Anna Lemańska

Matematyka - metamatematyka — filozofia matematyki

Studia Philosophiae Christianae 28/2, 231-239

1992

Studia Philosophiae Christianae
ATK
28(1992)2

ANNA LEMAŃSKA

MATEMATYKA — METAMATEMATYKA — FILOZOFIA MATEMATYKI

1. WSTĘP

Rozwój nauk szczegółowych zmusza do przeprowadzania coraz wnikliwszych analiz metod, jakimi posługują się naukowcy. Bada się również teorie i pojęcia występujące w naukach. Te zagadnienia stają się przedmiotem badania metodologii i filozofii poszczególnych nauk i to zarówno przyrodniczych, jak i humanistycznych. Obie te dyscypliny filozoficzne rozwijają się i doskonalą swoje metody badań.

Wśród nauk szczegółowych specjalne miejsce zajmuje matematyka. Wyróżnia się ona metodą i przedmiotem swoich badań. Celem artykułu jest próba określenia przedmiotu filozofii matematyki oraz metod jej budowania i uprawiania. Jak się wydaje, zadanie to nie może być rozwiązane przez przeniesienie na teren filozofii matematyki rozwiązań z zakresu filozofii innych dyscyplin naukowych. Dzieje się tak dlatego, gdyż specyfika matematyki powoduje, że między metodologią i filozofią matematyki a samą matematyką zachodzą inne relacje, niż ma to miejsce w odniesieniu do pozostałych dyscyplin naukowych. Problem komplikuje jeszcze rozwój w XX w. metamatematyki oraz metalogiki i z tym związane próby ograniczenia problemów filozoficznych matematyki do tych, które dadzą się rozwiązać w metamatematyce. W artykule zostanie w związku z tym zaproponowana pewna linia demarkacyjna między metamatematyką a filozofią matematyki.

Można ogólnie określić, iż matematyka współczesna bada systemy obiektów matematycznych oraz relacje i funkcje między tymi obiektami. Obecnie badania samych relacji i funkcji stały się pierwszoplanowe, tak iż przedmioty, między którymi te relacje czy funkcje zachodzą, zeszły na plan dalszy, czy w ogóle mogą zostać pominięte. Stąd mówi się często, iż przedmiotem matematyki są struktury matematyczne. W tym miejscu nie będę się zajmować stwierdzeniem, czy takie spojrzenie na matematykę ujmuje w adekwatny sposób jej istotę, nie to bowiem jest celem niniejszego artykułu. Sam przedmiot badania nie stanowi jeszcze o szczególnym miejscu matematyki. To, co wyróżnia matematykę i logikę spośród innych nauk, to metoda aksjomatyczno-dedukcyjna. Metoda ta, jak wiadomo, polega na uzyskiwaniu z przyjętych aksjomatów innych własności badanych obiektów przy pomocy rozumowań dedukcyjnych. W aksjomatach zawarte są podstawowe własności danej struktury. Metoda aksjomatyczno-dedukcyjna stanowi podstawę do jeszcze innego spojrzenia na matematykę, a mianowicie jako na szereg teorii aksjomatycznych, dla których aspekt przedmiotowy (a więc „natura" badanych obiektów) nie ma większego znaczenia.

Matematyka więc stwarza swój własny, specyficzny obszar badań metateoretycznych. Na początku XX w. postawiono szereg pytań dotyczących metody matematyki. Konieczna stała się refleksja nad specyficznym poznaniem i przedmiotem matematyki [1].

2. METAMATEMATYKA

W zasadzie do XIX wieku matematyka i logika rozwijały się niezależnie od siebie. Dopiero w swoich pracach Boole potraktował funktory zdaniotwórcze jako działania w algebrze [2]. Doprowadziło to do rozwoju logiki symbolicznej i włączenia jej w obręb matematyki. Logika dostarczyła narzędzi matematykom, a jednocześnie sama zaczęła wykorzystywać matematykę. Pojawienie się antynomii w teorii mnogości Cantora zapoczątkowało z kolei całą serię prób uprawomocnienia wiedzy matematycznej i oparcia matematyki na niewzruszonych podstawach. Jedną z nich była propozycja D. Hilberta, aby sformalizować całą matematykę, a następnie wykazać, że taki system jest niesprzeczny. Program Hilberta, chociaż w swej pierwotnej wersji nie może być zrealizowany, doprowadził do utworzenia nowego obszaru badań matematyki, którego przedmiotem stały się języki i teorie sformalizowane. Swój program Hilbert określił jako teorię dowodu lub metamatematykę.

