Krzysztof Wójtowicz

Platonizm Gödla a "quasi-empiryzm" Quin’a - próba porównania

Studia Philosophiae Christianae 38/1, 40-60

2002

skomplikowane działanie z prostych praw ruchu, zastosowanych do układów złożonych. Matematycy i fizycy powoli uczą się składać proste ruchy w skomplikowaną całość. Wyróżniono kilka rodzajów tego składania, opisanych przez poszczególne scenariusze chaosu. W związku z tym można zadać pytania o przyszłość tych badań: Czy uda się uczonym sformułować teorię uniwersalną, klasyfikującą wszystkie możliwe rodzaje przejść do chaosu? Czy teoria ta potrafi opisać wszystkie obserwowane w naukach empirycznych rodzaje takich przejść? Po dokładnym zaznajomieniu się z dynamiką chaotyczną układów rzeczywistych uczeni mogą odkryć rodzaje takich przejść nie dające się ująć w jeden schemat wyjaśniający. Wówczas teoria opisywałaby kilka nieporównywalnych ze sobą scenariuszy, tak jak to jest obecnie. Może się także okazać, że bogactwo zjawisk przyrody jest większe od bogactwa modeli teoretycznych. Coraz dokładniej poznając jakąś dziedzinę zjawisk przyrody, dostrzegamy nie tylko ich jedność, lecz także zaczynamy rozumieć różnice między nimi. Różnice te mogą mieć zasadnicze znaczenie.

Na te pytania nie ma oczywiście dzisiaj odpowiedzi ani nie wiadomo, jak odpowiedź ta będzie wyglądać w przyszłości. Jest to szybko rozwijająca się dziedzina badań, daleka od dojrzałości i kompletności i dzięki temu zagadnienie mechanizmów jest tak ciekawe dla filozofa nauki.

KRZYSZTOF WÓJTOWICZ
Instytut Filozofii, UW

PLATONIZM GÖDLA A „QUASI-EMPIRYZM" QUINE'A – PRÓBA PORÓWNANIA

We współczesnej dyskusji na temat ontologii matematyki, najczęściej dyskutowanymi argumentami na rzecz realizmu są argumenty pochodzące od Gödla i Quine'a. Celem niniejszego artykułu jest porównanie zasadniczych cech tych koncepcji. Nie stanowi on całościowej prezentacji stanowisk Gödla i Quine'a, ale jest jedynie porównaniem pewnych ich aspektów – dotyczących filozofii matematyki.

1. FILOZOFICZNE STANOWISKO GÖDLA[1]

1.1. REALIZM

W pracy *Russell's Mathematical Logic*[2], pierwszym swym artykule *stricte* filozoficznym, Gödel deklaruje się jako realista matematyczny, pisząc, iż założenie o istnieniu obiektów matematycznych jest równie uzasadnione jak założenie o istnieniu obiektów fizycznych[3]. Gödel deklaruje wiarę w istnienie obiektywnego uniwersum matematycznego, można go więc nazwać „platonikiem"[4]. Według niego przedmioty matematyczne tworzą niezależny od rzeczywistości fizycznej porządek. Gödel odrzuca więc realizm typu Arystotelesa, w myśl którego uniwersalia są niejako aspektami przedmiotów konkretnych, są od tych przedmiotów konkretnych ontycznie zależne[5]. Zdania matematyczne nie mówią bezpośrednio nic o świecie fizycznym istniejącym w czasoprzestrzeni – są bowiem prawdziwe na mocy znaczeń pojęć, niezależnie od świata przedmiotów fizycznych[6].

---

[1] Jest to jedynie pobieżna prezentacja. Czytelnik znajdzie więcej szczegółów w: K. Wójtowicz, *Filozofia Kurta Gödla*, Edukacja Filozoficzna 21(1996), 149–159 oraz Tenże, *Filozofia matematyki Kurta Gödla*, Tarnów 2002.

