w alternatywnej teorii mnogości mogą być zbiorami z punktu widzenia klasycznej teorii mnogości. Wszystkie klasy tworzą tzw. rozszerzone uniwersum. Oparta na wymienionych 8 aksjomatach teoria jest równoważna teorii klasycznej.

Istotną różnicę między teorią mnogości typu cantorowskiego a alternatywną teorią mnogości wprowadza aksjomat (9) orzekający, że istnieją właściwe półzbiory.

---

[17] P. Vopenka, *Matiematika w altiernatiwnoj tieorii mnożiestw*, Moskwa 1983, 35—36.

Teoria mocy w alternatywnej teorii mnogości zasadniczo różni się zarówno od klasycznej jak i intuicjonistycznej. Przez klasę skończoną rozumie się taką klasę, której wszystkie podklasy są zbiorami. Klasy skończone są więc zbiorami i nie mogą zawierać półzbiorów. Klasa, która nie jest skończona, jest nieskończona. W szczególności wszystkie klasy właściwe są nieskończone. W alternatywnej teorii mnogości przyjmuje się istnienie tylko dwóch mocy nieskończonych: przeliczalnej i nieprzeliczalnej. Klasa A jest przeliczalna, gdy jest nieskończona, liniowo uporządkowana oraz dla każdego $x \in A$ klasa $\{y \in A: y < x\}$ jest skończona. Dla klas przeliczalnych przyjmuje się następujący aksjomat (10) o przedłużaniu funkcji — dla każdej przeliczalnej funkcji F istnieje funkcja-zbiór f taka, że $F \leqslant f$. Z określenia mocy przeliczalnej i z tego aksjomatu wynika, że klasy przeliczalne są półzbiorami właściwymi.

Wszystkie pozostałe klasy nieskończone są nieprzeliczalne. W szczególności zbiory zawierające półzbiory są nieprzeliczalne. Aczkolwiek można przyjąć, iż istnieją różne moce nieprzeliczalne, to jednak wystarczy ograniczyć się tylko do jednej. Gwarantuje to następujący aksjomat (11), jeżeli X i Y są nieprzeliczalne, to są równoliczne [18]. Za motywację dla takiego rozumienia klas nieskończonych uważa się nieprecyzyjne pojęcie aktualnej nieskończoności używane w matematyce klasycznej. Zaobserwowano również, że zbiory skończone o bardzo dużej liczbie elementów mogą w pewnych sytuacjach „zachowywać się" jak zbiory nieskończone.

Opisany system teorii mnogości można zinterpretować w ZF. Jest więc niesprzeczny, o ile ZF jest niesprzeczna. Dowód polega na skonstruowaniu ultrapotęgi i rozszerzeniu jej o obiekty, które będą klasami właściwymi w sensie alternatywnej teorii mnogości. Konstrukcja tego modelu może sugerować podobieństwo między alternatywną teorią mnogości a metodami niestandardowymi klasycznej matematyki. Jednakże zamierzeniem twórców alternatywnej teorii mnogości nie była formalizacja metod niestandardowych, a nowe zupełnie podejście i stworzenie odmiennej teorii mnogości, w której zbiór jest inaczej rozumiany, niż w cantorowskiej teorii mnogości [19].

---

[18] Aksjomaty alternatywnej teorii mnogości wraz z wnioskami z nich wypływającymi są zawarte *tamże*, 20—56.

[19] A. Sochor. *The alternative set theory*, w: *Set theory and hierarchy theory. Conference Bierutowice 1975*, Berlin 1976, 261.

Alternatywna teoria mnogości może stanowić podstawę dla budowania matematyki. W rozszerzonym uniwersum określa się podstawowe struktury matematyczne takie jak: liczby naturalne, wymierne, rzeczywiste, bada się ciągłość i inne ważne pojęcia matematyczne.

Matematyka intuicjonistyczna i alternatywna teoria mnogości są nieklasycznymi propozycjami ujęcia matematyki. Wprawdzie nie zastąpiły teorii mnogości cantorowskiej, lecz dają inne spojrzenie na podstawowe pojęcia matematyczne, a także same stanowią bardzo ciekawy obszar badań[20].

