

Tadeusz Gestenkorn, Jacek Mańko

Filozofia rozmytości a matematyka losowości

Studia Philosophiae Christianae 30/2, 83-97

1994

Artykuł został zdigitalizowany i opracowany do udostępnienia w internecie przez Muzeum Historii Polski w ramach prac podejmowanych na rzecz zapewnienia otwartego, powszechnego i trwałego dostępu do polskiego dorobku naukowego i kulturalnego. Artykuł jest umieszczony w kolekcji cyfrowej bazhum.muzhp.pl, gromadzącej zawartość polskich czasopism humanistycznych i społecznych.

Tekst jest udostępniony do wykorzystania w ramach dozwolonego użytku.

TADEUSZ GERSTENKORN, JACEK MAŃKO

FILOZOFIA ROZMYTOŚCI A MATEMATYKA LOSOWOŚCI

1. Idea zbioru rozmytego. Uwagi metodologiczne. 2. Podejście Zadeha. 3. Definicje aksjomatyczne. 4. P-miara. 5. Ujęcie Yagera. 6. $B(n)$ – prawdopodobieństwo. 7. Koncepcja Chenga i Liu. 8. Dwoista rozmytość. 9. Uwagi końcowe.

1. IDEA ZBIORU ROZMYTEGO. UWAGI METODOLOGICZNE

Koniec wieku XIX zainicjował badania nad pojęciem zbioru. Pionierami tych badań byli G. Boole i G. Cantor. Kiedy w roku 1871 ukazała się praca G. Cantora dotycząca pojęcia zbioru, chyba nikt nie przewidywał, że to pojęcie zrewolucjonizuje matematykę. Dzisiaj pojęcie zbioru jest podstawowym pojęciem matematyki i żaden jej dział nie może się obejść bez wprowadzenia tego pojęcia na początku wykładu. Opierając się na standardowym aparacie logiki dwuwartościowej, tradycyjne ujęcie matematyki przez zbiór A w pewnej przestrzeni rozważań X rozumie obiekt postaci

$$A = \left\{ (x, \chi_A(x)) : x \in X \right\}, \quad (1.1)$$

gdzie χ_A jest tzw. funkcją charakterystyczną zbioru A .

Zgodnie z tym ujęciem element x z przestrzeni X może do zbioru A należeć ($\chi_A(x) = 1$) lub nie należeć ($\chi_A(x) = 0$) i innej możliwości nie ma. Alternatywa należenia bądź nienależenia elementu do zbioru jest niekiedy zbyt uboga na to, by wiernie oddać opisywane zjawisko. Dzieje się to szczególnie wtedy, gdy rozwiązywane zagadnienia zawierają pojęcia opisane nieprecyzyjnie bądź zadania sformułowane niejednoznacznie. Klasyczna matematyka prowadzi wówczas do rozwiązywania skomplikowanych modeli matematycznych przy użyciu tak dużych mocy obliczeniowych, które powodują ogromną trudność lub wręcz nieopłacalność samego procesu rozwiązywania.

W celu zmniejszenia tych niedogodności w roku 1965 L.A. Zadeh z Berkeley (USA) wprowadził pojęcie zbioru rozmytego [33] jako

uogólnienie pojęcia zwykłego zbioru znanego z teorii mnogości G. Cantora. Uogólnienie to polega na dopuszczeniu możliwości należenia elementu do zbioru w pewnym stopniu, począwszy od wartości 1 (pełna przynależność) do wartości 0 (całkowita nieprzynależność), poprzez wszystkie wartości pośrednie między 0 i 1 oznaczające należenie do zbioru w pewnym stopniu. Tak więc zbiór rozmyty zostaje określony, gdy każdemu jego potencjalnemu elementowi przypiszemy pewną liczbę z przedziału $\langle 0, 1 \rangle$, tj. gdy utworzymy funkcję μ , która każdemu elementowi x z przestrzeni rozważań X przyporządkowuje liczbę $\mu(x) \in \langle 0, 1 \rangle$ będącą stopniem należenia tego elementu do opisywanego zbioru rozmytego. Formalnie, zbiorem rozmytym A w przestrzeni X nazywamy obiekt postaci [16]:

$$A = \left\{ (x, \mu_A(x) : x \in X) \right\}, \quad (1.2)$$

gdzie $\mu_A: \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$ jest tzw. funkcją przynależności tego zbioru.

W niektórych pracach przez zbiór rozmyty rozumie się jego funkcję przynależności (np. [9]), a teoria zbiorów rozmytych jest niczym innym jak teorią pewnych funkcji opisujących liczbowo terminy wyrażone językiem nieprecyzyjnym bądź pojęcia rozumiane niejednoznacznie.

Rozważmy dla przykładu zbiór ludzi w wieku średnim [23]. Dla przejrzystości przyjmujemy tylko pełne, całkowite lata wspomnianych osób. Nazwa „średni” jest oczywiście niejednoznaczna i, jako taka, może być sformalizowana w postaci zbioru rozmytego. Funkcja przynależności tego zbioru jest określona na przykład następująco:

x	...	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	...
$\mu(x)$	0	0	0,3	0,5	0,8	0,9	1	1	1	1	0,9	0,8	0,7	0,5	0,2	0	0

Według tej funkcji ludźmi rzeczywiście w wieku średnim są ludzie w wieku 44, 45, 46 i 47 lat ($\mu(x) = 1$), ludzie w wieku 43 i 48 lat są uznani za ludzi w średnim wieku w stopniu 0,9 itd.