[2] K. Gödel, *Russel's Mathematical Logic*, w: *Philosophy of Mathematics*, red. P. Benacerraf, H. Putnam, Prentice-Hall, 1964, 211–232.

[3] Tamże, 220.

[4] Nie będę tu podejmował próby pełnej charakteryzacji tego terminu, ograniczając się do przytoczenia przykładowej opinii, pochodzącej od Irvine'a:

„(i) Obiekty matematyczne istnieją w sposób niezależny od ludzkiej myśli i od naszej zdolności uzyskania wiedzy na ich temat;

(ii) są nie-fizyczne, istnieją poza czasem i przestrzenią;

(iii) zdania matematyczne posiadają wartość logiczną niezależnie od naszej działalności umysłowej i naszej zdolności do uzyskania wiedzy na ich temat;

(iv) zdania te posiadają wartości logiczne na mocy własności obiektów matematycznych (a nie jako wynik np. własności języka formalnego);

(v) jest możliwe jednoznaczne wskazanie desygnatów terminów matematycznych;

(vi) i uzyskanie wiedzy o nich".

A. D. Irvine, *Nominalism, realism & physicalism in mathematics: an introduction to the issues*, w: *Physicalism in mathematics*, red. A. D. Irvine, Dordrecht 1990, xix–xx.

[5] K. Gödel, *Some basic theorems on the foundations of mathematics and their implications*, w: K. Gödel, *Collected Works*, red. S. Feferman i in., Oxford 1995, vol. 3, 321.

[6] Tamże, 320. Zdania matematyki dotyczą jednak świata fizycznego w sposób pośredni, poprzez opis pojęć, jakich używamy dla opisywania świata fizycznego. „To, że matematyka, przynajmniej w większości zastosowań, dodaje coś do treści praw natury jest widoczne najlepiej na przykładach, gdzie mamy do czynienia z bardzo prostymi prawami dotyczącymi pewnych elementów, np. dotyczących zachowania układów elektronicznych. Tu matematyka w oczywisty sposób dodaje ogólne prawa dotyczące tego, w jaki sposób będą zachować się te układy. (...). Dlatego nowe aksjomaty matematyczne mogą

Gödel odrzuca także stanowisko psychologistyczne, w myśl którego pojęcia matematyczne są naszymi tworami[7]. Odrzuca syntaktyczne i instrumentalistyczne interpretacje matematyki, podobnie jak odrzuca fenomenalizm w odniesieniu do percepcji zmysłowej[8]. Dlatego negatywnie podsumowuje program Russella z *Principia Mathematica*: „Jest to jeden z niewielu przykładów (...) realizacji tendencji, zmierzającej do eliminowania założeń dotyczących istnienia obiektów poza «danym» i zastępowania ich konstrukcjami opartymi na tych danych. Otrzymany wynik ma w zasadzie charakter negatywny, tj. klasy i pojęcia wprowadzone w ten sposób nie mają wszystkich potrzebnych w matematyce własności. (...) Wszystko to jest dowodem na rzecz poglądu bronionego wyżej, że logika i matematyka (tak jak fizyka) oparte są na aksjomatach posiadających rzeczywistą treść, i nie da się ich «wyeliminować poprzez wyjaśnienie» (*they cannot be explained away*)”[9].

Wyrazem realistycznego stanowiska Gödla jest jego dyskusja problemu definicji niepredykatywnych[10]. Są to definicje, w ramach których pewien obiekt *o* jest definiowany poprzez odwołanie się do ogółu obiektów *O*, których *o* jest elementem[11]. Przy konstruktywi-

---

prowadzić do nowych, weryfikowalnych empirycznie tez dotyczących doświadczenia, dokładnie tak samo, jak nowe prawo fizyki. Twierdzenia matematyczne (...) nie dotyczą właściwości struktur fizycznych ale raczej własności pojęć, w terminach których opisujemy te struktury. To jednak pokazuje, że własności tych pojęć są czymś równie obiektywnym i niezależnym od naszego wyboru, co własności fizyczne materii". K. Gödel, *Is mathematics syntax of language?* w: K. Gödel, *Collected Works*, dz. cyt., vol. 3, 360.