4. UWAGI W SPRAWIE ISTNIENIA ZBIORÓW

Jak widzieliśmy, w matematyce współczesnej nie funkcjonuje tylko jedno ściśle określone pojęcie zbioru. To tak bardzo podstawowe pojęcie jest rozmaicie rozumiane i łączy się z nim różne intuicje. Jak się wydaje, w trzech przedstawionych podejściach (klasycznym, intuicjonistycznym, alternatywnym) istotne różnice dotyczą rozumienia nieskończoności. Rzutuje to w konsekwencji na sposób budowania teorii zbiorów, które nie są skończone. Pojęcie zbioru skończonego, poza różnicami dotyczącymi samego sposobu jego istnienia oraz określania własności jego elementów, jest w zasadzie w każdym z tych ujęć takie samo.

W intuicjonizmie w ogóle nie dopuszcza się możliwości aktualnego istnienia obiektu, który składałby się z nieskończonej ilości elementów. Każdy przedmiot matematyczny (ciąg, zakres, *continuum*) jest nam dany tylko w skończonych swoich fragmentach, a nigdy jako całość. W alternatywnej teorii mnogości sytuacja jest bardziej skomplikowana. Ta teoria różni się zarówno od klasycznej jak i intuicjonistycznej. Opiera się, podobnie jak teoria mnogości typu cantorowskiego, na logice klasycznej i jest zbudowana w postaci teorii aksjomatycznej, co umożliwia jej badanie środkami używanymi w teorii mo-

---

[20] Warto jeszcze wspomnieć o systemach Quine'a, które były szeroko dyskutowane, lecz nie próbowano w oparciu o nie budować matematyki. W systemie NF występuje schemat istnienia zbiorów dla formuł stratyfikowanych. Quine wprowadza także wszystko obejmującą klasę V i dopełnienie — X każdej klasy X. W teorii Quine'a można udowodnić, że istnieją zbiory, które mają tę samą moc, co ich zbiór potęgowy. Jest to wyraźne odejście od teorii cantorowskiej (W. van O. Quine, *Logika matematyczna,* Warszawa 1974, 161—164).

deli i porównywanie z teoriami klasycznymi[21]. Należy też zwrócić uwagę, że używa się w niej wprawdzie terminów wziętych z teorii mnogości klasycznej — na przykład nieskończoność, klasa przeliczalna, nieprzeliczalna — mają one jednak tu odmienne znaczenie. W szczególności półzbiór ma następującą własność: nie można określić jego ostatniego elementu, jednocześnie zawiera się w jakimś zbiorze (nieprzeliczalnym), który z punktu widzenia klasycznej teorii mnogości może być skończony. Przykłady półzbiorów, które podają autorzy[22], mogą nasuwać pewne analogie z pojęciem zbioru rozmytego. W podawanych bowiem przykładach powstają trudności z wymienieniem wszystkich elementów posiadających daną własność. Teoria zbiorów rozmytych usuwa tę trudność poprzez wprowadzenie stopnia przynależności elementu do zbioru, alternatywna teoria mnogości przez określenie półzbioru.

Jak się wydaje, zarówno w intuicjonizmie, jak i alternatywnej teorii mnogości próbuje się aproksymować nieskończoność poprzez zbiory skończone, dążąc w ten sposób do usunięcia paradoksów klasycznej teorii mnogości. Teorie mnogości oparte na cantorowskim rozumieniu zbioru wystarczają do zinterpretowania w zasadzie wszystkich obecnie rozwijanych teorii matematycznych[23]. W tym sensie teoria mnogości ZF czy M jest teorią podstawową. Jednocześnie, jak już wspomniałam, każda aksjomatyczna teoria zbiorów jest istotnie niezupełna, a układy aksjomatów są wzajemnie niezależne. Możemy więc budować rozmaite teorie mnogości. W szczególności, przyjmując własności zbiorów wyrażone na przykład w aksjomatach ZF, daje się utworzyć nieskończonie wiele rozmaitych teorii, w których pewne własności zbiorów będą się między sobą różniły. Wybór między konkurencyjnymi teoriami będzie w znacznym stopniu zależał od matematyka, od tego do jakiego celu ma mu dana teoria służyć.

---

[21] Na przykład teorię M bez aksjomatu nieskończoności daje się zinterpretować w AST, AST z kolei w ZF oraz w M z wyłączonym aksjomatem potęgowym. Ta ostatnia teoria daje się zinterpretować w AST (P. Vopenka, *dz. cyt.*, 147).

[22] *Tamże*, 36.

[23] Wyjątek od tej reguły może stanowić teoria kategorii, która jest uważana za teorię ogólniejszą i bardziej podstawową niż teoria mnogości. Należy także pamiętać, że przy określaniu jakichś pojęć przy pomocy zbiorów ujmujemy tylko część intuicji, które wiążą się z tym pojęciem, gdyż taka interpretacja ujmuje tylko formalne własności badanego pojęcia i jego najważniejsze relacje z innymi pojęciami.

