Anna Lemańska

Zagadnienie istnienia obiektów matematycznych

Studia Philosophiae Christianae 35/2, 21-32

1999

Studia Philosophiae Christianae
ATK
35 (1999) 2

ANNA LEMAŃSKA
WYDZIAŁ FILOZOFII CHRZEŚCIJAŃSKIEJ, ATK

ZAGADNIENIE ISTNIENIA OBIEKTÓW MATEMATYCZNYCH

1. WSTĘP

Najważniejszym zagadnieniem filozofii matematyki jest kwestia sposobu istnienia przedmiotu matematyki. Rozstrzygnięcie bowiem tej sprawy w znacznej mierze wyznacza metody rozwiązywania innych filozoficznych problemów dotyczących tej dyscypliny naukowej. Jednocześnie jest to zagadnienie niezmiernie trudne, bowiem matematyka ukazuje nam różne swoje oblicza. Przedmiot matematyki nie jest materialny, zarazem matematyka jest doskonałym narzędziem do badania rzeczywistości fizycznej. Pierwsze pojęcia matematyczne zostały utworzone w celu rozwiązywania rozmaitych praktycznych zadań (na przykład liczenia, mierzenia ziemi, wznoszenia budowli), a jednocześnie w dowodach twierdzeń matematycy nie odwołują się do wyników doświadczeń. Z jednej strony, przedmiot matematyki jest związany w pewien sposób z poznającym podmiotem, z drugiej zaś, matematyk ma często poczucie, iż odkrywa własności świata niezależnego od niego. Przy rozpatrywaniu zagadnienia istnienia ważny jest również kontekst historyczny: matematyka jest jedną z najstarszych nauk, a jej rozwój ma w zasadniczym stopniu charakter kumulacyjny. Zatem rozstrzygnięcia kwestii ontologicznych powinny mieć zastosowanie zarówno do matematyki w przeszłości, jak i do matematyki współczesnej. Wypracowanie jednak takiego stanowiska jest bardzo trudne, gdyż rozwój tej dyscypliny spowodował, że, choć zachowana jest genetyczna ciągłość, to zmiana zakresu badań i wprowadzanie nowych pojęć, zwłaszcza w XX wieku, zmieniły w zasadniczy sposób charakter matematyki współczesnej w porównaniu do matematyki wieku XIX. Wydaje się również, że dla rozstrzygnięć ontologicznych istotne znaczenie mają kwestie epistemologiczne i związane z nimi pytanie o genezę pojęć matematycznych.

W przeszłości zagadnienie istnienia przedmiotu matematyki było wielokrotnie rozpatrywane i dopracowano się w tym zakresie całego szeregu stanowisk: od skrajnego realizmu do nominalizmu, od empiryzmu do intuicjonizmu, od formalizmu do strukturalizmu, od traktujących obiekty matematyczne jak fikcje literackie do podkreślających, że matematyka jest częścią kultury. Mimo tak wielu propozycji wydaje się, że żadne ze stanowisk nie ujmuje wszystkich charakterystycznych cech matematyki[1]. Warto zatem jeszcze raz podjąć próbę przybliżenia kwestii istnienia obiektów matematycznych. W artykule pokazuję pewne aspekty tego złożonego zagadnienia i proponuję nieco odmienny od dotychczasowych ujęć sposób jego rozwiązywania.

2. ROLA ABSTRAKCJI WIELOSTOPNIOWYCH W MATEMATYCE

Punktem wyjścia rozważań jest matematyka widziana całościowo, tzn. zawarta w rozwiniętych, często zaksjomatyzowanych teoriach, a także rozpatrywana od strony pracującego twórczo matematyka, stawiającego i rozwiązującego problemy. Takie potraktowanie wiedzy matematycznej wynika z faktu, że każda próba określenia statusu ontologicznego przedmiotu matematyki musi zostać poprzedzona analizą sposobów powstawania i funkcjonowania pojęć matematycznych.