[7] K. Gödel, *Some basic theorems on the foundations of mathematics and their implications*, art. cyt.

[8] „Aby udowodnić niesprzeczność klasycznej teorii liczb (i *a fortiori* także silniejszych systemów), konieczne jest odwołanie się do pewnych abstrakcyjnych pojęć (i odnoszących się do nich oczywistych aksjomatów) gdzie „abstrakcyjny" oznacza pojęcia nie odnoszące się do obiektów fizycznych, których szczególnym rodzajem są symbole. (...) Nie istnieje racjonalne uzasadnienie naszych prekrytycznych przekonań dotyczących stosowalności i niesprzeczności matematyki klasycznej (nawet na jej najniższym poziomie, poziomie teorii liczb) na bazie interpretacji syntaktycznej". Tamże, 318.

[9] K. Gödel, *Russel's Mathematical Logic*, art. cyt., 223–224.

[10] Tamże.

[11] Rozważmy następującą definicje zbioru X: $X = \{x: \forall Y\ \varphi\ (x,Y)\}$. Definiowany zbiór X wchodzi w zakres zmienności zmiennych kwantyfikatora wiążącego zmienną w formule φ. Wynika stąd, że zbiór X jest definiowany w terminach ogółu obiektów, do którego należy.

Przykładem definicji niepredykatywnej jest definicja zbioru liczb naturalnych, jako najmniejszego zbioru spośród zbiorów spełniających warunki: (i) 0 należy do tego zbioru; (ii) zbiór ten jest nieskończony; (iii) zbiór ten jest przechodni. Widać, stycznej interpretacji matematyki (w myśl których obiekty matematyczne są przez nas konstruowane) prowadzi to do błędnego koła: aby skonstruować obiekt *o*, musielibyśmy odwołać się do własności ogółu obiektów *O*, którego dopiero konstruowany obiekt *o* jest elementem. To jednak jest niemożliwe – ogół ten będzie bowiem dobrze określony (zostanie skonstruowany) dopiero po uprzednim skonstruowaniu obiektu *o*. Według konstruktywisty definicje niepredykatywne są niedopuszczalne. Gödel odrzuca jednak stanowisko konstruktywistyczne, co prowadzi go do wniosku, iż: „Jeśli definiowane obiekty istnieją niezależnie od naszych konstrukcji, nie ma nic absurdalnego w stwierdzeniu, że istnieją obiekty definiowalne wyłącznie w terminach ogółu obiektów, do których należą”[12].

Gödel zajmuje stanowisko realistyczne w odniesieniu do całości matematyki, włączając również teorię mnogości. Uniwersum matematyczne jest więc bardzo bogate. Istnieje ono w sposób obiektywny i niezależny od badającego je matematyka. Pisze o matematyce obiektywnej lub właściwej – tworzącej system zdań prawdziwych – i to prawdziwych w absolutnym sensie, bez dodatkowych założeń[13] – i matematyce subiektywnej, składającej się ze zdań dowodliwych. Te prawdy matematyczne dotyczą pojęć, które tworzą obiektywną rzeczywistość – nie mamy na nią wpływu, nie możemy jej tworzyć ani zmieniać, ale jedynie postrzegać i opisywać[14].

1.2. EPISTEMOLOGIA

Przyjęcie platonistycznej ontologii wymaga wyjaśnienia problemów epistemologicznych. Jakie jest źródło wiedzy matematycznej? W jaki sposób dowiadujemy się prawdy o uniwersum matematycznym? Jakie są kryteria uznawania zdań matematycznych i procedur dowodowych stosowanych w matematyce?