W odniesieniu do teorii mnogości traci też sens pojęcie kategoryczności w znaczeniu klasycznym [24] — uniwersum zbiorów nie istnieje dla nas jako pewna całość, mamy dostęp tylko do pewnych jego fragmentów. Jak się wydaje, za taki stan rzeczy może być odpowiedzialna nieograniczona możliwość stosowania aksjomatu potęgowego. Przy jego pomocy można otrzymywać zbiory o coraz większych mocach nieskończonych oraz zbudować hierarchię zbiorów [25]. Hierarchia ta, jakkolwiek konstruowana przy pomocy tylko aksjomatu zbioru potęgowego, aksjomatu sumy i aksjomatu nieskończoności ze zbioru pustego, nie daje nam w zasadzie wielu możliwości wniknięcia w strukturę wewnętrzną, a co za tym idzie, zbadania własności zbiorów. Warto w tym miejscu dodać, że pomysł Gödla, wykorzystany w dowodzie niesprzeczności hipotezy *continuum* i aksjomatu wyboru, opierał się na wyraźnym określeniu elementów potęgi danego zbioru. Aksjomat potęgowy nie został wyeliminowany, ale wskazano, jak mają wyglądać podzbiory danego zbioru (oczywiście chodzi tu o podzbiory zbioru nieskończonego). Ten zabieg pozwolił udowodnić, że w uzyskanym uniwersum zachodzi hipoteza *continuum* oraz aksjomat wyboru.

Jak wspomniałam, teoria mnogości uchodzi za teorię podstawową, do której można sprowadzić wszystkie pozostałe teorie. Jednocześnie sama ta teoria jest niezupełna, nie jesteśmy w stanie zbadać wszystkich interesujących nas własności zbiorów, co więcej, mamy dużą dowolność w budowaniu rozmaitych teorii mnogości. Taki stan rzeczy powoduje, że nasze intuicje związane z prawdziwością twierdzeń matematycznych, a także z istnieniem obiektów matematycznych wydają się nie nie mieć żadnego punktu odniesienia. Prawdziwość staje się bowiem pojęciem względnym, gdyż będzie zależała od tego,

---

[24] Teoria jest kategoryczna w znaczeniu klasycznym, jeżeli posiada tylko jeden model z dokładnością do izomorfizmu. Arytmetyka Peano ze standardową interpretacją pojęcia zbioru i przynależności elementu do zbioru traktowana jako teoria rzędu drugiego jest kategoryczna. Na jeszcze inne aspekty zwracają uwagę A. A. Fraenkel, Y. Bar-Hillel, A. Levy. Mianowicie w odniesieniu do zbioru liczb naturalnych istnieje zupełna teoria (arytmetyka Skolema), która posiada dobrze określone pojęcie semantycznej prawdziwości. Natomiast nie istnieje ogólnie akceptowana definicja prawdy dla sformalizowanej teorii mnogości (A. A. Fraenkel, Y. Bar-Hillel, A. Levy, *dz. cyt.*, 318—319).

[25] Ponieważ aksjomat potęgowy jest niezależny od pozostałych aksjomatów ZF można rozważać teorię mnogości bez tego aksjomatu, czy z ograniczoną jego wersją.

w ramach jakiego systemu teorii mnogości dane zdanie jest rozpatrywane. Sytuacja taka jest szczególnie niedogodna w przypadku teorii, które mają za zadanie opisywać pewne podstawowe dziedziny obiektów matematycznych jak na przykład liczby rzeczywiste czy naturalne. Rozwiązania pewnych problemów będą bowiem zależały od tego, jakie przyjmie się dodatkowe hipotezy. Najwłaściwsza wydaje się więc być na gruncie zaksjomatyzowanych teorii matematycznych koherencyjna definicja prawdy. Podobne uwagi można odnieść i do pojęcia istnienia, gdyż zachodzi konieczność odwołania się przy ustalaniu, czy jakiś obiekt istnieje, do uniwersum zbiorów (na przykład istnienie zbioru niemierzalnego w sensie Lebesgue'a).