Obecnie przez metamatematykę rozumie się badania własności struktur i sytemów dedukcyjnych, a także relacji między teoriami sformalizowanymi i ich modelami. W szczególności metamatematyka zajmuje się problemami dotyczącymi natury i kryteriów poprawności dowodów matematycznych [3]. Tak więc przedmiotem metamatematyki są języki i teorie sformalizowane, a metodą — metoda dedukcyjna.

---

[1] Według S. Kamińskiego (*Pojęcie nauki i klasyfikacja nauk,* Lublin 1981) „nauka jawi się jako: język, poznanie, przedmiot" (s. 19). „Z tym rozróżnieniem jest związany podział problematyki filozoficznej, która dotyczy nauki. Można bowiem rozpatrywać zagadnienia epistemologiczne związane z poznaniem nauki, pytać się o pozycję nauki wśród innych typów wiedzy, badać źródła i granice poznania naukowego oraz jaką rzeczywistością jest nauka" (s. 22). „Badania typu formalnego obejmują logikę nauki, semiotykę logiczną, metodologię nauk. Natomiast badania typu filozoficznego koncentrują się na nauce jako na pewnym bycie lub poznaniu, dla którego szuka się jego ostatecznych racji i uwarunkowań" (s. 33). „Filozofię nauki można rozumieć w znaczeniu szerszym. Są to rozważania o charakterze ogólnym należącym do metodologii, teorii poznania naukowego, ontologii przedmiotu nauki, logiki języka naukowego, teorii kultury. Znaczenie węższe to teoria nauki jako bytu, teoria poznania naukowego" (s. 37). W tym artykule przez filozofię nauki będę rozumieć to, co S. Kamiński nazywa filozofią nauki w znaczeniu szerszym.

[2] Pewne podobne koncepcje formułował G. Leibniz.

[3] *Logika formalna. Zarys encyklopedyczny z zastosowaniem do informatyki i lingwistyki,* pod red. W. Marciszewskiego, Warszawa 1987, 432—434.

Ze względu na tę metodę metamatematyka jest nauką formalną, w której wykorzystuje się logikę oraz matematykę.

Metamatematyka dzieli się na syntaktykę systemów dedukcyjnych i na ich semantykę. Obecnie zatarte są granice między logiką formalną a syntaktyką systemów dedukcyjnych, gdyż na rachunek zdań czy predykatorów można patrzeć jak na teorie sformalizowane. Jednocześnie bez logiki formalnej nie byłoby w ogóle możliwe badanie teorii sformalizowanych.

Metoda dedukcyjna i wykorzystywanie matematyki powodują z kolei, iż metamatematyka jest uważana za jeden z działów matematyki (podobnie jak logika formalna). W badaniach syntaktycznych stosuje się algebrę (na przykład algebrę Boole'a, teorię krat), topologię (na przykład teorię topologicznych algebr Boole'a), teorię mnogości. Semantyka systemów dedukcyjnych przerodziła się w rozbudowany, samodzielny dział matematyki — w teorię modeli, w której również wykorzystuje się rozmaite wyniki uzyskane we wspomnianych wyżej działach matematyki, zwłaszcza w teorii mnogości.

Na badania metamatematyczne trzeba też patrzeć w szerszym kontekście. Szczególną bowiem rolę przy badaniu teorii sformalizowanych i ich modeli pełni teoria mnogości. Drugą centralną teorią w matematyce współczesnej, która ma istotne znaczenie przy badaniu własności teorii sformalizowanych, jest arytmetyka teoretyczna. Obie te teorie, łącznie z metamatematyką, są często określane jako podstawy matematyki. Zakresy badań tych trzech wymienionych teorii wzajemnie się przenikają: w teorii mnogości bada się własności modeli teorii sformalizowanych, arytmetyka teoretyczna zajmuje się zarówno sformalizowanymi teoriami arytmetyki, jak i ich modelami. Trudno jest więc oddzielić zakres badań, które odnoszą się tylko do teorii sformalizowanej od tych, które dotyczą pojęcia zbioru czy liczby naturalnej. Sprawa jest złożona między innymi i z tego względu, iż teorię modeli można sformalizować w teorii mnogości i traktować wyniki w niej uzyskane jako twierdzenia teoriomnogościowe. Z tego względu matematycy używają zamiennie terminów: metamatematyka, logika matematyczna, podstawy matematyki. Warto też dodać, iż w ich pracach rzadko występuje termin metamatematyka. Prace z tego zakresu z reguły są opatrywane tytułem: logika matematyczna. Teoria modeli jest traktowana jako osobna teoria matematyczna. Dzieje się tak i dlatego, że badane są w niej bardzo specjalne własności modeli. Podstawy matematyki zaś to przede wszystkim teoria mnogości łącznie z badaniami nad modelami dla teorii mnogości.