Podstawowymi czynnościami w procesie tworzenia pojęć matematycznych są abstrakcja i idealizacja[2]. Ponieważ są to uniwersalne sposoby tworzenia pojęć przez człowieka, więc w tym zakresie język matematyki nie różni się od innych języków. Matematykę jednak charakteryzuje powszechne stosowanie abstrakcji wielostopniowych: gdy matematyk dysponuje już pewnymi pojęciami, tworzy nowe, traktując te wcześniejsze jako punkt wyjścia procesu abstrakcji.

M.Lubański, analizując z tego punktu widzenia proces abstrakcji w matematyce, wyróżnia trzy różne poziomy abstrakcji. Na najniższym

[1] M. Lubański zauważa, że „wszystkie dotychczasowe stanowiska w filozofii matematyki należy uznać za fragmentarycznie słuszne. Matematyka dzisiejsza jest bogata w wielorakie idee i tak rozbudowana, że w jakimś stopniu każde z istniejących stanowisk da się obronić" (M.Lubański, *Próba oceny różnych stanowisk w filozofii matematyki*, w: *Matematyczność przyrody*, pod red. M.Hellera, J.Życińskiego, A.Michalik, Kraków 1992, 65).

[2] Proces idealizowania można potraktować jako jeden z rodzajów abstrakcji.

poziomie abstrakcji znajdują się zbiory złożone z indywiduów: liczb, punktów itp. Drugi poziom abstrakcji tworzą pojęcia takie jak grupa czy przestrzeń wektorowa. Rozważa się tu własności całej klasy różnych zbiorów indywiduów. Rozpatrując natomiast wspólne własności tworów abstrakcyjnych z poziomu drugiego przenosimy się, według M.Lubańskiego, na jeszcze wyższy poziom abstrakcji. Na tym poziomie powstaje, na przykład, pojęcie grupy swobodnej[3].

W matematyce mamy zatem do czynienia z pojęciami na różnych poziomach abstrakcji: od podstawowych pojęć matematycznych takich jak: pojęcie linii prostej czy liczb naturalnych, które, wydaje się, że zostały wyabstrahowane z przedmiotów fizycznych bądź czynności podmiotu[4], do pojęć znajdujących się na bardzo wysokim poziomie abstrakcji takich jak, na przykład, pojęcia rozmaitości różniczkowej czy kategorii. Co więcej, proces abstrakcji może rozpoczynać się od rozmaitych punktów wyjścia. Mogą nimi być, w szczególności, przedmioty materialne, czynności, pojęcia, obiekty matematyczne.

Ponieważ sama czynność abstrahowania w matematyce nie różni się zasadniczo od czynności abstrahowania dokonywanej w innych sytuacjach, warto zatem postawić pytanie, czy do pojęć matematycznych nie można zastosować rozwiązań z zakresu ontologii, wypracowanych dla pojęć ogólnych. Jak wiadomo, w tym zakresie sformułowano cztery podstawowe stanowiska: realizm skrajny, realizm umiarkowany, konceptualizm, nominalizm. Być może, wystarczyłoby przyjrzeć się tym stanowiskom i zastosować jedno z nich do pojęć w matematyce. Tak postępowano i każdy z poglądów w sporze o uniwersalia jest reprezentowany w filozofii matematyki. Obecnie jednym z najpopularniejszych jest platonizm, wywodzący się z realizmu skrajnego. Również pogląd, mający swe źródło w filozofii Arystotelesa, a głoszący, że przedmiot matematyki powstał na drodze abstrakcji z przedmiotów materialnych pewnych ich cech, ma swoich licznych zwolenników. Także stanowiska konceptualizmu (intuicjonizm) i nominalizmu są obecne w dwudziestowiecznej filozofii matematyki.

[3] M.Lubański, *Zagadnienie abstrakcji w matematyce*, w: *Z zagadnień filozofii przyrodoznawstwa i filozofii przyrody*, t.VI, pod red. M. Lubańskiego, S. Ślagi, Warszawa 1984, 121-132. Podobne uwagi w: M. Lubański, *Próba oceny różnych stanowisk w filozofii matematyki*, art. cyt, 64.

