Anna Lemańska

"Dwa paradygmaty matematyki : studium z dziejów i filozofii matematyki", Tadeusz Batóg, Poznań 1996 : [recenzja]

Studia Philosophiae Christianae 33/1, 205-208

1997

Mejbaum zdaje się uważać, że wyjaśnianie biologiczne mieści się w ramach wyjaśniania genetyczno-teoretycznego.

Z rozważań Szczecińskiego Filozofa – biologowie teoretycy i filozofowie biologii mogą czerpać różnorakie wskazówki w tworzeniu biologicznych procedur eksplanacyjnych.

Pojawia się pytanie, na ile pojęcie „standardów przyrody" może być uznane jako próba ponownego określania praw nauki? (Propozycja ta nie jest bagatelna). Chodzi tu o takie przedstawienie pojęcia prawa przyrody, które byłoby bliższe rzeczywistości niż dotychczasowe rozumienie praw ściśle ogólnych. Oprócz zatem mało sprecyzowanej koncepcji „standardów zachowania się" – bynajmniej na użytek wyjaśniania faktów biologicznych – do interesujących wskazówek można zaliczyć:

1. zrelatywizowanie logicznych schematów do stanu wiedzy o rzeczywistości,
2. odkrywanie nowych praw i prawidłowości przyrody wraz z postępem nauki (bez wpadania w skrajność, iż odkrycie nowego tła wiąże się z narodzinami nowego standardu, s. 117),
3. uznanie, że wyjaśnianie jest procesem niestacjonarnym, tzn. parametry procesu zmieniają się z czasem w sposób nieprzewidziany (rola przypadku), (s. 21),
4. procedury eksplanacyjne powinny zmierzać do odkrycia warunków, w których zdarzenie może zaistnieć (s. 124),
5. na eksplanację składają się różnorodne czynności i tylko niektóre z nich mają charakter rozumowań dedukcyjnych, (s. 125),
6. każdy wynik wyjaśniania musi odwoływać się do materiału faktycznego (s. 126),
7. postępowanie eksplanacyjne powinno zmierzać do wskazania mechanizmu wskazującego drogę od eksplanansa do eksplanandum,
8. to samo zjawisko czy zdarzenie może podlegać innym wyjaśnieniom (nie koniecznie alternatywnym – jak chce Mejbaum – s. 133), tzn. uznać różne typy i rodzaje naukowej eksplanacji,
9. zachować H-O strukturę schematu wyjaśniania naukowego, tj. relację między eksplanansem i eksplanandum,
10. w związkach między eksplanansem i eksplanandum odróżnić relacje ontologiczne od epistemicznych,
11. pozbycie się pretensji do uniwersalności schematów eksplanacyjnych (s. 136),
12. porzucenie snów o jednej uniwersalnej teorii i jednym uniwersalnym prawie przyrody.

Na zakończenie warto stwierdzić, iż najbliżej tropu eksplanacji faktów biologicznych – w oparciu o prawa biologiczne – zdaje się być J. Kmita (por. np. *O dwóch rodzajach wyjaśniania*, Studia Filozoficzne nr 9 (1974), 25-39).

Wiesław Dyk

T. Batóg, *Dwa paradygmaty matematyki. Studium z dziejów i filozofii matematyki*, Poznań 1996, s. 104.

Od Starożytności matematyka (geometria) uchodziła za wzór wiedzy pewnej i ścisłej. Jednakże pobieżny nawet przegląd historii matematyki ukazuje nam obraz tej dyscypliny daleki od przypisywanego jej idealnego wzorca. W dowodach zdarzały się luki, matematycy opierali się często na intuicjach, które wiązali z pojęciami, a nie na ich precyzyjnych określeniach. W XVII, XVIII w. brak ścisłych definicji podstawowych pojęć analizy matematycznej zaowocował pojawieniem się paradoksów. Podobna sytuacja powtórzyła się pod koniec XIX w. w teorii mnogości. Dopiero na przełomie XIX i XX w. poddano krytycznej analizie podstawy metody matematycznej i dopracowano się sformułowania jasnych zasad, którymi powinni kierować się uczeni, budując teorie matematyczne. W swej książce T. Batóg ukazuje historię kształtowania się kanonów ścisłości wiedzy matematycznej, które doprowadziły do istotnych przeobrażeń w rozumieniu metody aksjomatyczno-dedukcyjnej. Według Autora te przeobrażenia były na tyle znaczące, że można mówić o zmianie paradygmatu matematyki z euklidesowego, który został sprecyzowany w *Elementach* Euklidesa i trwał aż do początku XX wieku, na logiczno-teoriomnogościowy obecnie obowiązujący.