Pojęcia, które są badane w metamatematyce, można podzielić na dwie grupy w zależności od tego, czy dotyczą syntaktyki teorii sformalizowanej czy semantyki. Najważniejsze pojęcia syntaktyczne to: (1) aksjomat, reguły dedukcyjne, dowód, konsekwencja, wynikanie, język sformalizowany, metajęzyk, teoria sformalizowana — są to pojęcia dotyczące struktury teorii matematycznej; (2) niesprzeczność, aksjomatyzowalność, niezależność aksjomatów, zupełność, rozstrzygalność — są to z kolei pojęcia odnoszące się do metodologicznych własności teorii. Podstawowymi pojęciami semantycznymi są: spełnianie, prawda, dziedzina teorii, model, interpretacja, tautologia, kategoryczność. Każde z tych pojęć doczekało się ścisłej definicji spełniającej wymogi stawiane definicjom matematycznym. Mogą więc być badane przy użyciu metod matematyczno-logicznych. Co więcej, metamatematyka czy poszczególne jej części same mogą zostać sformalizowane i traktowane tak, jak inne teorie matematyczne. Należy jednak zdać sobie sprawę z tego, że pewne problemy, które zostały postawione w ramach badania teorii matematycznych, po dokonanym uściśleniu, a następnie formalizacji mogły zatracić część intuicji, które pojawiły się w początkowej fazie formułowania danych zagadnień.

W metamatematyce uzyskano szereg wyników ukazujących często zaskakujące i nieoczekiwane własności teorii sformalizowanych. Najważniejsze z nich to twierdzenia Gödla o pełności i o niezupełności, twierdzenie o nieudowadnialności niesprzeczności arytmetyki, twierdzenie o dedukcji, lemat interpolacyjny Craiga, twierdzenie Lindenbauma, twierdzenie o zwartości, twierdzenie Tarskiego, twierdzenie Skolema-Löwenheima. Również ważne znaczenie miały prace Gentzena, Henkina, Churcha. Twierdzenia te ukazują ograniczenia i możliwości formalizacji teorii. Są więc ważne dla zrozumienia istoty metody aksjomatyczno-dedukcyjnej.

W badaniach nad podstawami matematyki również uzyskano szereg interesujących wyników. Część z nich wykorzystuje w istotny sposób własności teorii sformalizowanych i ich modeli. Warto w tym kontekście wymienić metodę budowania modeli poprzez konstrukcję ultrapotęgi (m. in. wykorzystuje się to w analizie niestandardowej), czy korzystanie z twierdzeń Gödla przy badaniu teorii mnogości. Z kolei prace z zakresu podstaw matematyki, które dotyczą na przykład funkcji rekurencyjnych, modeli niestandardowych dla arytmetyki, niesprzeczności i niezależności hipotezy *continuum* i aksjomatu wyboru same stwarzają nowe pola badań dla metamatematyki.

Należy podkreślić, że tak rozumiana metamatematyka, czy szerzej podstawy matematyki stały się integralną częścią matematyki, bez której ta dyscyplina naukowa prawdopodobnie nie mogłaby się w dalszym ciągu owocnie rozwijać. Jak już wspomniałam, w podstawach matematyki korzysta się z wyników uzyskanych w innych działach matematyki. Twierdzenia metamatematyczne są z kolei stosowane w szeregu dyscyplin matematycznych: algebrze, topologii, analizie itd.[4]. Trudno wyobrazić sobie dzisiaj te działy matematyki bez teorii mnogości[5]. Mamy więc do czynienia z następującą sytuacją: zagadnienia metodologiczne matematyki są badane w samej matematyce. Matematyka wraz z logiką matematyczną wytworzyła potrzebne narzędzia do badania swoich własnych podstaw, do znalezienia odpowiedzi na szereg problemów metodologicznych. Warto podkreślić, że taka sytuacja jest możliwa tylko w naukach formalnych. Żadna bowiem z nauk empirycznych czy humanistycznych nie jest w stanie wytworzyć środków do badania struktury swoich własnych teorii, pojęć czy rozumowań. Problemami tymi w tych przypadkach zajmuje się metodologia bądź filozofia danej dyscypliny naukowej.