[4] Pogląd o tworzeniu pojęć matematycznych przy pomocy abstrakcji z czynności podmiotu przyjmuje J. Piaget (J. Piaget, *Psychologia i epistemologia*, Warszawa 1977; E. W. Beth, J. Piaget, *Mathematical Epistemology and Psychology*, Dordrecht 1966).

Powyższy sposób postępowania zakłada, że wszystkie pojęcia matematyczne mają taki sam status. Jednak pewne różnice w traktowaniu rozmaitych pojęć matematycznych przez samych matematyków wskazują, że to założenie nie jest słuszne. Otóż matematyk z niektórymi pojęciami matematycznymi postępuje tak jak z konkretnymi przedmiotami, jak z obiektami, inne zaś traktuje jak nazwy ogólne dla pewnych typów przedmiotów o wspólnych własnościach. W dalszym ciągu artykułu spróbuję uzasadnić powyższą tezę.

3. PRZYKŁADY POJĘĆ ALGEBRAICZNYCH Z RÓŻNYCH POZIOMÓW ABSTRAKCJI

W celu pokazania różnic w traktowaniu pojęć przez matematyków, posłużę się przykładami pojęć algebraicznych. To ograniczenie pozwoli mi na dokonanie w miarę szczegółowej analizy. Ponieważ jednak algebra abstrakcyjna nie stanowi w jakiś szczególny sposób wyróżnionego działu matematyki, więc przeprowadzone analizy będzie można zastosować do wszystkich pojęć matematycznych.

Najważniejsze pojęcia algebry to: struktura algebraiczna, dziedzina struktury, działanie, relacja, homomorfizm, kategoria. Wśród struktur algebraicznych można wyróżniać rozmaite ich rodzaje, na przykład: półgrupa, ciało, przestrzeń liniowa. Zadaniem algebry jest badanie własności rozmaitych struktur algebraicznych, homomorfizmów i kategorii.

Już nawet pobieżna analiza przedmiotu zainteresowania algebraika pozwala dostrzec, że mamy tu do czynienia z pojęciami na różnych poziomach abstrakcji. Najniższy poziom z punktu widzenia algebraika, jak się wydaje, tworzą konkretne elementy dziedziny danej struktury algebraicznej[5]. Następnie mamy zbiór tych elementów, tworzący

[5] Często jako przykłady struktur algebraicznych podaje się takie, których dziedzina jest zbiorem liczb. W algebrze bada się jednak przede wszystkim abstrakcyjne struktury, których dziedzinami mogą być zbiory zupełnie dowolnych elementów. W szczególności, tymi elementami są: wektory, macierze, ciągi, funkcje rzeczywiste, wielomiany, przekształcenia, izometrie, podstruktury pewnej ustalonej struktury algebraicznej. Większość z wymienionych obiektów znajduje się na o wiele wyższym poziomie abstrakcji niż liczby. Dla algebraika jednak nie jest istotna konstytucja wewnętrzna elementów dziedziny struktury i dlatego na wszystkie te obiekty będzie patrzeć w ten sam sposób, jak na miejsca w strukturze. Z tego punktu widzenia, elementy struktury algebraicznej można, poza pewnymi wyjątkami, potraktować jednolicie jako znajdujące się na tym samym poziomie abstrakcji.

dziedzinę konkretnej struktury. Na wyższym poziomie abstrakcji znajdują się konkretne działania (na przykład, dodawania liczb całkowitych) i relacje (na przykład, mniejszości wśród liczb rzeczywistych). W dalszej kolejności są konkretne struktury algebraiczne (na przykład, pierścień liczb całkowitych, grupa symetrii kwadratu, grupa permutacji zbioru złożonego z elementów $\{1, 2, 3, 4, 5\}$). Jeszcze wyższe piętro abstrakcji stanowią pojęcia: półgrupa, grupa, pierścień, przestrzeń liniowa, moduł.