Niech teraz $X = (-\infty, +\infty)$. Rozważmy rozmyty zbiór liczb „trochę większych od 100”. Jego funkcja przynależności, określona jak i wyżej w sposób arbitralny (istnieją jednak obiektywne metody wyznaczania takich funkcji [5], [8], może być dana wzorem:

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq 100, \\ 2^{-(x-100)^2} & \text{dla } 100 < x < 1000, \\ 0 & \text{dla } x \geq 1000. \end{cases}$$

Teoria zbiorów rozmytych zyskuje obecnie ogromną popularność na świecie, rozwija się bardzo burzliwie, szczególnie na zachodzie Europy, w USA i Japonii. Jest wykorzystywana przez większość znaczących firm światowych produkujących sprzęt techniczny wszelkiego rodzaju, służy jako narzędzie do sterowania raketami i pilotażu okrętów, ma ogromne znaczenie w naukach tzw. miękkich, jak np. medycyna, ekonomia, socjologia, lingwistyka i filozofia oraz we wszelkiej działalności praktycznej człowieka.

Jednym z pierwszych popularyzatorów teorii zbiorów rozmytych w Polsce był M. Lubański. W swoich artykułach ([20-23]) M. Lubański postawił sobie za cel poinformowanie czytelnika o istocie „rozmytości” oraz podstawowych operacjach na zbiorach rozmytych i ich zastosowaniu w nauce o języku otwierając tym nowe horyzonty badawcze w zakresie przedmiotowym, metodologicznym i filozoficznym ([14]) § 3,4 i 3,5). Z drugiej strony prace M. Lubańskiego były przeciwwagą dla przeciwników teorii zbiorów rozmytych. W początkowym okresie swojego istnienia teoria i metody teorii zbiorów rozmytych były niekiedy przedmiotem kontrowersyjnych dyskusji. Powodem sceptycyzmu była nieznanomość tej teorii i błędne interpretowanie funkcji przynależności zbioru rozmytego. Fakt, że zbiorem wartości tej funkcji jest przedział $\langle 0, 1 \rangle$ powodował zarzut, że rozmytość jest pewną zakamuflowaną postacią przypadkowości, a w związku z tym teoria zbiorów rozmytych jest tylko innym ujęciem probabilistyki. Było to jednak nieporozumienie, które początkowo wpłynęło hamująco na rozwój teorii zbiorów rozmytych. Podstawową różnicą między losowością i rozmytością jest to, że losowość dotyczy zjawisk opisanych wyraźnie i ściśle, a występująca niepewność dotyczy tylko tego, czy się pojawią. Rozmytość natomiast zajmuje się samą nieprecyzją tkwiącą w opisie zjawiska, a nie w jego pojawianiu się.

Losowość więc dotyczy niepewności związanej z przynależnością lub nieprzynależnością elementu do zbioru, rozmytość zaś dotyczy stopnia przynależności takiego elementu do zbioru. Rzecz jasna, zjawiska te, choć różne i inaczej opisywane, mogą występować razem. Interesujące może być przecież pytanie o prawdopodobieństwo wystąpienia „ładnej pogody”, wybranie człowieka w „wieku średnim” z danej grupy osób, zdobycia „trochę więcej niż 100 punktów” w jakiejś grze liczbowej itp.

W klasycznej teorii prawdopodobieństwa zdarzeniem nazywamy element σ -ciała F podzbiorów pewnej przestrzeni rozważań Ω . Miarą prawdopodobieństwa P nazywamy wtedy unormowaną miarę na przestrzeni mierzalnej (Ω, F) , tzn. taką funkcję $P : F \rightarrow \mathbb{R}$, że:

- A 1) $P(A) \geq 0$ dla dowolnego $A \in F$,
 A 2) $P(\Omega) = 1$,
 A 3) $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ dla parami rozłącznych zdarzeń $(A_n)_{n=1}^{\infty} \in F$.

W dalszej części pracy prezentujemy przekrój różnych podejść do problemu łączenia losowości i rozmytości. Staraliśmy się to przedstawić jednolitym językiem w celu ich łatwiejszego porównania oraz ukazać wkład matematyków polskich w rozwiązywanie tego zagadnienia.

2. PODEJŚCIE ZADEHA

Jako pierwszy zagadnieniem prawdopodobieństwa zdarzeń rozmytych zajął się L.A. Zadeh [34]. Niech (Ω, F, P) będzie przestrzenią probabilistyczną i niech $A \in F$ będzie dowolnym zdarzeniem z σ -ciała F podzbiorów zbioru Ω . Prawdopodobieństwo $P(A)$ tego zdarzenia można wyrazić jako

$$P(A) = \int_A dP \quad (2.1)$$

lub, równoważnie, jako

$$P(A) = \int_{\Omega} \chi_A(x) dP(x), \quad (2.2)$$

gdzie χ_A jest funkcją charakterystyczną zdarzenia (zbioru) A . Równość (2.2) pozwala w sposób naturalny rozszerzyć powyższe rozumowanie na grunt zbiorów rozmytych zastępując funkcję charakterystyczną χ funkcją przynależności μ .