---

[4] Na przykład twierdzenie o zwartości jest wykorzystane w dowodzie twierdzenia o istnieniu uporządkowanego ciała niearchimedesowego elementarnie równoważnego uporządkowanemu ciału liczb rzeczywistych.

[5] W szczególności w dowodach wielu twierdzeń z analizy, topologii czy algebry jest wykorzystywany aksjomat wyboru. Co więcej, można pokazać, iż tych twierdzeń nie da się udowodnić w teorii bez tego aksjomatu. Tak więc przyjęta teoria mnogości ma wpływ na inne teorie matematyczne.

3. PRZEDMIOT I METODA FILOZOFII MATEMATYKI

Jak to już wyżej stwierdzono, do matematyki można włączyć badania metodologiczne, które zwykle znajdują się w obszarze filozofii i metodologii danej dyscypliny naukowej. Nie oznacza to jednak, iż filozofia matematyki nie jest potrzebna, gdyż została zastąpiona wyłącznie przez metamatematykę. Poza obszarem badań metamatematyki pozostaje bowiem szereg problemów, które nie mogą być rozwiązywane przy pomocy metod matematyczno-logicznych. Zagadnienia te to przede wszystkim kwestie epistemologiczne i ontologiczne matematyki. Jest więc miejsce na filozofię matematyki.

Problemy, którymi zajmuje się filozofia matematyki, można ogólnie podzielić na trzy grupy zagadnień. Do pierwszej należy zaliczyć kwestie powstające w matematyce przy badaniu jej pojęć. Z reguły podstawowe pojęcia matematyczne kształtowały się przez długi okres czasu, funkcjonowały najpierw w języku potocznym [6], zanim zostały sformułowane ich ścisłe definicje czy zakresy rozumienia. Trzeba też pamiętać, że skodyfikowanie podstawowych teorii matematycznych w systemy dedukcyjno-aksjomatyczne miało miejsce dopiero w XX wieku. Filozofia matematyki zajmuje się więc analizą takich pojęć jak: nieskończoność, ciągłość, granica, prawdopodobieństwo, konstruowalność, funkcja, liczba. W drugiej grupie znajdują się problemy powstające wtedy, gdy na matematykę czy jej poszczególne teorie patrzy się z zewnątrz jako na pewną całość. Są to przede wszystkim kwestie, które mają ścisły związek z zagadnieniami metodologicznymi matematyki. Wyłaniają się one głównie przy interpretacji twierdzeń metamatematycznych. Tymi zagadnieniami są: prawdziwość w matematyce, formalizacja i aksjomatyzowalność nieformalnych teorii matematycznych, próby formalizacji naszych intuicji, problem antynomii, stosunek matematyki do logiki, zakres stosowalności metody dedukcyjno-aksjomatycznej. Trzeba od razu zaznaczyć, że znaczna część wymienionych tu zagadnień jest badana w metamatematyce. Jednakże stosowana tam metoda pozwala tylko na częściowe rozwiązywanie tych zagadnień. Szczególnie ważne w tej grupie są kwestie, które powstają przy interpretacji wyników uzyskanych w metamatematyce. Istotna jest bowiem próba określenia zakresu metody dedukcyjno-aksjomatycznej, a tym samym istoty matematyki. Ma to zwłaszcza znaczenie dzisiaj, gdy coraz powszechniej korzysta się w matematyce z maszyn cyfrowych.

W trzeciej grupie są zagadnienia epistemologiczne i ontologiczne matematyki. Najważniejszym problemem epistemologicznym jest oczywiście kwestia poznawania przedmiotów matematycznych i łączący się z nią spór między aprioryzmem a aposterioryzmem. W tym obszarze badań znajdują się też próby odpowiedzi na pytanie o istnienie pozamatematycznego kryterium prawdziwości twierdzeń matematycznych [7] i o prawomocności aksjomatów. Również zastosowania matematyki

---

[6] Obecnie często w nowo powstających teoriach matematycznych pojęciom nadaje się nazwy wzięte wprawdzie z języka potocznego, ale nie mające żadnego związku z nowym ich rozumieniem w matematyce, na przykład ciało, pierścień.