1.2.1 Intuicja

Podstawą zdobywania przez nas wiedzy matematycznej jest swoista kategoria poznawcza, jaką jest intuicja matematyczna. Mówi

że w tej definicji odwołujemy się do własności pewnej rodziny zbiorów, której elementem jest dopiero definiowany zbiór (czyli N).

[12] K. Gödel, *Russel's Mathematical Logic*, art. cyt., 219.

[13] Tenże, *Some basic theorems on the foundations of mathematics and their implications*, art. cyt., 305.

[14] Tamże, 320.

o niej następujący (najczęściej chyba cytowany) fragment pism Gödla: „Pomimo ich [obiektów teorii mnogości – K.W.] oddalenia od danych zmysłowych mamy coś w rodzaju percepcji obiektów teorii mnogości, co widać z faktu, że aksjomaty narzucają się nam jako prawdziwe. Nie widzę powodu, aby mieć mniej zaufania do tego rodzaju percepcji, tj. do intuicji matematycznej, niż do percepcji zmysłowej, która pozwala nam budować teorie fizyczne, w oczekiwaniu, że przyszłe dane zmysłowe będą z nią zgodne, i co więcej oczekiwać, że problem, który teraz nie jest rozstrzygalny, jest mimo to sensowny i może zostać rozstrzygnięty w przyszłości"[15].

W późniejszej pracy[16], Gödel podejmuje polemikę z konwencjonalistyczną koncepcją matematyki, charakterystyczną dla logicznego pozytywizmu. Odwołuje się tu do udowodnionych przez siebie twierdzeń dotyczącej niezupełności systemów formalnych i niedowodliwości niesprzeczności wewnątrz systemu. Według Gödla, aby rozpoznać i uzasadnić niesprzeczność systemu formalnego konieczne jest odwołanie się do pozasystemowych prawd – dla rozpoznania których konieczna jest jednak jakaś forma intuicji, umożliwiającej wgląd w znaczenia abstrakcyjnych pojęć (tj. pojęć nie odnoszących się jedynie do kombinacji symboli): „Niezależnie od tego, jak będą formułowane reguły syntaktyczne, moc i użyteczność powstającej w ten sposób matematyki jest proporcjonalna do mocy intuicji matematycznej koniecznej do udowodnienia dopuszczalności tych systemów. (...) jest jasne, że intuicja matematyczna nie może zostać zastąpiona przez konwencje, ale jedynie przez konwencje plus intuicję matematyczną"[17].

Tym, co umożliwia nam opisywanie niezależnej od nas rzeczywistości matematycznej jest zatem swoista intuicja matematyczna. Znajomość pojęć abstrakcyjnych nie jest osiągania poprzez analizy konwencji przyjętych w danym języku, ale poprzez wyjaśnianie ich sensu (*Sinnklärung*), które nie polega na redukcji definicyjnej[18]. Po-

---

[15] Tenże, *What is Cantor's Continuum Problem?*, w: *Philosophy of Mathematics*, red. P. Benacerraf, H. Putnam, Prentice-Hall, 1964, 271.

[16] Tenże, *Is mathematics syntax of language?*, art. cyt.

[17] Tamże, 358.

[18] Tenże, *The modern development of the foundations of mathematics in the light of philosophy*, w: K. Gödel, *Collected Works*, dz.cyt., vol. 3, 383. W artykule tym Gödel wyraża nadzieję, że metodą, która umożliwi systematyczną analizę znaczenia pojęć matematycznych będzie fenomenologia. Gödel zainteresował się filozofią Husserla około roku 1959. Wang pisze, że Gödel zachęcał go do studiowania

jęcia matematyczne nie mogą być w pełni „uchwycone" w żadnym systemie formalnym, zaś fakt, że zdania matematyczne niedowodliwe w danym formalizmie postrzegamy jako prawdziwe świadczy o tym, że możliwa jest analiza pojęć wykraczająca poza znajomość składni systemu formalnego.