Zgodnie z [34] rozważamy przestrzeń prawdopodobieństwa (Ω, B, P) z σ -ciałem B borelowskich podzbiorów zbioru Ω . Rozmytym zdarzeniem A w Ω nazywamy każdy rozmyty zbiór A w Ω , którego funkcja przynależności $\mu_A : \Omega \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$ jest mierzalna po

borelowsku. Prawdopodobieństwem $P(A)$ zdarzenia rozmytego A nazywamy wtedy całkę Lebesgue'a-Stieltjesa postaci

$$P(A) = \int_{\Omega} \mu_A(x) dP(x). \quad (2.3)$$

Powyższa równość wyraża prawdopodobieństwo zdarzenia rozmytego jako wartość oczekiwaną jego funkcji przynależności. Istnienie tej całki jest zagwarantowane założeniem mierzalności funkcji μ_A . Z własności całki wynikają, dla tak określonego prawdopodobieństwa, m.in. poniższe konsekwencje:

$$1) \quad 0 \leq P(A) \leq 1, \quad (2.4)$$

$$2) \quad A \subset B \rightarrow P(A) \leq P(B), \quad (2.5)$$

$$3) \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B), \quad (2.6)$$

$$4) \quad P(A') = 1 - P(A), \quad (2.7)$$

gdzie relacje zawierania i równości w nich występujące są natury rozmytej, tj.

$$a) \quad A \subset B \Leftrightarrow \mu_A(x) \leq \mu_B(x), \quad (2.8)$$

$$b) \quad A = B \Leftrightarrow \mu_A(x) = \mu_B(x), \quad (2.9)$$

a operacje mnogościowe dopełnienia, sumy i przekroju zbiorów rozmytych opisują trzyni poniższe wzory, dla wygody wyrażone w terminach funkcji przynależności takich zbiorów:

$$c) \quad \mu_{A'}(x) = 1 - \mu_A(x), \quad (2.10)$$

$$d) \quad \mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \quad (2.11)$$

$$e) \quad \mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \quad (2.12)$$

dla wszystkich argumentów x .

Przyjmując jako rozmyty zbiór pusty \emptyset taki zbiór rozmyty, którego funkcja przynależności μ_{\emptyset} jest stale równa 0, otrzymujemy ponadto kolejną własność prawdopodobieństwa (2.3)

$$5) \quad P(\emptyset) = 0. \quad (2.13)$$

Koncepcja Zadeha [33] pozwala także na określenie niezależności zdarzeń rozmytych i prawdopodobieństwa warunkowego, a także momentów i entropii takich zdarzeń.

3. DEFINICJE AKSJOMATYCZNE

Pomimo tego, że podejście Zadeha zyskało sobie dużą popularność jako zwięzłe i proste rachunkowo, to pojawiły się bardziej sformalizowane koncepcje rachunku prawdopodobieństwa dla zdarzeń rozmytych.

I tak C. Negoita i D. Ralescu [26] zdefiniowali tzw. rozmytą przestrzeń prawdopodobieństwa (Ω, K, q) , gdzie K oznacza σ -ciało zdarzeń rozmytych rozumiane jako rodzina zbiorów rozmytych

$\{A_i\}_{i=1}^n$ takich, że $\mu_{A_i}: \Omega \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$, dla $i = 1, 2, 3, \dots$, przy czym

$$1) \quad \Omega \in K \quad (3.1)$$

$$2) \quad A_i \in K \text{ dla } i = 1, 2, 3, \dots \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in K, \quad (3.2)$$

$$3) \quad A \in K \rightarrow A' \in K, \quad (3.3)$$

a $q: K \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$ jest prawdopodobieństwem takich zdarzeń określonym poprzez układ aksjomatów:

$$1) \quad q(\Omega) = 1, \quad (3.4)$$

$$2) \quad q(A) \geq 0 \text{ dla dowolnego } A \in K, \quad (3.5)$$

$$3) \quad q\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} q(A_k) \text{ dla dowolnego ciągu}$$

rozmytych zdarzeń z K parami rozłącznych. (3.6)

W pracy E.P. Klementa [17] zamiast warunku (3.1) używa się bardziej ogólnego warunku:

$$A_{[p]} \in K \text{ dla dowolnego } p \in \langle 0, 1 \rangle, \quad (3.7)$$

gdzie $A_{[p]}$ oznacza rozmyty zbiór o stałej funkcji przynależności $\mu_{A_{[p]}}: \Omega \rightarrow \{p\}$, gdzie p jest konkretną wartością z przedziału $\langle 0, 1 \rangle$. Wówczas rodzinę K^* spełniającą (3.7), (3.2) i (3.3) nazywamy σ -ciałem zdarzeń rozmytych.

