Roman M. Olejnik

Zwrot relacji izomorfizmu i homomorfizmu

Studia Philosophiae Christianae 30/1, 112-115

1994

ROMAN M. OLEJNIK

ZWROT RELACJI IZOMORFIZMU I HOMOMORFIZMU

Szerokie i bogate zastosowanie pomiaru w fizyce, astronomii, astrofizyce oraz kosmologii wyjaśnia i uzasadnia zainteresowanie problematyką z nim związaną ze strony fizyków, filozofów i metodologów. Zagadnieniem pomiaru w aspekcie metodologicznym zajmował się między innymi Kazimierz Ajdukiewicz. W zaproponowanych koncepcjach definiuje on pomiar jako stosunek izomorficzny lub homomorficzny zachowujący konkretne relacje pomjiędzy odpowiednimi cechami przedmiotów lub samymi przedmiotami. W sposób sukcesywny K. Ajdukiewicz starał się także wzbogacić strukturę dziedziny pomiaru.

Zatrzymamy się tu nad dwiema jego koncepcjami. Pierwsza zawarta jest w referacie *Pomiar* wygłoszonym w Osiecznej w 1957 roku, druga zaś w monografii zatytułowanej: *Logika pragmatyczna*. W obu przypadkach K. Ajdukiewicz poprzedza definicję pomoiaru definicjami odwzorowania relacji S na relacji T w sposób izomorficzny oraz homomorficzny. Niniejsy artykuł poświęcony jest dokładniejszej analizie tego zjawiska z zakresu logiki.

Na wstępie zacytujemy cztery definicje, do których będziemy powracać w dalszej części tej analizy.

1° **Izomorfizm (według referatu z Osiecznej):**

„Jeżeli jakaś relacja R odwzorowuje pole stosunku S na polu stosunku T w sposob wzajemnie jednoznaczny i tak, że między przedmiotami x i y zachodzi stosunek T, tylekroć między przyporządkowanymi tym przedmiotem przez relację R przedmiotami x' i y' zachodzi stosunek S, i na odwrót, wówczas mówimy, że **relacja R odwzorowuje relację T w sposób izomorficzny**"[1]

2° **Homomorfizm (według referatu z Osiecznej):**

„Jeżeli zaś relacja R odwzorowuje pole racji S na polu relacji T w sposób wielo-jednoznaczny i to tak, że ilekroć między dwoma przedmiotami x i y zachodzi relacja T, tylekroć między dowolnymi dwoma pedmiotami, którym relacja R przyporządkowuje przemdioty x i y, zachodzi relacja S – wówczas mówimy, że **relacja R odwzorowuje relację S na relacji T w sposób homomorficzny**" (K. Ajdukiewicz, **Pomiar** 358-359).

3° **Izomorfizm (według *Logiki pragmatycznej*):**

„Relacja R odwzorowuje izomorficznie relację S na relacji T zawsze i tylko wtedy, gdy relacja R jest relacją wzajemnie jednoznaczną, której dziedzinę stanowi pole relacji S, zaś przeziwdziedzinę poła relacji T. Przy czym, jeżeli przedmiotowi x relacja R przyporządkuje przedmiot x', zaś przedmiotowi y relacja R podporządkowuje przedmiot y', to relacja S zachodzi między x i y zawsze i tylko wtedy, gdy relacja T zachodzi między x' i y'"[2].

4° **Homomorfizm (według *Logiki pragmatycznej*)**

„Stosunek R odwzorowuje w sposób homomorficzny stosunek S na stosunku T – to znaczy – stosunek R jest stosunkiem jednoznacznym, którego dziedzinę stanowi pole stosunku S, zaś przeciwdziedzinę pole stosunku T, i dla wszystkich x, y, x', y' takich, że xRx', yRy': xSy zawsze i tylko, gdy x'Ty" (K. Ajdukiewicz, *Logika pragmatyczna*, 253).

Refiniendum definicji 1° i 3° jest jednakowe:

„Relacja R odwzorowuje (izomorficznie) relację S na relacji T w sposób izomorficzny".

[1] K. Ajdukiewicz: *Pomiar*, w: *Język i poznanie*, Warszawa 1985, t.2, 358.