Mamy zatem następujący szereg pojęć: konkretny element (na przykład liczba, przekształcenie, macierz), zbiór tych elementów, konkretne działanie, konkretna relacja, konkretna struktura algebraiczna (na przykład grupa symetrii kwadratu), pojęcia takie jak: grupa, pierścień, ciało. Warto w tym miejscu zauważyć, że aby określić następne pojęcie w tym szeregu, trzeba mieć już do dyspozycji pojęcia poprzednie.

W algebrze bada się również własności takich przekształceń jednej struktury w inną, które zachowują działania. Mamy zatem do czynienia z konkretnymi homomorfizmami (na przykład funkcja ln(x), przekształcająca grupę multyplikatywną R^+ liczb rzeczywistych dodatnich na grupę addytywną R liczb rzeczywistych) i z pojęciem homomorfizmu.

Na konkretnych strukturach można wykonywać operacje. W ich wyniku uzyskujemy nowe struktury, na przykład sumę prostą grup czy grupę ilorazową. W tym przypadku elementy dziedziny struktury znajdują się już na wysokim poziomie abstrakcji z punktu widzenia samego algebraika.

W podobny sposób, jak w powyższych przykładach, można uszeregować pojęcia z teorii kategorii. W tym przypadku pojęciami „elementarnymi" (na pierwszym niejako poziomie abstrakcji) są pojęcia konkretnego morfizmu i obiektu kategorii. Następnie mamy operację przyporządkowującą morfizmom dwa obiekty oraz operację składania morfizmów. W dalszej kolejności znajdują się poszczególne kategorie i samo pojęcie kategorii. Na kategoriach, podobnie jak na strukturach, można wykonywać operacje, tworząc nowe, bardziej złożone kategorie, a tym samym otrzymywać pojęcia bardziej abstrakcyjne.

Warto jeszcze przyjrzeć się przykładom definicji, przy pomocy których algebraik wprowadza do teorii nowe pojęcia. Jedną z podstawowych struktur algebraicznych jest grupa. Grupa jest to dowolny niepusty zbiór A i dwuargumentowe działanie $\cdot$, spełniające następujące warunki:

1. dla dowolnych elementów a, b, c ze zbioru A: $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$,
2. istnieje w zbiorze A element e taki, że dla dowolnego a zachodzi: $e\cdot a=a\cdot e=a$,
3. dla dowolnego a ze zbioru A istnieje w zbiorze A taki element b, że $a\cdot b=b\cdot a=e$.

Po wprowadzeniu tej definicji w podręcznikach algebry często podaje się szereg przykładów grup. Jednym z nich może być grupa wzajemnie jednoznacznych przekształceń zbioru pięcioelementowego złożonego z $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ w siebie. Działaniem grupowym jest składanie przekształceń. Grupa ta liczy 5! elementów. Łatwo jest pokazać, że działanie składania przekształceń spełnia wszystkie trzy warunki z definicji grupy. Elementem neutralnym jest przekształcenie identycznościowe.

Badając grupy przekształceń wzajemnie jednoznacznych innych zbiorów skończonych w siebie, łatwo zauważyć, że uzyskujemy grupy o wielu wspólnych własnościach. Prowadzi to do definicji grupy permutacji – jest to pewna szczególna klasa grup. Przy określaniu grupy permutacji bierze się pod uwagę pewną wspólną własność wyróżnionej klasy grup. Jest nią to, że ich elementami są wzajemnie jednoznaczne przekształcenia zbioru skończonego na siebie. Z odpowiedniego twierdzenia wynika, że każdy taki zbiór z działaniem składania przekształceń jest grupą. Tego typu grupom przypisano wspólną nazwę.

Pierścień określa się (podobnie jak grupę) przez wymienienie własności dwóch działań dwuargumentowych określonych na pewnym zbiorze A. Te własności to:
1. (A, +) jest grupą przemienną,
2. $(A, \cdot)$ jest półgrupą,
3. działanie $\cdot$ jest rozdzielne względem działania +.

W niektórych pierścieniach można znaleźć elementy różne od zera, które pomnożone przez siebie dają w wyniku zero. Nazwano te elementy dzielnikami zera. Pierścienie, w których nie występują takie elementy charakteryzują się pewnymi interesującymi własnościami. Prowadzi to do odróżniania pierścieni z dzielnikami zera od pierścieni bez dzielników zera.