Koncepcja ta posłużyła do określenia prawdopodobieństwa zdarzenia rozmytego jako funkcji $m: K^* \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$ spełniającej warunki (E.P. Klement, W. Schwyhla, R. Lowen [18]):

$$1) \quad m(\emptyset) = 0, \quad m(\Omega) = 1, \quad (3.8)$$

$$2) \quad m(A \cup B) + m(A \cap B) = m(A) + m(B), \quad (3.9)$$

$$3) \quad m\left(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(A_n) \text{ dla dowolnego ciągu}$$

wstępujących (patrz (7.5) zdarzeń rozmytych z K^* . (3.10)

Trójkę (Ω, K^*, m) nazywamy wtedy rozmytą przestrzenią probabilistyczną. Warunki (3.8) oznaczają ograniczoność, (3.9) – addytywność w postaci tzw. waluacji (np. [9]), a warunek (3.10) – ciągłość z dołu funkcji m .

Podobną koncepcję, ale z warunkiem zstępującego ciągu zdarzeń rozmytych zamiast (3.10) prezentuje praca [31].

Zarówno koncepcja C. Negoity i D. Ralescu [26], jak i prace [18] i [31] nie zapewniają zachodzenia warunku

$$m(A') = 1 - m(A) \quad (3.11)$$

tak charakterystycznego dla zwykłego prawdopodobieństwa.

W celu uniknięcia tej niezgodności, S. Heilpern w [13] zdefiniował tzw. g -rozmyte prawdopodobieństwo. Do warunków (3.4), (3.5) i (3.6) dodał warunek

$$q(\alpha * A_x) = g(\alpha) \cdot q(A_x), \quad (3.12)$$

gdzie $g: \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$ jest rosnącą i ciągłą funkcją rzeczywistą taką, że $g(0) = 0$ i $g(1) = 1$, A_α oznacza α -przekrój zbioru rozmytego A , tzn. nierozmyty zbiór postaci

$$A_\alpha = \{x \in \Omega : \mu_A(x) \geq \alpha, \alpha \in \langle 0, 1 \rangle\}, \quad (3.13)$$

a zapis $\alpha * A_\alpha$ określa rozmyty zbiór o funkcji przynależności danej wzorem [35]:

$$\mu_{\alpha * A_\alpha}(x) = \begin{cases} \alpha, & \text{gdy } x \in A_\alpha, \\ 0, & \text{gdy } x \notin A_\alpha. \end{cases} \quad (3.14)$$

W przypadku gdy g spełnia warunek

$$g(1-x) = g(x) \text{ dla } x \in \langle 0, 1 \rangle,$$

to warunek (3.11) jest spełniony. Jako przykłady funkcji g S. Heilpern w [13] podaje $g(x) = x$ i $g(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x$.

Innym pomysłem na to, by równość (3.11) była prawdziwa w budowanej teorii, jest idea K. Piaseckiego tzw. P-miary.

4. P - MIARA

W pracy [28] K. Piasecki zdefiniował tzw. P-miarę, tj. prawdopodobieństwo zdarzeń rozmytych, które spełniałoby wszystkie naturalne własności prawdopodobieństwa (2.4) – (2.7) i (3.11). K. Piasecki zanegował dotychczasowe definicje zbioru rozmytego pustego (patrz warunek (2.13)), przestrzeni rozmytej (zbioru rozmytego o funkcji przynależności stale równej 1) i rozłączności zbiorów rozmytych. Zastąpił je pojęciami analogicznymi, które nazwał W-pojęciami (od ang. „weak” – słaby) [27]:

- a) każdy zbiór rozmyty V taki, że $V' \subset V$ nazywamy W-rozmytą przestrzenią;
- b) każdy zbiór rozmyty Y taki, że $Y \subset Y'$ nazywamy W-rozmytym zbiorem pustym;
- c) rozmyte zbiory U i Z nazywamy W-rozłącznymi, gdy $U \subset Z'$ lub $Z \subset U'$.

(Operacje zawierania (\subset) i dopełnienia ($'$) są tutaj rozumiane w sensie definicji (2.8) i (2.10)).

Używając powyższe W-pojęcia, K. Piasecki wprowadził definicję miękkiego rozmytego σ -ciała \bar{K} , tj. rozmytego σ -ciała K określonego własnościami (3.7), (3.2), (3.3) i takiego, że nie zawiera zbioru $A_{\frac{1}{2}}$ (patrz (3.7)), tzn.

$$\tilde{K} = K - \left\{ A_{\left[\frac{1}{2} \right]} \right\} \quad (4.1)$$

Wówczas każde odwzorowanie $p : \tilde{K} \rightarrow <0, +\infty)$ spełniające warunki

$$1) \quad p(A \cup A') = 1 \quad \text{dla } A \in \tilde{K} \quad (4.2)$$

$$2) \quad p\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} p(A_n) \quad \text{dla ciągu } (A_n)_{n=1}^{\infty} \text{ W-rozłącz-} \quad (4.3)$$

cznych parami zbiorów rozmytych z \tilde{K}

nazywamy rozmytą P-miarą na \tilde{K} , a trójkę (Ω, \tilde{K}, p) nazywamy miękką rozmytą przestrzenią probabilistyczną.

Warunek (4.2) oznacza unormowanie, a (4.3) stwierdza W-adytywność P-miary.