Książka składa się z trzech rozdziałów i dodatku. Zaopatrzona jest także w indeksy: nazwisk i terminów.

W rozdziale pierwszym (*Paradygmat Euklidesa*) T. Batóg omawia istotne cechy metody uprawiania matematyki zawarte w *Elementach geometrii* Euklidesa. Wskazuje, że matematyka jest tu budowana w postaci systemu quasi-aksjomatycznego (s. 20). Według Autora w *Elementach* nie mamy jeszcze do czynienia z systemem w pełni aksjomatycznym w dzisiejszym tego terminu znaczeniu, gdyż Euklides nie wyróżniał żadnych pojęć pierwotnych (s. 14), a w dowodach często opierał się nie tylko na przyjętych postulatach i aksjomatach, lecz również na tzw. oczywistych faktach, które wynikały m.in. z rysunków (s. 18-19). Te luki w dowodach były spowodowane tym, że brakowało precyzyjnego określenia, czym jest dowód matematyczny, a opierano się tylko na jego intuicyjnym rozumieniu (s. 19). Taki stan rzeczy trwał aż do końca XIX w.

W rozdziale drugim (*Ku nowemu paradygmatowi*) Autor charakteryzuje istotne przeobrażenia w matematyce dziewiętnastowiecznej, które na początku XX w. doprowadziły do zmiany paradygmatu matematyki. Są nimi: powstanie teorii mnogości, logiki matematycznej oraz geometrii nieeuklidesowych, arytmetyzacja analizy matematycznej, a także aksjomatyzacja arytmetyki liczb naturalnych i systemów geometrii (s. 25-56). Po kryzysie w teorii mnogości rozwój tych nowych idei przygotował grunt do sprecyzowania metody aksjomatyczno-dedukcyjnej.

Początkowe rozważania rozdziału trzeciego (*Paradygmat logiczno-teoriomnogościowy*) T. Batóg poświęca na wyszczególnienie takich własności paradygmatu logiczno-teoriomnogościowego, które odróżniają go od paradygmatu Euklidesa. Autor wskazuje na następujące cechy. (1) Podstawową teorią całej matematyki jest teoria mnogości (s. 57-58). (2) Język matematyczny stał się językiem sztucznym i jest oddzielony od języka potocznego (s. 58). (3) Definiowanie nowych pojęć odbywa się według jasno sformułowanych reguł (s. 58-61). (4) Nastąpiła aksjomatyzacja wszystkich teorii matematycznych (s. 61-62). (5) Odróżnia się teorię matematyczną od metateorii i język przedmiotowy od metajęzyka (s. 62-63). (6) Zostały podane precyzyjne definicje pojęć wynikania i dowodu (s. 63-65). Prezentacja teorii matematycznych w postaci systemów aksjomatyczno-dedukcyjnych sprawia, że obecnie żadne poprawnie przeprowadzone dowody w matematyce nie zależą od rysunków, intuicji matematyka, czy „oczywistych faktów", jak to miało miejsce przy uprawianiu matematyki zgodnie z paradygmatem Euklidesa.

W dalszej części tego rozdziału, na przykładzie teorii mnogości Zermelo-Fraenkla i arytmetyki liczb rzeczywistych Hilberta-Tarskiego, Autor pokazuje realizację w praktyce badawczej matematyków paradygmatu logiczno-teoriomnogościowego (s. 67-80). Następnie T. Batóg zadaje pytanie, czy powstała w połowie lat czterdziestych teoria kategorii nie stanowi podstawy dla ukształtowania się nowego paradygmatu odmiennego od logiczno-teoriomnogościowego. Zdaniem Autora jednak „teoria kategorii nie wnosi do matematyki przełomu porównywalnego z tym, którego dokonała teoria mnogości wespół z logiką" (s. 81). Zatem nie można mówić o nowym paradygmacie.