[2] K. Ajdukiewicz: *Logika pragmatyczna*, Warszawa 1975, 251.

To samo zachodzi między definicjami 2° i 4°, mają one także jednakowe definiendum:

„Relacja (stosunek) odwzorowuje (w sposób homomorficzny) relację (stosunek) S na relacji (stosunku) T w sposób homomorficzny".

Spójrzymy teraz na definiens naszych definicji. To, że w 1° i 3 definicji, R jest odwzorowaniem w sposób wzajemnie jednoznaczny. zaś w 2° i 4°, R jest stosunkiem jednoznacznym (lub inaczej: wielo-jednoznacznym), nie jest dla nas w tej analizie istotne. Bardziej chodzi nam o zbadanie, jaki zbiór (z jaką strukturą – relacją) jest odwzorowany przez R i to **w jaki zbiór** (lub **na jaki zbiór**). Chodzi tu o określenie nazwane przeze mnie w tytule: «zwrotem relacji» czyli „co w co jest odwzorowywane", lub inaczej (używając języka analizy matematycznej), która z przestrzeni jest pzestrzenią zmiennej niezależnej, a która zmiennej zależnej stosunku jednoznacznego, czyli funkcji. Najprościej można to wyrazić pytaniem: konkretnie co jest dziedziną, a co przeciwdziedziną danej relacji R.

W definicjach z **Logiki pragmatycznej** odpowiedź na nasze pytanie jest bezpośrednia i jednoznaczna:

Dziedzina = pole relacji S (C(S))[3]

Przeciwdziedzina = pole relacji T (C(T))

Czyli R: $C(S) \rightarrow C(T)$, dlatego przy warunku określającym zachodzenie relacji (działań) zmienne x i y, które są argumentami relacji T (należą do przeciwdziedziny), są przedmiotami, które relacja R przyporządkowuje pewnym elementom z dziedziny.

Możemy to podsumować:

Stosunek R odwzorowuje stosunek S na stosunku T (homomorficznie lub izomorficznie) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$R: C(S) \rightarrow C(T) \text{ i } (xSy \rightleftarrows x'Ty').$$

Można by tu postawić zarzut, że «zwrot» nie jest tu istotny, ponieważ w przypadku izomorfizmu (odwzorowanie wzajemne-jednoznaczne) istnieje relacja odwrotna i wtedy «zwrot odwzorowania» istnieje też w stronę przeciwną (jest to własność symetryczności izomorfizmu). Symetryczość nie jest jednak konstutywną własnością homomorfizmu i dlatego «zwrot» odgrywa tu rolę.

Odwrócenie stosunku[4] *wielo-jednoznacznego czyli funkcji, która nie jest różnowartością*, jest stosunkiem, który nie posiada własności jednoznaczności (czyli nie jest funkcją). Jest to jedno z podstawowych twierdzeń teorii relacji, łatwe do udowodnienia (jednoznaczność jest jedną z konstytutywnych cech funkcji czyli także homomorfizmu).

Spójrzymy teraz na definicje zawarte w referacie z Osiecznej. Z pierwszych części definicji 1° i 2° wiemy, że dziedziną i przeciwdziedziną R jest pole stosunku S oraz pole stosunku T. Nie wiemy jednak, które pole jest dziedziną R. a które przeciwdziedziną R. Odpowiedź na to dają nam pozostałe części definicji, lecz każda inaczej, **Według definicji 1°:**

$$\left.\begin{aligned} D(R) &= C(T) \\ \breve{D}(R) &= C(S) \end{aligned}\right\} \Rightarrow R: C(T) \rightarrow C(S) \text{ (i)}$$

gdzie C(T), C(S) – pola stosunków T, S; D(R) - dziedzina stosunku R; D(R) - przeciwdziedzina stosunku R[5]." (...) Ilekroć między przedmiotami x i y zachodzi stosunek T, tylekroć między **przyporządkowanymi tym przedmiotom przez relację R** przedmiotami x' i y' (...)" (K. Ajdukiewicz, *Pomiar*, 358).

Zauważmy, że «zwrot» tego izomorfizmu jest przeciwny, niż w def. 3°. Nie stanowi to natychmiastowego paradoksu, gdyż konwencjonalizm dopuszcza nam w takich definicjach pewną swobodę. Z drugiej strony, o czym już wspomniałem, izomorfizm jest relacją symetryczną.