Opisane problemy z rozumieniem prawdy i istnienia w matematyce wynikają, jak się wydaje, z ograniczeń języka sformalizowanego teorii mnogości oraz przyjęcia, że istnieją zbiory nieskończone dowolnych mocy. W matematyce intuicjonistycznej oraz w alternatywnej teorii mnogości próbuje się wyeliminować te trudności poprzez różnorodne ograniczenia nakładane na pojęcie nieskończoności. Teorie te stawiają sobie za zadanie opisywanie jednej dziedziny obiektów matematycznych. W tym kontekście na teorie nieklasyczne można patrzeć jak na teorie, dające oparcie dla klasycznego rozumienia prawdy i istnienia w matematyce. Przyjmowane jednak ograniczenia i stosowane metody powodują, iż uprawianie matematyki w ramach wspomnianych systemów znacznie odbiega od aktualnej praktyki matematyków. Także zakres problemów, które może rozwiązać matematyka intuicjonistyczna, czy matematyka uprawiana w ramach alternatywnej teorii mnogości jest znacznie węższy niż w matematyce klasycznej.

Na zakończenie warto jeszcze przyjrzeć się problemowi dotyczącemu sposobu istnienia zbiorów. Jak się wydaje, zagadnienie to zależy w głównej mierze od rozumienia istoty matematyki. Badania nad teorią mnogości nie mogą tu wiele pomóc, chociaż dają pewne podstawy dla prób wyeliminowania niektórych opinii na ten temat. Intuicjonizm stworzył własną wizję matematyki, w myśl której matematyka jest swobodnym tworem umysłu ludzkiego. Tak więc i istnienie obiektów matematycznych jest w takim ujęciu powiązane z umysłem człowieka. Natomiast przy klasycznym rozumieniu zbioru, jak i w alternatywnej teorii mnogości, zagadnienie istnienia zbiorów nie ma już tak jednoznacznego rozwiązania.

Klasycznie problem istnienia zbiorów łączy się z problemem uniwersaliów. Platonizm uważa się za współczesną wersję realizmu skrajnego, a intuicjonizm za formę konceptualizmu[26]. Sprawa jednak wydaje się być bardziej skomplikowana. W klasycznym sporze o uniwersalia mówi się o sposobie istnienia pojęć ogólnych. Te rozwiązania mogłyby więc mieć zastosowanie do zbiorów złożonych z indywiduów. Natomiast w matematyce mamy do czynienia ze zbiorami, których elementy są obiektami matematycznymi. Same te przedmioty nie mają zaś jasnego statusu ontologicznego. Poza tym w cantorowskiej teorii mnogości tworzy się zbiory, których elementami są podzbiory innego zbioru i tego typu konstrukcja może być przeprowadzana bez żadnych ograniczeń dowolnie wiele razy. Z punktu widzenia matematyka nie ma dla niego większego znaczenia, czy rozpatruje zbiór złożony z jakichś elementów (na przykład liczb naturalnych, które zresztą też można uważać za zbiory), czy też zbiór, który powstaje przez wielokrotne wykonanie operacji brania wszystkich podzbiorów poczynając od zbioru wyjściowego. Trzeba też pamiętać, że z reguły interesujące dla matematyka są zbiory nieskończone i to dowolnych mocy. Tak więc, jak się wydaje, przeniesienie sporu o uniwersalia na grunt matematyki (teorii mnogości) powinno być poprzedzone takim jego sformułowaniem, by obejmował swym zakresem dowolne zbiory.

Powstaje też jeszcze jeden ważny problem. Czy sposób istnienia jakiegoś obiektu matematycznego jest taki sam jak istnienie zbioru, który ten obiekt reprezentuje? Odpowiedź na to pytanie nie wydaje się być łatwa. Napotykamy tu bowiem rozmaite trudności. Przede wszystkim ten sam obiekt matematyczny może być reprezentowany przez rozmaite zbiory. Poza tym przedmioty matematyczne znajdują się na różnych poziomach abstrakcji. Automatyczne porównywanie tych poziomów ze stopniami hierarchii zbiorów nie wydaje się właściwe. Tak więc zagadnienia istnienia przedmiotów matematycznych nie można redukować tylko do problemu istnienia zbiorów.

---

[26] Czynią tak na przykład J. Słupecki, L. Borkowski, *Elementy logiki matematycznej i teorii mnogości*, Warszawa 1984, 280—283.

SOME REMARKS CONCERNING THE NOTION OF SET

Summary

The aim of this paper is to present and discuss three different theories of sets. They are: 1) axiomatic systems of set theory based on the Cantor's notion of set, 2) intuitionistic mathematics, 3) the alternative set theory. The main difference between these theories is related to the notion of the infinite.