Rozpatrzmy jeszcze jeden przykład. Niech G będzie grupą abelową, H jej podgrupą. Łatwo jest pokazać, że następująca relacja: $x\sim y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x\cdot y^{-1}$ należy do H, jest relacją równoważności. Relacja ta dzieli zatem dziedzinę grupy G na klasy abstrakcji relacji $\sim$. Można udowodnić, że jeżeli $x_1\sim y_1$ i $x_2\sim y_2$, to $x_1\cdot x_2\sim y_1\cdot y_2$. Z tego twierdzenia wynika w szczególności, że na klasach abstrakcji relacji $\sim$ można określić działanie i że działanie to będzie spełniać warunki 1, 2, 3 z definicji grupy. Tym samym możemy skonstruować nową grupę. Nazywamy ją grupą ilorazową grupy G względem podgrupy H[6]. W tym przypadku elementy dziedziny grupy ilorazowej znajdują się na wysokim poziomie abstrakcji, ważna jest też ich wewnętrzna struktura.

4. FUNKCJE POJĘĆ Z ROZMAITYCH POZIOMÓW ABSTRAKCJI

W powyższych przykładach widać wyraźnie, iż pojęcia algebraiczne można rozmieścić na wielu różnych poziomach abstrakcji. Na pierwszym, niejako najniższym poziomie abstrakcji, znajdują się te pojęcia, które są elementami dziedziny struktury matematycznej, drugi poziom to zbiory obiektów, trzeci tworzą konkretne działania i funkcje, następny konkretne struktury, jeszcze wyższy konkretne homomorfizmy. Na jeszcze wyższym poziomie znajdują się pojęcia ogólne takie jak, na przykład: pierścień, struktura, przestrzeń liniowa, grupa permutacji.

Ta różnica w stopniu abstrakcyjności powoduje, że pewne pojęcia matematyczne są bardziej konkretne od innych. Wydaje się, że niektóre z nich można niejako „wziąć do ręki", na przykład: liczbę 5, relację mniejszości wśród liczb naturalnych, funkcję y=ln(x), ciało liczb rzeczywistych. Pojęcia te określają, z reguły, pojedyncze przedmioty matematyczne. Natomiast pojęcia: funkcja, liczba naturalna, relacja, pierścień, przestrzeń liniowa, wyróżniają całe klasy obiektów o tych samych, z jakiegoś punktu widzenia, interesujących nas własnościach.

Wydaje się zatem, że pojęcia z poszczególnych poziomów abstrakcji dają się podzielić przynajmniej na dwie wyraźnie różniące się klasy. Do pierwszej trzeba zakwalifikować takie pojęcia, z którymi można postępować jak z konkretnymi obiektami, do drugiej takie, które trzeba potraktować jako analogiczne do pojęć ogólnych z języka potocznego.

Do pierwszej klasy należą takie pojęcia jak: konkretne liczby, czy takie obiekty, które mogą być elementami dziedziny struktury algebraicznej, konkretne działania, konkretne funkcje, konkretne struktury algebraiczne (pierścień liczb całkowitych, ciało liczb zespolonych), konkretne homomorfizmy. W drugiej klasie są na przykład pojęcia: grupa, pierścień, pierścień bez dzielników zera, ciało algebraicznie domknięte, działanie, homomorfizm. Spełniają one w algebrze rolę

[6] Ta sama konstrukcja może być przeprowadzona dla dowolnej grupy G (założenie przemienności grupy G nie jest konieczne), wtedy H musi być tzw. dzielnikiem normalnym grupy G.

nazw ogólnych podobną jak pojęcia: kot, zwierzę, człowiek, stół w języku potocznym. Analogicznie, jak w języku potocznym, również w algebrze przedmioty o wspólnych własnościach lub pod jakimś względem podobne do siebie określamy tą samą nazwą. Na przykład, grupą określamy takie obiekty, które posiadają własności wymienione w punktach 1, 2, 3 definicji grupy.