[7] W danej teorii matematycznej twierdzenie jest prawdziwe, jeżeli ma dowód. Można zadać sobie pytanie, czy istnieją jeszcze jakieś inne kryteria prawdziwości twierdzeń wykraczające poza teorie i odwołujące się do faktów pozamatematycznych.

wzbudzają cały szereg kontrowersji, z których najważniejsze to określenie relacji między matematyką a innymi naukami i wiążące się z tym pytanie, czy istnieje matematyka stosowana jako odrębna dyscyplina, czy też mamy do czynienia tylko z zastosowaniami matematyki. Istotną kwestią jest również problem, czy matematykę się tworzy, czy odkrywa. Natomiast zagadnienia ontologiczne dotyczą przede wszystkim istoty i sposobu istnienia przedmiotów matematycznych oraz ich odniesienia do rzeczywistości pozamatematycznej. W związku z tymi problemami odżywa też stary spór o uniwersalia, zwłaszcza w kontekście kwestii istnienia zbiorów, a także kontrowersje dotyczące nieskończoności. Warto w tym miejscu zauważyć, że jakkolwiek można wyróżnić grupę problemów ontologicznych matematyki i oddzielić ją od kwestii epistemologicznych, to z reguły przy badaniu zagadnień epistemologicznych trzeba korzystać z wyników z zakresu ontologii i odwrotnie.

Rozwiązania wskazanych powyżej kwestii z zakresu filozofii matematyki pozwalają odpowiedzieć na centralne zagadnienie, a mianowicie na pytanie o istotę matematyki.

W obręb filozofii matematyki jest również często włączana aksjologia matematyki, w ramach której dyskutowane są zagadnienia dotyczące wartości poznania matematycznego. Rozważa się też pewne kwestie estetyczne.

Takie określenie zakresu badań filozofii matematyki świadczy o tym, że jest to samodzielna, odrębna dyscyplina filozoficzna. Wymienione problemy nie mogą być bowiem rozwiązane w metamatematyce, semiotyce czy metodologii. Jednocześnie nie wystarczy zastosować tylko rozwiązania z metafizyki i teorii poznania do ontologicznych i epistemologicznych problemów matematyki, gdyż te ostatnie mają ścisły związek z teoriami matematycznymi i pobieżna znajomość matematyki nie wystarcza nie tylko do ich rozwiązania, ale często nawet do poprawnego sformułowania. Trzeba wyraźnie podkreślić, że filozofia matematyki poprzez zakres zagadnień, którymi się zajmuje, oddziela się zarówno od metamatematyki i metodologii matematyki, jak i od metafizyki czy teorii poznania. Nie oznacza to jednak, by nie była powiązana z tymi dyscyplinami. Prześledźmy obecnie te zależności.

Część problemów rozpatrywanych w metamatematyce wyniknęła przy badaniu zagadnień dotyczących natury poznania matematycznego i istoty obiektów matematycznych. W szczególności programy formalizmu, logicyzmu i intuicjonizmu, które doprowadziły do powstania i rozwoju metamatematyki, opierały się na pewnych założeniach ontologicznych i epistemologicznych (zwłaszcza intuicjonizm). Jednocześnie przy próbach rozwiązywania kwestii epistemologicznych i ontologicznych mogą być pomocne wyniki uzyskane w metamatematyce. Na przykład niezupełność takich podstawowych teorii matematycznych, jak arytmetyka Peano i teoria mnogości, dostarcza argumentów za, bądź przeciw pewnym koncepcjom z zakresu ontologii.

Niektóre problemy metodologiczne pojawiają się zarówno w metamatematyce, jak i w filozofii matematyki. W metamatematyce są one rozwiązywane przy pomocy metody aksjomatyczno-dedukcyjnej. Metoda ta jednak nie pozwala, o czym już wspomniałam, na rozwiązanie wszystkich kwestii, które powstają przy badaniu tego typu problemów. Na przykład zagadnienie prawdziwości twierdzeń matematycznych pojawia się w metamatematyce. Została tu wypracowana definicja prawdy (definicja Tarskiego) i udowodniono szereg twierdzeń dotyczących własności tego pojęcia. Trzeba jednak pamiętać, że definicja Tarskiego ujmuje tylko część intuicji, które wiążemy z pojęciem prawdy. Jest poza tym osadzona w całym kontekście teorii modeli dla teorii sformalizowanych. Przyjęcie definicji prawdy Tarskiego nie rozwiązuje więc szeregu problemów, które dotyczą prawdziwości twierdzeń matematycznych.