Nasza intuicja podlega rozwojowi, a rozwój ten dokonuje się dzięki analizie pojęć i uprawianiu matematyki. Jednak to nie pojęcia się zmieniają – one są bowiem niezmienne – a jedynie nasze ich rozumienie[19].

1.2.2. Owocność

Podstawę naszej wiedzy matematycznej stanowi intuicja matematyczna. Umożliwia analizę i rozumienie pojęć matematycznych. Istnieje jednak też „drugi filar" wiedzy matematycznej, którym jest owocność aksjomatów, ich przydatność w rozwiązywaniu problemów matematycznych. Intuicyjność stanowi kryterium „wewnętrzne" dla samej dyscypliny, natomiast „owocność" stanowi kryterium metodologiczne, w jakimś sensie zewnętrzne w stosunku do analiz pojęciowych. Wyraźnie mówi o tym następujący fragment: „Decyzja dotycząca ich [nowych aksjomatów – K.W.] prawdziwości jest możliwa także w inny sposób, a mianowicie poprzez indukcyjną analizę ich (sukcesu). Sukces oznacza tutaj owocność w konsekwencje, w szczególności w konsekwencje (weryfikowalne), tj. konsekwencje dowodliwe bez nowych aksjomatów, których dowody z pomocą nowych aksjomatów są jednakże zdecydowanie prostsze i łatwiejsze do odkrycia i umożliwiają zawarcie w jednym dowodzie

---

pism Husserla w czasie ich wspólnych rozmów zaś redukcję ejdetyczną uważał za metodę, która mogła pomóc w jaśniejszym „postrzeganiu" pojęć. Zob. H. Wang, *Reflections on Kurt Gödel*, Cambridge 1987, 120. Gödel nie opracował jednak pełnej koncepcji epistemologicznej, ograniczając się do szeregu uwag, które nieraz nastręczają trudności interpretacyjne.

[19] Nie ma tu miejsca na szczegółową analizę koncepcji Gödla. Należy jednak podkreślić, że nie opiera się ona – jak to niekiedy przedstawiają nieżyczliwi krytycy – na postulowaniu istnienia jakiegoś tajemniczego „szóstego zmysłu", który umożliwia nam kontakt z „matematycznymi zaświatami". Powierzchowność takiego odczytania myśli Gödla bardzo dobitnie podkreśla Tieszen pisząc o tym, że koncepcja Gödla nie stanowi tego „nierozsądnego, quasi-mistycznego przedsięwzięcia, jak starali się to przedstawić niektórzy komentatorzy" – R. Tieszen, *Gödel an Quine on Meaning and Mathematics*, w: *Between Logic and Intuition. Essays in Honor of Charles Parsons*, red. G. Sher, R. Tieszen, Cambridge 2000, 237.

wielu różnych dowodów. Aksjomaty dla teorii liczb rzeczywistych, odrzucane przez intuicjonistów, zostały do pewnego stopnia uzasadnione, co wynika z faktu, że analityczna teoria liczb pozwala często na udowodnienie twierdzeń teorioliczbowych, które mogłyby być, w bardziej uciążliwy sposób, udowodnione za pomocą środków elementarnych. Można jednak wyobrazić sobie o wiele wyższy poziom weryfikowania. Mogą istnieć aksjomaty tak owocne w sprawdzalne konsekwencje, rzucające tak dużo światła na całą dyscyplinę i dostarczające tak silnych metod rozwiązywania problemów (i to rozwiązywania konstruktywnego, tak dalece, jak jest to możliwe), że niezależnie od zagadnienia, czy są one wewnętrznie konieczne, powinny zostać zaakceptowane przynajmniej w takim stopniu, jak dowolna dobrze ugruntowana teoria fizyczna"[20].