W rozdziale tym T. Batóg ustosunkowuje się także do wniosków wynikających z twierdzeń limitacyjnych. Twierdzenia te świadczą, zdaniem Autora, o osiągnięciu przez metodę aksjomatyczną bardzo wysokiego „stopnia samoświadomości (samowiedzy)" (s. 86) i nie można mówić, co czasem jest podnoszone, o poznawczej ograniczoności, czy klęsce tej metody (s. 86). Może tylko okazać się konieczne przyjęcie dodatkowych aksjomatów, „aby jakoś rozstrzygnąć ewentualne praktycznie napotkane problemy nierozstrzygalne" (s. 86). Autor stwierdza jednak, że będzie się to dokonywało „niezwykle rzadko". W szczególności zdanie Gödla „jest tak skomplikowane [...], że nikt nie zna jego matematycznej treści. [...] Będziemy więc zapewne czekać całe setki lat, aż matematycy poczują praktyczną potrzebę jego rozstrzygnięcia w jakimś kierunku" (s. 86). W tym miejscu wypada jednak zasygnalizować, że na przełomie lat siedemdziesiątych i osiemdziesiątych zostały skonstruowane zdania nierozstrzygalne na gruncie arytmetyki Peano o treści teorioliczbowej, a mianowicie zdania Parisa-Harringtona i Parisa-Kirby'ego. W ich przypadku treść matematyczna jest jasno określona i zrozumiała. Zdania te są prawdziwe w modelu standardowym, natomiast nie można ich udowodnić. Być może zatem rozszerzenie listy aksjomatów Peano staje się konieczne już obecnie.

Do książki jest dołączony – w formie dodatku – tekst wykładu *O potędze i słabościach matematyki*, wygłoszony przez Autora na inauguracji roku akademickiego 1977/78 na Uniwersytecie im. Adama Mickiewicza w Poznaniu.

T. Batóg w swej książce w syntetycznej formie przedstawia historię tworzenia podstaw dla doprecyzowania metody aksjomatyczno-dedukcyjnej. Dokonuje analizy systemu postulatów i aksjomatów przyjętych przez Euklidesa, wskazując na luki w tej teorii. Przedstawia także układ aksjomatów geometrii euklidesowej zaproponowany przez D. Hilberta. Pozwala to na porównanie obu systemów. T. Batóg prezentuje również dwie współczesne teorie aksjomatyczne: teorię mnogości i teorię liczb rzeczywistych, które spełniają wszystkie wymogi precyzji stawiane obecnie teoriom matematycznym. Na przykładach tych teorii widać postęp, jaki dokonał się w rozumieniu metody dedukcyjnej. Omawia także najważniejsze wydarzenia w historii matematyki w XIX w., wyznaczające rozwój matematyki dwudziestowiecznej. W literaturze polskiej brakuje tego typu opracowań. Książka *Dwa paradygmaty matematyki* wychodzi zatem na przeciw istniejącym zapotrzebowaniom.

Lektura recenzowanej książki nasuwa jednakże pewne wątpliwości odnośnie do zasadniczej tezy Autora, a mianowicie, iż istnieją dwa paradygmaty matematyki. Metoda aksjomatyczno-dedukcyjna niewątpliwie stanowi potężne narzędzie pracy współczesnego matematyka. Dzięki niej możemy uporządkować wiedzę matematyczną i prezentować uzyskane wyniki w przejrzysty, ścisły sposób. Pozwala to uniknąć błędów czy luk w dowodach. Metoda ta, co jest szczególnie istotne, zapewnia także w pełni intersubiektywną sprawdzalność wiedzy matematycznej. Tym samym nie ma w niej miejsca na intuicję badacza. Matematycy jednakże często pracują poza aksjomatycznymi systemami formalnymi, które stanowią zbyt sztywne ramy dla uzyskiwania nowych wyników. Z twierdzeń limitacyjnych, zwłaszcza Gödla, wynika bowiem istnienie pewnych ograniczeń metod formalnych. Zatem, jak się wydaje, warto postawić następujące pytanie: czy sprecyzowanie pojęć dowodu, wynikania, teorii aksjomatycznej zmieniło zasadniczo praktykę badawczą matematyków tak, by można było mówić o dwóch różnych paradygmatach matematyki, jak twierdzi T. Batóg.