W pracy [28] K. Piasecki udowodnił, że P-miara jest ciągłą i niemalejącą funkcją spełniającą także warunki:

$$1) \quad p(A \cap A') = 0, \quad (4.4)$$

$$2) \quad p(A') = 1 - p(A), \quad (4.5)$$

$$3) \quad p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B), \quad (4.6)$$

$$4) \quad p(A \cup B) = p(A) \iff p(B) = 0, \quad (4.7)$$

$$5) \quad p(A \cap B) = p(A) \iff p(B) = 1, \quad (4.8)$$

$$6) \quad p(A \cap B) = 0 \iff p(A) = p(B) \text{ i } B \subset A. \quad (4.9)$$

Więcej informacji o P-mierze i jej zastosowaniach znajduje się w [29]. Pewną modyfikację W-pojęć można znaleźć w [30].

5. UJĘCIE YAGERA

Opisane wcześniej prawdopodobieństwa zdarzeń rozmytych cechuje pewna niekonsekwencja. Otóż niepokojące jest to, że prawdopodobieństwo zdarzenia rozmytego jest liczbą. Jest to, co prawda, zgodne z definicją prawdopodobieństwa, do której jesteśmy przyzwyczajeni, ale może bardziej naturalne byłoby wymagać od niego pewnej rozmytości. Przecież bardzo często można usłyszeć komentarze typu: „Jest wysoce prawdopodobne, że ...”, „Jest mało prawdopodobne, że ...”, które wyrażają rozmytą informację o pojęciu prawdopodobieństwa. Taka też była idea R. Yagera [32]. Koncepcja ta bazuje na pojęciu α -przekroju zbioru rozmytego (3.13) oraz twierdzeniu o dekompozycji i zasadzie rozszerzania [35].

Twierdzenie o dekompozycji stwierdza, że każdy zbiór rozmyty A można zapisać jako rozmytą sumę (2.11) jego α -przekrojów w postaci

$$A = \bigcup_{\alpha=0}^1 \alpha * A_{\alpha}, \quad (5.1)$$

gdzie symbol U oznacza operację supremum, a $\alpha * A_\alpha$ opisuje wzór (3.14). Zasada rozszerzania pozwala wówczas przenieść funkcję określoną na zbiorach zwykłych na funkcję przekształcającą zbiory rozmyte według wzoru

$$f(A) = U_{\alpha=0}^1 \alpha * f(A_\alpha), \quad (5.2)$$

gdzie $f(A_\alpha)$ jest obrazem nierozmytego zbioru A_α (3.13) przy zadanej funkcji f .

Niech (X, B, P) będzie zatem pewną przestrzenią prawdopodobieństwa i niech A będzie zdarzeniem rozmytym w sensie Zadeha (patrz rozdział 2). Wówczas wszystkie α -przekroje zbioru A są zbiorami borelowskimi, a więc elementami σ -ciała B (nierozmytego σ -ciała podzbiorów borelowskich zbioru X). Stosując do równości (5.1) zasadę rozszerzania (5.2) w przypadku funkcji P , otrzymujemy tzw. rozmyte prawdopodobieństwo $\tilde{P}(A)$ rozmytego zdarzenia A postaci

$$\tilde{P}(A) = U_{\alpha=0}^1 \alpha * P(A_\alpha), \quad (5.3)$$

gdzie $P(A_\alpha)$ jest prawdopodobieństwem nierozmytego zdarzenia A_α . Traktując liczbę $P(A_\alpha) \in \langle 0, 1 \rangle$ jako jednoelementowy podzbiór $\{P(A_\alpha)\}$ przedziału $\langle 0, 1 \rangle$ można łatwo zauważyć, że związek (5.3) przedstawia zbiór rozmyty określony na $\langle 0, 1 \rangle$. W tym ujęciu rozmyte prawdopodobieństwo \tilde{P} jest zbiorem rozmytym, a nie liczbą rzeczywistą z przedziału $\langle 0, 1 \rangle$.

Idea Yagera pozwala wprowadzić pojęcia niezależności i prawdopodobieństwa warunkowego zdarzeń rozmytych, pozwala także na analizę rozmytego prawdopodobieństwa jako stosunku mocy odpowiednich zbiorów rozmytych. Ciekawe propozycje i przykłady zawiera też praca [36].

6. $B(n)$ - PRAWDOPODOBIEŃSTWO

Jeszcze inną koncepcję prawdopodobieństwa przedstawili R. Antoniewicz i W. Ostasiewicz w [1]. Zaproponowali oni nową definicję zbioru rozmytego. Wartością funkcji przynależności takiego zbioru miałyby być n -elementowy ciąg zer i jedynek. Kolejne wyrazy tego ciągu miałyby informować o posiadaniu lub nie kolejnej i -tej cechy ($i = 1, 2, \dots, n$) opisującej dany element. Tak więc przez $B(n)$ -rozmyty zbiór rozumiemy teraz każdą funkcję $\alpha : X \rightarrow \{0, 1\}^n$, gdzie $\{0, 1\}^n$ oznacza iloczyn prosty dwupunktowej algebry Boole'a $\{0, 1\}$ z działaniami:

$$\begin{array}{c|c|c} v & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \end{array} , \quad \begin{array}{c|c|c} v & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \end{array} , \quad 0^c = 1, 1^c = 0. \quad (6.1)$$