Bliższa analiza pojęć z powyższych dwóch klas pozwala stwierdzić, że sposoby określania i funkcjonowania pojęć należących do pierwszej klasy wyraźnie różnią się od sposobów określania i funkcjonowania pojęć z klasy drugiej. Pojęcia z pierwszej klasy algebraik bądź wybiera z jakichś zbiorów (na przykład liczbę 5 bierze ze zbioru liczb naturalnych) bądź określa, podając ich konstrukcję (na przykład pierścień liczb całkowitych tworzy, biorąc zbiór liczb całkowitych i określając na nim dwa działania – dodawanie i mnożenie). Z kolei pojęcia z drugiej klasy najczęściej określane są przy pomocy definicji wymieniających szereg warunków, które powinien spełniać konkretny obiekt, aby być na przykład grupą, ciałem, homomorfizmem. Własności te można uznać za aksjomaty. Niektóre z pojęć definiuje się wymieniając wspólne własności pewnej grupy obiektów wyróżnionych z danej klasy (tak powstaje pojęcie grupy permutacji, pierścienia bez dzielników zera, ciała uporządkowanego). Pewne pojęcia, na przykład grupę ilorazową, określa się podając konstrukcję prowadzącą do utworzenia konkretnego obiektu, który nazywa się tym pojęciem. W każdym jednak wymienionym przypadku mamy do czynienia z nadaniem wspólnej nazwy dla wielu, w zamierzeniu, przedmiotów matematycznych.

Pojęcia z dwóch wyróżnionych klas spełniają również odmienne funkcje w algebrze. Obiekty z pierwszej klasy mogą być elementami pewnego zbioru, należeć do dziedziny funkcji, można na nich wykonywać określone operacje. W szczególności, konkretne liczby naturalne mogą utworzyć zbiór liczb naturalnych, konkretne funkcje zmiennej rzeczywistej mogą utworzyć zbiór funkcji zmiennej rzeczywistej, konkretne pierścienie mogą utworzyć zbiór pierścieni, czy kategorię pierścieni, konkretna grupa i jej podgrupa mogą posłużyć do skonstruowania nowej grupy – grupy ilorazowej. Tych własności nie posiadają pojęcia z klasy drugiej: samo pojęcie funkcji, pierścienia czy liczby nie może zostać przez matematyka potraktowane jako element jakiegoś zbioru (za wyjątkiem sytuacji, gdy rozpatruje się zbiór, którego elementami są nazwy).

Zatem te pojęcia, które mogą stać się elementami jakiegoś zbioru, można potraktować jako konkretne obiekty matematyczne. Co więcej, ponieważ określone zbiory mogą stać się elementami nowego zbioru, nie widać więc powodu, by i zbiorów nie uznać za konkretne przedmioty. Na zbiorach, czy strukturach matematycznych wykonuje się pewne działania lub operacje, wykorzystuje się je do konstruowania nowych tworów matematycznych, stąd na zbiory, struktury, czy inne tego typu pojęcia trzeba również patrzeć jak na konkretne obiekty.

Jesteśmy również w stanie wyróżnić pewną klasę pojęć, których rola w matematyce jest analogiczna do nazw ogólnych z języka naturalnego. Takimi pojęciami są, na przykład: pierścień, przestrzeń topologiczna, fraktal. W przeciwieństwie do pojęć z poprzednich dwóch poziomów nie mogą być one potraktowane tak jak konkretne obiekty.

Kryterium uznania danego pojęcia za konkretny obiekt jest sprawdzenie, czy jest możliwe potraktowanie go jako elementu jakiegoś zbioru, wykonanie na nim jakichś operacji czy manipulacji. Natomiast pozostałe pojęcia funkcjonują w matematyce jako nazwy ogólne, analogicznie jak pojęcia ogólne w języku potocznym. Na tych pojęciach nie możemy dokonywać manipulacji. Chociaż pojęcie z pierwszej wyróżnionej klasy może samo znajdować się już na bardzo wysokim poziomie abstrakcji (pojęcie konkretnej liczby naturalnej, czy konkretnego trójkąta jest pojęciem abstrakcyjnym), to tym różni się od pojęcia-nazwy ogólnej, że wolno potraktować je jako element zbioru.