Sam Autor nie neguje tego, że zarówno definiowanie pojęć, jak i dowodzenie twierdzeń w przeszłości w przeważającej liczbie przypadków było poprawne z punktu widzenia dzisiejszych standardów metody matematycznej. Można zatem podziwiać intuicję matematyków, którzy nie dysponując takim narzędziem, jakim jest logika matematyczna, uzyskiwali akceptowane współcześnie wyniki. Intuicje mogły zawodzić w pewnych „granicznych" sytuacjach, co nie wpływało w istotny sposób na rozwój wiedzy matematycznej, gdyż matematycy zwracali uwagę przede wszystkim na treść pojęć, a nie na formalną strukturę teorii. Matematyka miała dla nich charakter treściowy. Aksjomatyzacja, formalizacja języka, oddzielenie języka przedmiotowego od metajęzyka pozwoliły na rozwiązywanie problemów w tych „granicznych sytuacjach", w których intuicja nie mogła pomóc. Dla matematyków jednak w dalszym ciągu, jak się wydaje, istotny jest przede wszystkim aspekt treściowy twierdzeń i teorii.

W powyższym kontekście warto zwrócić uwagę na pewne kwestie związane z wykorzystywaniem komputerów w badaniach matematycznych, które Autor całkowicie pominął. Są one bowiem ważne dla określenia istoty metody matematyki współczesnej. W związku z tym tematem można wyróżnić dwie grupy problemów. Pierwsza dotyczy dowodów komputerowych i pytania, czy te dowody nie zmuszają do modyfikacji przyjętego pojęcia dowodu. Dowód komputerowy pozostaje wprawdzie w swoim zamierzeniu dowodem dedukcyjnym, ale nie ma żadnej niezawodnej metody sprawdzania poprawności takiego dowodu.

Druga grupa problemów dotyczy wykorzystywania komputerów do swoistego „eksperymentowania" z obiektami matematycznymi. Dzieje się tak m.in. w teorii układów dynamicznych i w teorii zbiorów fraktalnych. Część wyników uzyskanych w tych teoriach czeka na swoje dedukcyjne dowody zgodne ze standardami metody aksjomatycznej. Powstają zatem ważne pytania: czy nie następuje odchodzenie od paradygmatu logiczno-teoriomnogościowego, czy treściowy (a nie formalny) charakter matematyki nie wysuwa się na plan pierwszy, czy w gruncie rzeczy metody pracy matematyków współczesnych nie różnią się istotnie od metod stosowanych przez matematyków w przeszłości?

Autor podkreśla, że cechą charakterystyczną paradygmatu logiczno-teoriomnogościowego jest to, że teoria mnogości stanowi „fundament całej matematyki; za pomocą jej pojęć pierwotnych można zdefiniować wszystkie pojęcia matematyczne, a z jej aksjomatów można wyprowadzić wszystkie twierdzenia matematyki" (s. 57). Jednakże w *Dodatku* Autor wskazuje na istnienie konkurencyjnych teorii mnogości i stwierdza, że chyba trzeba odrzucić pogląd, „który utożsamia matematykę z teorią mnogości i teoriomnogościowym badaniem struktur" (s. 96-97), proponuje natomiast utożsamiać matematykę „z wąsko rozumianą logiką, tzn. z tzw. klasycznym rachunkiem logicznym" (s. 97). Jak się wydaje, matematyka jest zbyt bogata, by próbować utożsamiać ją z jakąś jedną szczególną teorią. Wśród filozofów matematyki toczą się spory, czy definicje pewnych podstawowych pojęć matematycznych w ramach określonej teorii aksjomatycznej oddają adekwatnie treść tych pojęć. Dotyczy to m.in. pojęcia funkcji, która została utożsamiona ze swoim wykresem, czy prawdopodobieństwa potraktowanego jako miara.

Jak się wydaje, zmiany, które zaszły w podstawach matematyki w XX wieku, polegały przede wszystkim na uświadomieniu sobie pewnych trudności wynikających z braku jasnych kryteriów określających, które dowody matematyczne są ścisłe. Konieczne stało się zatem uporządkowanie i wyrażenie w precyzyjnej formie intuicji, które matematycy zawsze wiązali z pojęciem dowodu. Można zatem mówić raczej o różnych standardach ścisłości, obowiązujących w historii matematyki, a nie zasadniczej zmianie perspektywy badawczej. Kwestia, czy mamy do czynienia z dwoma paradygmatami matematyki, pozostaje zatem otwarta. Pod dyskusję warto też poddać problem, czy wykorzystywanie komputerów powoduje tworzenie się nowego paradygmatu.

Anna Lemańska