Warto dodać, iż może stać się problemem zaklasyfikowanie pewnych kwestii i stwierdzenie, czy należą do metamatematyki czy do filozofii matematyki. Twierdzenia metamatematyczne (na przykład twierdzenia limitacyjne) mają też swoją określoną treść filozoficzną. Powstaje tu jednak niebezpieczeństwo ekstrapolowania tych twierdzeń poza metamatematykę czy nawet filozofię matematyki i wyciągania z nich zbyt daleko idących wniosków. Pomija się to, że dotyczą one tylko ściśle określonych języków sformalizowanych i teorii formułowanych w tych językach lub modeli takich teorii [8].

Przy rozwiązywaniu filozoficznych problemów matematyki, zwłaszcza tych zaliczonych do pierwszej grupy, nie można pomijać wyników uzyskanych w samej matematyce. Mogą one bowiem świadczyć na korzyść pewnych rozwiązań, jednocześnie w jakimś zakresie eliminując inne. Zarazem trzeba podkreślić, że nie można rozpatrywać pojęć matematycznych i twierdzeń, mówiących o ich własnościach, w oderwaniu od teorii matematycznej, w której dane pojęcie funkcjonuje. Sama jednak teoria matematyczna nie może dać nam rozwiązań z zakresu filozofii. Konieczne staje się wykorzystanie metafizyki i teorii poznania. Trudno bowiem przystępować do badania filozoficznych problemów matematyki bez chociażby zarysowanej tylko filozoficznej wizji otaczającej nas rzeczywistości. Z drugiej strony, przeniesienie szczegółowych rozwiązań z zakresu filozofii do problemów z filozofii matematyki bez uwzględnienia specyfiki samej matematyki może doprowadzić do głoszenia poglądów, które nie będą ujmować istoty matematyki współczesnej. Warto też dodać, że przedmioty matematyczne można potraktować jako odrębną klasę obiektów. Takie podejście jest uzasadnione tym, że matematyka ma swoją własną specyfikę wyróżniającą ją spośród innych nauk. Tym samym rozwiązania dotyczące istnienia różnych obiektów proponowane w systemach metafizycznych nie muszą odnosić się do przedmiotów badanych przez matematyka.

Filozofia matematyki, jakkolwiek może być uważana za odrębną dyscyplinę filozoficzną, jest powiązana z jednej strony z matematyką i metamatematyką, a z drugiej zaś z metafizyką i teorią poznania. Rodzi się więc pytanie o metodę uprawiania filozofii matematyki. Nie może to być, jak w metamatematyce, metoda aksjomatyczno-dedukcyjna. Przy pomocy tej metody zostałaby bowiem stworzona pewna teoria formalna, która w gruncie rzeczy mówiłaby bardzo mało na temat istoty matematyki. W filozofii matematyki, podobnie jak w innych naukach filozoficznych, dokonuje się refleksji krytyczno-wyjaśniającej, analizuje się pojęcia, korzysta się, obok rozumowań dedukcyjnych, również z niededukcyjnych, a więc tylko uprawdopodabniających głoszone poglądy. Również sposób i zakres wykorzystywania wyników z matematyki i z filozofii wymaga uściślenia i dokładnego zarysowania. Szczególnie w kwestii wykorzystania wyników matematycznych trzeba pamiętać, że żadna z teorii matematycznych, żadne

[8] Por. A. Lemańska, *Twierdzenie Skolema-Löwenheima i jego konsekwencje*, St. Phil. Christ. 22 (1986) 2, 99—108.

z twierdzeń nie może dostarczyć bezpośrednio rozwiązania danego problemu filozoficznego matematyki [9]. Jednocześnie powiązania między pojęciami, sama budowa poszczególnych teorii matematycznych, w których badane są interesujące nas pojęcia, mają znaczący wpływ na rozumienie ich istoty. Jak się wydaje, przy wypracowaniu metody pozwalającej na wykorzystywanie wyników z matematyki w filozofii matematyki może pomóc metoda implikacji ontologicznych typu redukcyjnego stworzona przez K. Kłósaka [10]. Metoda ta wprawdzie odnosi się do filozofii przyrody, może być jednak, z koniecznymi modyfikacjami, zastosowana do budowania filozofii matematyki.