[3] C/W/ – symbol oznaczający pole relacji W.

[4] K. Ajdukiewicz: *Logika pragmatyczna*, 235.

[5] Tamże, 234.

A jak wygląda definicja homomorfizmu według konwencji, jakie przyjął K. Ajdukiewicz, wygłaszając referat w Osiecznej?

Według definicji 2°:

$$\left.\begin{array}{l} D(R) = C(S) \\ \breve{D}(R) = C(T) \end{array}\right\} \Rightarrow R: C(S) \to C(T) \text{ (ii)}$$

„(...)ilekroć między dwoma przedmiotami x i y zachodzi relacja R, tylekroć między dowolnymi dwoma przedmiotami, **którym relacja R przyporządkowuje przedmioty x i y** zachodzi relacja S (...)" (K. Ajdukiewicz, *Pomiar*. 358-359).

Zastanówmy się, czy rzeczywiście chodziło K. Ajdukiewiczowi o tę różnicę «zwrotów», czy naprawdę według tej konwencji:

$R: C(T) \to C(S)$ jako izomorfizm?

$R: C(S) \to C(T)$ jako homomorfizm?

A może jest to tylko błąd w sformułowaniu?

Prawda tkwi tu zapewne w odpowiedzi na drugie pytanie (jest to błąd w sformułowaniu). Pomiar przyporządkowuje mierzonym przedmiotom, czy też ich cechom – liczby, czyli miary[6]. Wobec tego:

$D(R_{izom}) = \{$zbiór przedmiotów mierzonych$\}$

$D(R_{hom.}) = \{$rodzina cech$\}$

$\breve{D}(R_{izom.}) \subseteq R^+$

$\breve{D}(R_{hom.}) \subseteq R^+$

$R_{izom.}$: $\{$zbiór przedmiotów mierzonych$\} \to R$

$R_{hom.}$: $\{$rodzina cech$\} \to R$

Skorzystajmy teraz (idąc logicznie inną drogą) z def. 2^0 oraz sformułowania:

„Pomiar przyporządkowuje mierzonym przedmiotom w sposób wielo-jednoznaczny pewne liczby jako ich miary, wedle takiej zasady (relacji), która **pewne stosunki pomiędzy liczbami odwzorowuje w sposób homomorficzny na pewnych stosunkach pomiędzy odpowiednimi przedmiotami**" (K. Ajdukiewicz, *Pomiar*, 359).

S – stosunki między liczbami

T – stosunki między przedmiotami

Zgodnie z definicją 2° i powyższymi uwagami jej dotyczącymi, stosunek R (homomorficzny), którego dotyczy ostatni cytat, odwzorowuje $C(S) \to C(T)$ zgodnie z (ii). Wobec tego relacja R, która pełni funkcję homomorfizmu będącego pomiarem, odwzorowuje:

$R:R^+$ $\{$zbiór przedmiotów$\}$.

Z teoretycznego punktu widzenia ma to sens jedynie, gdy R jest stosunkiem wzajemnie jednoznacznym, bo w przeciwnym wypadku relacja ta nie jest nawet stosunkiem jednoznacznym (czyli nie jest funkcją), będąc odwróceniem relacji (funkcji) stanowiącej pomiar. Natomiast homomorfizm, z samego założenia, jest relacją wielo-jednoznaczną (niektórzy zakładają, że homomorfizm jest relacją jednoznaczną, czyli w szczególnym pzypadku może być wzajemnie jednoznaczną, a wtedy staje się izomorfizmem; według takiej konwencji izomorfizm jest szczególnym przypadkiem homomorfizmu).

Aby poprawić, należy dokonać pewnej zmiany w definicji 2°. Oto proponowana postać, analogiczna do definicji 1°:

(2°) Jeżeli zaś relacja R odwzorowuje pole relacji S na polu relacji T w sposób wielo-jednoznaczny i to tak, że ilekroć między dwoma przedmiotami x i y zachodzi relacja T, tylekroć **między przyporządkowanymi tym przedmiotom przez relację R przedmiotami x' i y' zachodzi relacja S i na odwrót,** wówczas mówimy, ze relacja R odwzorowuje relację S na relacji T w sposób homomorficzny.