Zatem te pojęcia matematyczne, które mogą zostać elementem jakiegoś zbioru, można uważać za konkretne obiekty matematyczne i to bez względu na to, na jak wysokim stopniu abstrakcji są umieszczone, natomiast te pojęcia, które są tylko nazwami dla pewnej klasy przedmiotów, znajdują się na poziomach abstrakcji powyżej stopni abstrakcji dla konkretnych obiektów, odgrywają też zupełnie inną rolę w matematyce.

Te obiekty matematyczne, które można uznać za konkretne przedmioty, stają się przykładami dla pojęć z klasy drugiej. W szczególności, pierścień wielomianów o współczynnikach całkowitych jest przykładem pierścienia, przestrzeń kartezjańska R^7 – przykładem przestrzeni topologicznej bądź metrycznej, zbiór Mandelbrota, zbiór Cantora są przykładami fraktali.

Trzeba podkreślić, że granica między tymi rodzajami pojęć nie musi być zarysowana zbyt ostro i czasem zależy od intuicji filozofa czy matematyka zaliczenie danego pojęcia do odpowiedniej kategorii. W szczególności trudności mogą powstawać przy pojęciach elementarnej geometrii. Na przykład, za obiekty można uważać konkretne trójkąty jako zbiory punktów w konkretnej przestrzeni, natomiast pojęciem ogólnym byłoby pojęcie trójkąta jako figury o trzech kątach i bokach.

5. RÓŻNE POZIOMY ABSTRAKCJI A ISTNIENIE POJĘĆ MATEMATYCZNYCH

Wyróżnienie dwóch kategorii pojęć matematycznych sugeruje, by w celu określenia ich sposobów istnienia rozpatrywać każdą z tych klas oddzielnie. Co więcej, z odmiennych sposobów określania i funkcjonowania pojęć z dwóch wyróżnionych klas wynika, by przypisywać tym pojęciom odmienne rodzaje istnienia.

W odniesieniu do pojęć z pierwszej grupy, wydaje się, że można im przypisać obiektywne istnienie. Przez obiektywne istnienie rozumiem istnienie niezależne od matematyka, od jego umysłu, od jego działań. Nazywając pewien konkretny przedmiot liczbą 5, grupą permutacji zbioru złożonego z $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, funkcją $y=\ln(x)$ matematyk tylko wyróżnia w szczególny sposób obiekt swojego poznania. Nie tworzy go, a w pewien sposób odkrywa możliwość jego istnienia. W odniesieniu do tych przedmiotów matematyk ma poczucie, że istnieje wiele obiektów, których w danym momencie nie jest w stanie poznać, czy w ogóle nigdy ich nie pozna. Na przykład zostały nazwane tylko nieliczne funkcje z klasy wszystkich funkcji zmiennej rzeczywistej, poznano tylko część grup (między innymi dokonano klasyfikacji wszystkich skończonych grup prostych). Zatem istnienie przedmiotów matematycznych z pierwszej wyróżnionej klasy jest wyraźnie uprzednie w stosunku do umysłu matematyka. Jest to też istnienie niezależne od świata przedmiotów fizycznych. W odniesieniu zatem do pojęć z pierwszej przeze mnie wyróżnionej klasy opowiadam się, mimo trudności tego stanowiska, za realizmem skrajnym, za platonizmem[7].

[7] Na korzyść platonizmu może przemawiać to, że matematycy są często zaskakiwani takimi wynikami, które przeczą intuicjom, na przykład istnienie ciągłej funkcji nigdzie nieróżniczkowalnej, krzywej Peano, zbiorów przyciągania pierwiastków zespolonych równań algebraicznych, zbioru Mandelbrota. Może to świadczyć o obiektywnym istnieniu świata przedmiotów matematycznych, których własności odkrywamy, a które są niezależne od nas, przekraczają nasze intuicje i doświadczenie.