Dla $n = 1$ B(n)-rozmyty zbiór jest zbiorem w ujęciu Cantora i w tym sensie to podejście jest także uogólnieniem pojęcia zbioru. Dla B(n)-rozmytych zbiorów na Ω , wykorzystując wzory (6.1), przyjmujemy [2]:

$$1) \quad (\alpha \cup \beta)(x) = \alpha(x) \vee \beta(x), \quad (6.2)$$

$$2) \quad (\alpha \cap \beta)(x) = \alpha(x) \wedge \beta(x), \quad (6.3)$$

$$3) \quad \alpha^c(x) = \alpha'(x). \quad (6.4)$$

Rodzina $F(\Omega)$ wszystkich B(n)-rozmytych zbiorów na Ω z działaniami (6.2)-(6.4) tworzy ciało. Niech (Ω, A, P) będzie zwykłą przestrzenią probabilistyczną zaś $p : \{0, 1\}^n \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$ pewną miarą prawdopodobieństwa na algebrze Boole'a $\{0, 1\}^n$. Przez zdarzenie rozmyte α rozumiemy każdy B(n)-rozmyty zbiór $\alpha \in F(\Omega)$ taki, że złożenie $p \circ \alpha$ jest funkcją borelowską w (Ω, A) . Zbiór B(n)-rozmytych zdarzeń w (Ω, A) oznaczamy $B(A)$. Rodzina $B(A)$ jest borelowskim σ -ciałem. Wówczas funkcja $Q : B(A) \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$ określona wzorem

$$Q(\alpha) = \int_{\Omega} p \circ \alpha \, dP \quad (6.5)$$

jest miarą prawdopodobieństwa na $(\Omega, B(A))$ zdarzenia rozmytego α . Trójkę $(\Omega, B(A), Q)$ nazywamy B(n)-rozmytą przestrzenią probabilistyczną.

7. KONCEPCJA CHENGA I LIU

Kolejną próbą konstrukcji rozmytego prawdopodobieństwa jest teoria Chenga i Liu [6]. Używają oni dla zbiorów rozmytych A i B na Ω następujących operacji rozmytych:

$$1) \quad \mu_{A \oplus B}(x) = \min \{ \mu_A(x) + \mu_B(x), 1 \}, \quad (7.1)$$

$$2) \quad \mu_{A \ominus B}(x) = \max \{ \mu_A(x) - \mu_B(x), 0 \}, \quad (7.2)$$

$$3) \quad \mu_{\alpha * A}(x) = \min \{ \alpha \cdot \mu_A(x), 1 \}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (7.3)$$

$$4) \quad \mu_{\bigoplus_{n=1}^{\infty} A_n}(x) = \min \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu_{A_n}(x), 1 \right\}, \quad (7.4)$$

i operacji granicznych:

$$5) \quad A_n \uparrow A \Leftrightarrow \mu_{A_1}(x) \leq \mu_{A_2}(x) \leq \dots \text{ i } \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{A_n}(x) = \mu_A(x), \quad (7.5)$$

$$6) A_n \downarrow A \Leftrightarrow \mu_{A_1}(x) \geq \mu_{A_2}(x) \geq \dots \text{ i } \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{A_n}(x) = \mu_A(x), (7.6)$$

dla wszystkich $x \in \Omega$.

Wówczas klasę zbiorów rozmytych zamkniętą ze względu na działania (2.10), (2.11), (2.12) oraz (7.1) i (7.2) i operacje (7.5), (7.6) nazywamy rozmytym σ -ciałem zbiorów rozmytych na Ω i oznaczamy L . Każde odwzorowanie $\pi: L \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$ spełniające warunki

$$1) \pi(\Omega) = 1, (7.7)$$

$$2) \pi\left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \pi(A_n) \text{ dla } A_n \in L \text{ i } \bigoplus_{n=1}^{\infty} A_n \in L (7.8)$$

nazywamy rozmytym prawdopodobieństwem, a trójkę (Ω, L, π) rozmytą przestrzenią probabilistyczną. Tak określona funkcja spełnia te wszystkie własności, które posiada zwykle prawdopodobieństwo. Przy tym, jeśli (Ω, F, P) jest klasyczną przestrzenią probabilistyczną, to rodzina zbiorów rozmytych

$$C = \{A : \mu_A \text{ jest } F\text{-mierzalna}\}$$

jest rozmytym σ -ciałem, a funkcja

$$\pi(A) = \int_{\Omega} \mu_A \, dP (7.9)$$

jest dla $A \in C$ miarą prawdopodobieństwa.

Warto zauważyć, że równość (7.9) jest identyczna z tym co Zadeh nazwał prawdopodobieństwem zdarzenia rozmytego (2.3).

8. DWOISTA ROZMYTOŚĆ

Jeszcze inne ujęcie rozmytości zaproponował K. Atanassov wprowadzając pojęcie zbioru dwoistorozmytego [3]. Takim zbiorem w przestrzeni X nazywamy, przez analogię do (1.2), obiekt postaci

$$A = \{(x, \mu_A(x), \nu_A(x) : x \in X\}, (8.1)$$

gdzie $\mu_A, \nu_A : X \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$ są funkcjami odpowiednio przynależności i nieprzynależności zbioru dwoistorozmytego, przy czym musi zachodzić warunek $0 \leq \mu_A(x) + \nu_A(x) \leq 1$.