Refleksja filozoficzna może odnosić się do pewnych faktów dotyczących matematyki, poszczególnych jej teorii czy pojęć. Fakty te należy zinterpretować przy pomocy zasad metafizycznych lub epistemologicznych. Dla takich zinterpretowanych faktów możemy szukać implikacji ontologicznych typu redukcyjnego, które będą wyjaśniały ich istotę, a także podawały ich przyczyny.

Przy porównaniu filozofii matematyki z filozofiami poszczególnych nauk przyrodniczych nasuwają się dwie zasadnicze różnice. Pierwsza jest następująca: część problemów metodologicznych, które są tradycyjnie rozwiązywane w filozofii danej dyscypliny naukowej, weszła w obręb metamatematyki, a tym samym pozostaje w pewnym zakresie poza filozofią matematyki. Chodzi tu przede wszystkim o kwestie dotyczące struktury teorii, stosowanych rozumowań itp. Druga różnica odnosi się również do zakresu filozofii matematyki. Konieczne stało się bowiem włączenie do filozofii matematyki zagadnień ontologicznych, które w przypadku fizyki czy biologii są rozwiązywane zasadniczo w filozofii przyrody (nieożywionej lub ożywionej), a nie w filozofii fizyki lub biologii [11]. Wprawdzie w filozofii danej nauki przyrodniczej może pojawić się problem terminów teoretycznych, to jednak kwestie te nie dotyczą bezpośrednio istnienia i natury przedmiotów badanych przez fizyka czy biologa. Jednocześnie kwestii istnienia i poznawania przedmiotów matematycznych nie da się sprowadzić tylko do zagadnienia terminów teoretycznych, gdyż przedmioty matematyczne stanowią klasę obiektów różnych od fizycznych. Takie spojrzenie na zakres filozofii matematyki pozwala jednocześnie zastosować w niej metodę implikacji ontologicznych.

Na zakończenie warto uczynić następującą uwagę. Otóż przegląd najważniejszych stanowisk w filozofii matematyki [12] wskazuje na wyczerpywanie się klasycznych (jak można byłoby je określić) rozwiązań. Obecnie staje się konieczne wypracowanie nowych poglądów na istotę

[9] Można do matematyki odnieść poglądy K. Kłósaka dotyczące nauk przyrodniczych, por. K. Kłósak, *Z teorii i metodologii filozofii przyrody*, Poznań 1980, 13—41.

[10] *Tamże*, 123—160.

[11] Por. Sz. W. Ślaga, *What the Philosophy of Biology Is and Should Be?*, St. Phil. Christ. 25 (1989) 2, 155—175. W artykule została przedstawiona koncepcja filozofii biologii oraz relacje między biologią teoretyczną, filozofią biologii oraz filozofią przyrody ożywionej (biofilozofią). Przedstawione tu poglądy można odnieść do filozofii innych nauk przyrodniczych.

[12] Główne klasyczne kierunki w filozofii matematyki to: platonizm, empiryzm, konwencjonalizm, intuicjonizm, logicyzm, formalizm, konstruktywizm.

matematyki, uwzględniających w większym stopniu rozwój matematyki współczesnej, powstawanie nowych teorii, wykorzystywanie komputerów, zastosowania matematyki w nowych obszarach wiedzy. Być może, w zbudowaniu nowej koncepcji pomocna okaże się metoda implikacji ontologicznych typu redukcyjnego.

MATHEMATICS — METAMATHEMATICS — PHILOSOPHY OF MATHEMATICS

Summary

The aim of this paper is to discuss differences between the philosophy of mathematics and the metamathematics. Metamathematics is the theory which deals with formalized mathematical theories. These formalized theories can be the subject of mathematical investigations using more or less advanced mathematical theory and methods. So metamathematics is a branch of mathematics.

The main subject of philosophy of mathematics is the investigation of ontological and epistemological problems. They are: how do mathematical objects exist and how can we get to know them. I think, the method of ontological implications of the reductive nature (proposed by K. Kłósak) can be used in the philosophical investigations concerning mathematics.