Natomiast pojęciom z grupy drugiej proponuję przypisać istnienie związane z umysłem matematyka. W pojęciach tych bowiem wyraźnie widać rolę matematyka w ich tworzeniu. To matematyk grupuje określone obiekty matematyczne w poszczególne klasy i nadaje im nazwy, wybierając podstawowe własności, które służą do wyróżnienia tych obiektów. Matematyk dokonuje zatem abstrakcji, która wprawdzie ma swoją podstawę w konkretnych obiektach matematycznych, to bez udziału matematyka pojęcia te nie powstałyby. Z tego względu w odniesieniu do pojęć z grupy drugiej proponuję przyjąć realizm umiarkowany czy nawet konceptualizm. Oczywiście w odniesieniu do tych pojęć mamy do czynienia również z ich wyemancypowaniem się, z uniezależnieniem od matematyka-twórcy, z pewnego rodzaju ich zobiektywizowaniem się. Widać jednak tu istotną rolę, jaką odegrał matematyk uogólniając i znajdując wspólne własności pewnych klas konkretnych obiektów.

Proponuję te pojęcia matematyczne, które funkcjonują w matematyce tak jak konkretne obiekty, uznać za istniejące w takim sensie, jak czyni się to w platonizmie (realizmie skrajnym). Natomiast w odniesieniu do pojęć, które odgrywają tylko rolę nazw ogólnych, proponuję przyjąć realizm umiarkowany lub konceptualizm.

Na zakończenie należy uczynić jeszcze następującą uwagę. Obiekty matematyczne są niematerialne, stąd też ich rodzaj istnienia jest niewątpliwie inny, niż sposób istnienia przedmiotów fizycznych. W tym kontekście, rozróżnienie między istnieniem pojęć matematycznych z pierwszej grupy i drugiej nie zasadza się na uznaniu realnego istnienia w przypadku pierwszym i odrzucenia tego stanowiska w drugim. Różnica między sposobami istnienia jest związana z rodzajem relacji między umysłem a obiektami matematycznymi. Dla platonizmu istotne jest przyjęcie, że umysł ludzki poznaje rzeczywistość niezależną od niego, dla konceptualizmu charakterystyczne jest uznanie, że pojęcia matematyczne pochodzą od poznającego podmiotu. W szczególności, w ramach platonizmu można przyjąć, że istnienie przedmiotów matematycznych jest tylko istnieniem potencjalnym, aktualizować się zaś może z chwilą pomyślenia o danym obiekcie.

THE ISSUE OF THE EXISTENCE OF MATHEMATICAL OBJECTS

Summary

The problem of the existence of mathematical objects is one of the most important and interesting problems in the philosophy of mathematics. There is the whole range of answers of this problem: from Platonism through conceptualism to nominalism and formalism. Every these attitudes draw up only one particular aspect of mathematical objects and therefore they cannot express all points of view of the problem of the existence in mathematics.

In the paper I try to analyse methods of creation and ways of performing of the algebraic notions. This limitation of the problem of the existence allows me to realise the detailed analysis. Nevertheless this analysis can be referred to the other mathematical notions.

The notions in abstract algebra occur on different levels of abstraction. The concrete objects of some set are on the lowest level of abstraction. On the next level there are sets of these objects. The concrete operations, relations and functions perform higher level. On the next level there are: the ring of integers, the field of rational numbers, the group of symmetry of square and other similar notions. The notions like a group, a field, an operation, a function perform the highest level of abstraction.

We can divide these notions into two parts. The notions, which we can treat like the concrete objects, perform one of these parts. In the second part there are notions which play the role of general notions from the colloquial language. The notions from the first class can be members of some set; they can also be combined together. The notions from the second group cannot become elements of any set.

These different ways of behaving of notions in algebra suggest that their modes of the existence are also different. The objects from the first group exist independently from mathematicians; the notions from the second group are the creations of human mind.

Therefore I propose to keep Platonism regarding the objects from the first class and to accept conceptualism regarding mathematical objects from the second group.