Problem korelacji takich zbiorów opisuje praca [11], a dyskretną wersję rachunku prawdopodobieństwa zdarzeń dwoistorozmytych można znaleźć w [12]. Przypadek ogólny przedstawiono w [24]. Zgodnie z tą pracą zakładamy, że dana jest klasyczna przestrzeń prawdopodobieństwa (Ω, F, P) .

Zdarzeniem dwoistorozmytym A w zbiorze Ω nazywamy wtedy każdy taki zbiór dwoistorozmyty A , którego funkcje przynależności μ_A i nieprzynależności ν_A są F -mierzalne. Wówczas całkę Lebesgue'a-Stieltjesa postaci

$$P(A) = \int_{\Omega} \frac{\mu_A(x) - \nu_A(x) + 1}{2} P(dx) \quad (8.2)$$

nazywamy jego prawdopodobieństwem. Tak określona funkcja P posiada te wszystkie własności, które przypisujemy prawdopodobieństwu zwykłych zdarzeń. W przypadku upraszczania się sytuacji dwoistorozmytej do sytuacji rozmytości zadehowskiej, tj. wtedy, gdy $\nu_A = 1 - \mu_A$, wzór (8.2) redukuje się do wzoru (2.3), a przez to ujęcie prawdopodobieństwo opisane wzorem (8.2) obejmuje najszerszą klasę zdarzeń rozmytych. W pracy [24] oprócz miary probabilistycznej zdarzeń dwoistorozmytych rozważa się także miary entropowe i energetyczne takich zdarzeń oraz ich powiązania korelacyjne będące rozszerzeniem idei z pracy [11].

9. UWAGI KOŃCOWE

W powyższym artykule zaprezentowaliśmy różne koncepcje rachunku prawdopodobieństwa zdarzeń rozmytych i ich ewolucję od początków teorii zbiorów rozmytych. Chcieliśmy przy tym zwrócić uwagę na ich różnorodność i bogactwo, a przy tym wskazać wkład polskich matematyków w rozwiązywanie tego problemu. Duża ilość prezentowanych idei jest dowodem na to, że zagadnienie łączenia rozmytości z losowością jest wciąż żywe, i że nieustannie trwają poszukiwania rozwiązania optymalnego. Z braku miejsca nie omówiliśmy tutaj innych koncepcji rozmytej propabilistyki (np. [4]) i innych jej ujęć, jak chociażby pojęcia rozmytej zmiennej losowej ([12], [25], [29]), pojęcia zbiorów probabilistycznych [7], [15], czy też idei prawdopodobieństwa lingwistycznego i lingwistycznej zmiennej losowej [35], [10]. Chcieliśmy jedynie przekonać czytelnika o odmienności idei rozmytości i losowości oraz zasygnalizować rolę M. Lubańskiego w rozpowszechnieniu „rozmytości” w Polsce już we wczesnym stadium istnienia tej teorii.

LITERATURA

- [1] R. Antoniewicz i W. Ostasiewicz, *Koncepcja rozmytego rachunku prawdopodobieństwa. Badania operacyjne w praktyce gospodarczej*, Akademia Ekonomiczna, Katowice 1983, 5-12.
- [2] R. Antoniewicz i W. Ostasiewicz, *On fuzzy events*, Proc. Polish Symp. on Interval and Fuzzy Mathematics in Poznań 1983. Instytut Matematyki Politechniki Poznańskiej, Poznań 1985, 17-22, ed by J. Albrycht and H. Wiśniewski.