[6] K. Ajdukiewicz: *Pomiar*, 359.

Łatwo sprawdzić, że homomorfinizm definiowany przez zmodyfikowaną definicję będzie miał «zwrot» przeciwny, niż według definicji K. Ajdukiewicza, taki sam, jak izomorfirm zdefiniowany w tej samej konwencji, czyli w definicji 1°:

R: C(T) → C(S).

Zgodnie z przykładem (zacytowanym sformułowaniem), biorąc R jako pomiar w sensie homomorficznym (według zmodyfikowanej definicji):

R: {zbiór przedmiotów} → R^+

Do definicji izomorfizmu (definicja 1°) nie ma zastrzeżeń tej kategorii. Stosując ją do podanego przez A. Ajdukiewicza sformułowania:

„Równocześnie pomiar przyporządkowuje cechom, przysługującym mierzonym przedmiotom pod pewnym względem, w sposób wzajemnie jednoznaczny pewne liczby jako ich miary, wedle takiej zasady (relacji), która pewne stosunki między liczbami odwzorowuje na pewnych stosunkach pomiędzy odpowiednimi cechami w sposób izomorficzny" (K. Ajdukiewicz, *Pomiar*, 359), nie dochodzimy do podobnych niezgodności (sprzeczności), jak przy homomorfiźmie (według powyższego: pomiar przyporządkowuje izomorficznie cechom liczb, wedle zasady, która stosunki między liczbami odwzorowuje na stosunkach piomiędzy cechami). W oparciu o definicję 1° orzekamy, że wtedy relacja S jest określona na liczbach a stosunek T na cechach, czyli (z definicji) relacja R polu relacji T (rodzinie cech) przyporządkowuje przedmioty z pola relacji S (czyli liczby).

W podsumowaniu możemy powiedzieć, że przyjmując definicję 1° oraz zmieniając definicję 2° według przedstawioanej propozycji, teoretyczna strona pojęć izomorfizmu i homomorfizmu będzie w tej konwencji zgodna z określeniami (pomiaru) przyjmowanymi w metodologii.

Powracając do definicji izomorfizmu i homomorfizmu według konwencji przyjmowanej przez K. Ajdukiewicza w *Logice pragmatycznej* (definicje: 3° i 4°), zauważyliśmy, że «zwrot» izomorfizmu w definicjach 1° i 3° jest przeciwny:

1° R: C(T) → C(S)

3° R: C(S) → C(T)

To samo się stanie po zmodyfikowaniu definicji 2°:

(2°) R: C(T) → C(S)

4° R: C(S) → C(T)

Jak już wspominałem, nie jest to pomyłka ani sprzeczność, gdyż konwencjonalizm dopuszcza taką swobodę. Przyjmowanie przez jedngo autora różnych konwencji, uczula nas na kontrolę tego, w ramach jakiej konwencji się obracamy i czy sformułowania wyrażone w języku danej konwencji są treściowo zgodne z przyjętymi ogólnie (np. że pomiar przyporządkowuje przedmiotom lub cechom liczby a nie odwrotnie).

Potwierdzeniem powyższej dygresji i poprawności sformułowania (według konwencji) u K. Ajdukiewicza może być następujący przykład:

„Jeżeli więc np. relacja M_δ odwzorowuje izomorficznie stosunek większości między długościami odcinków W_δ na stosunku większości między liczbami, to odpowiednia relacja M^s_δ odwzorowuje homomorficznie **stosunek dłuższości między odcinkami na stosunku większości między liczbami'** (K. Ajdukiewicz, *Logika pragmatyczna*, 260), a nie jak czytamy w sformułowaniu: „Pomiar przyporządkowuje mierzonym przedmiotom (...) liczby (...) wedle takiej zasady (relacji), która **pewne stosunki między liczbami** odwzorowuje w sposób homomorficzny **na pewnych stosunkach pomiędzy odpowiednimi przedmiotami"** (K. Ajdukiewicz, *Pomiar*, 359).

W pierwszym przypadku chodzi o odwzorowanie:

– stosunków między przedmiotami na stosunkach między liczbami, w drugim:

– stosunkach pomiędzy liczbami na stosunkach pomiędzy przedmiotami.