- [3] K. Atanassov i S. Stoeva, *Intuitionistic fuzzy sets*, wydawnictwo jak w [2], 23-26.
- [4] J.F. Baldwin i B.W. Pilsworth, *A theory of fuzzy probability*, Univ. of Bristol, Engineering Mathematics Department, Research Report, EM/FS/15 (1978), 53-61.
- [5] A.N. Borisov i J. Osis, *Metodika ocenki funkcji przynależności elementów rozmytego mnożestwa*, Kibernetika i diagnostika, Riga 1970, wyd. 4, 125-134 (w jęz. rosyjskim).
- [6] S. Cheng i D. Liu, *Fuzzy probability space and extension theorem*, J. Math. Anal. Appl. 113 (1986), 188-198.
- [7] E. Czogała i W. Pedrycz, *Elementy i metody teorii zbiorów rozmytych*, PWN, Warszawa 1985.
- [8] H. Diskhant, *About membership functions estimation*, Fuzzy Sets and Systems 5 (1981), 141-147.
- [9] J. Drewniak, *Podstawy teorii zbiorów rozmytych*, skrypt Uniwersytetu Śląskiego, Nr 347, Katowice 1984.
- [10] T. Gerstenkorn, E. Rakus, *O użyteczności pojęć zmiennej rozmytej i zmiennej lingwistycznej w naukach przyrodniczych*, Listy Biometryczne 27, 1-2 (1990), 3-12.
- [11] T. Gerstenkorn, J. Mańko, *Correlation of intuitionistic fuzzy sets*, Fuzzy Sets and Systems 44, (1991), 39-43.
- [12] T. Gerstenkorn, J. Mańko, *Probability of fuzzy intuitionistic sets*, Bulletin pour les Sous Ensembles Flous et Leurs Applications 45, (1990/1991), 128-136.
- [13] S. Heilpern, *Wybrane zagadnienia z teorii zbiorów rozmytych*, Matematyka Stosowana 16 (1980), 27-28.
- [14] M. Heller, M. Lubański, Sz.W. Ślaga, *Zagadnienia filozoficzne współczesnej nauki – Wstęp do filozofii przyrody*, Akademia Teologii Katolickiej, Warszawa 1982.
- [15] K. Hirota, *Concept of probabilistic sets*, Fuzzy Sets and Systems 5 (1981), 31-46.
- [16] J. Kacprzyk, *Zbiory rozmyte w analizie systemowej*, PWN, Warszawa, 1986.
- [17] E.P. Klement, *Fuzzy σ -algebras and fuzzy measurable functions*, Fuzzy Sets and Systems 4 (1980), 83-93.
- [18] E.P. Klement, W. Schwyhla i R. Lowen, *Fuzzy probability measures*, Fuzzy Sets and Systems 5 (1981), 21-30.
- [19] H. Kwakernaak, *Fuzzy random variables – definitions and theorems*, Inform. Sci. 15 (1978), 1-29.
- [20] M. Lubański, *Die Soft-Algebra und Fuzzy-Mengen*, *Proceedings of the Polish Symposium on Interval and Fuzzy Mathematics in Poznań* 1983 ed. by J. Albrycht and H. Wiśniewski, Institute of Mathematics Techn. University of Poznań, Wydawn. Politechniki Poznańskiej 1985, 125-129.

- [21] M. Lubański, *Nazwy nieostre a zbiory rozmyte*, *Studia Philosophiae Christianae*, Akademia Teologii Katolickiej, Warszawa 14,1 (1978), 31-48.
- [22] M. Lubański, *Zbiory i algebry*, *Studia Philosophiae Christianae*, Akademia Teologii Katolickiej, Warszawa 18,1 (1982), 199-207.
- [23] M. Lubański, *Zbiory rozmyte i operacje na nich*, *Roczniki Filozoficzne* 26,3 (1978), 77-87.
- [24] J. Mańko, *Prawdopodobieństwo, entropia i energia w teorii zbiorów dwostorozmytych*, rozprawa doktorska, Uniwersytet Łódzki, Łódź 1992.
- [25] S. Nahmias, *Fuzzy variables*, *Fuzzy Sets and Systems* 1 (1978), 98-110.
- [26] C. V. Negoita i D.A. Ralescu, *Application of fuzzy sets to system analysis*, Birkhäuser, Basel 1975.
- [27] K. Piasecki, *New concept of fuzzy sets*, *Proc. Polish Symp. on Interval and Fuzzy Mathematics in Poznań 1983*, Instytut Matematyki Politechniki Poznańskiej, Poznań 1985, 193-196.
- [28] K. Piasecki, *Probability of fuzzy events defined as denumerable additivity measure*, *Fuzzy Sets and Systems* 17 (1985), 271-284.
- [29] K. Piasecki, *Fuzzy P-measures and their application in decision making*, *Combining Fuzzy Imprecision with Probabilistic Uncertainty in Decision Making*, J. Kacprzyk i M. Fedrizzi (eds.), Springer Verlag 1988.
- [30] K. Piasecki i Z. Świtalski, *A remark on the definition of fuzzy P-measure and the Bayes formula*, *Fuzzy Sets and Systems* 27 (1988), 379-383.
- [31] P. Smets, *Probability of fuzzy events: an axiomatic approach*, *Fuzzy Sets and Systems* 7 (1982), 153-164.
- [32] R. Yager, *A note on probabilities of fuzzy events*, *Inform. Sci.* 18 (1979), 113-129.
- [33] L.A. Zadeh, *Fuzzy sets*, *Inform. Control* 8 (1965), 338-353.
- [34] L.A. Zadeh, *Probability measures of fuzzy events*, *J. Math. Anal. Appl.* 23 (1968), 421-427.
- [35] L.A. Zadeh, *The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning – parts I, II, III*, *Inform. Sci.* 8 (1975), 199-249 i 301-357, *Inform. Sci.* 9 (1976), 43-80.
- [36] L.A. Zadeh, *Fuzzy probabilities*, *Inform. Proc. and Management* 20 (1984), 363-372.

**THE PHILOSOPHY OF FUZZINESS
AND THE MATHEMATICS OF RANDOMNESS**

Summary

In the article we present various conceptions of the probability of fuzzy events as well as their evolution from the beginnings of fuzzy set theory. We want to call one's attention to their great variety and, with that, show the contribution of Polish mathematicians to the solving of this problem. The large number of ideas presented here witnesses the fact that the question of the connecting of fuzziness with randomness is still vivid, and that the search for an optimal solution is being continued without cease.

We wish to convince the reader of the dissimilarity of the ideas of fuzziness and randomness as well as to stress the role of M. Lubański in the propagation of „fuzziness” in Poland at the very early stage of the existence of this theory.