Owocność aksjomatów może przejawiać się więc na kilka sposobów:

1. Mogą one umożliwić udowodnienie nowych twierdzeń. Dotyczy to np. sytuacji, gdy aksjomaty teoriomnogościowe umożliwiają udowodnienie twierdzeń z zakresu teorii liczb[21].

2. Mogą umożliwić uproszczenie dowodów

3. Mogą dostarczyć nowych metod rozwiązywania problemów z danej dziedziny.

Gödel odróżnia więc dwa typy procedur, stosowanych dla uzasadniania zdań matematycznych:

(i) Oparte o swoistą intuicję, która umożliwia nam analizę treści pojęć matematycznych, co z kolei pozwala na sformułowanie aksjomatów i uznanie ich prawdziwości.

---

[20] K. Gödel, *What is Cantor's Continuum Problem?*, art. cyt., 265.

[21] Por. następujące fragmenty pism Gödla: „Dzisiejsza matematyka nie nauczyła się jeszcze korzystać z aksjomatów teorii mnogości dla rozwiązywania problemów teorii liczb. (...) Teoriomnogościowa teoria liczb, (...) czeka na swoje odkrycie". K. Gödel, *Some basic theorems on the foundations of mathematics and their implications*, art. cyt., 307–308. „Te aksjomaty [chodzi o aksjomaty istnienia dużych liczb kardynalnych – K.W.] zwiększają ilość rozstrzygalnych problemów nawet w zakresie teorii równań diofantycznych". Tenże, *What is Cantor's Continuum Problem?*, art. cyt., 264. „Istnieją też zdania arytmetyczne, które nie mogą być udowodnione nawet w ramach analizy, ale jedynie poprzez zastosowanie metod w których odwołujemy się do bardzo dużych nieskończonych liczb kardynalnych". Tenże, *The present situation in the foundations of mathematics*, w: K. Gödel, *Collected Works*, dz. cyt., vol. 3, 347. „Istnieją problemy teorioliczbowe, które mogą być rozwiązane tylko przy użyciu analitycznych lub teoriomnogościowych technik". Tenże, *über unentscheidbare Sätze*, w: K. Gödel, *Collected Works*, dz. cyt., vol. 3, 35.

(ii) Drugie kryterium to owocność zdań w badaniach matematycznych. Kryterium uznania danego aksjomatu za uzasadniony jest fakt, iż aksjomat ten jest pomocny w rozwiązywaniu istniejących problem(w matematycznych – w szczególności dostarcza on nowych metod ich rozwiązywania, umożliwia ujednolicenie metod dowodowych, *etc*.

2. FILOZOFICZNE STANOWISKO QUINE'A[22]

Quine odrzuca podział zdań na analityczne i syntetyczne, który stanowi podstawę tezy, iż zdania matematyki mają czysto analityczny charakter i stanowią jedynie zbiór konwencji dotyczących języka nauki[23]. Upada bowiem argument, iż zdania matematyczne są prawdziwe jedynie na mocy postulatów znaczeniowych języka.

Odrzucenie podziału na zdania analityczne i syntetyczne ma konsekwencje w uznaniu metod ustalania prawdziwości zdań należących do danej teorii. Prowadzi bowiem do ujęcia holistycznego, o czym wyraźnie mówi następujący fragment: „Całokształt naszej tzw. wiedzy czy też przekonań, od najbardziej przypadkowych prawd geografii i historii aż po najgłębsze prawa fizyki atomistycznej, a nawet czystej matematyki i logiki formalnej, jest tworem człowieka i styka się z doświadczeniem tylko wzdłuż swoich krawędzi. Mówiąc inaczej, nauka jako całość podobna jest do pola sił, którego warunkami brzegowymi jest doświadczenie. Konflikt z doświadczeniem na brzegach pola powoduje odpowiednie przystosowania w jego wnętrzu. Niektórym ze zdań zostaje przypisana inna wartość logiczna (...). Żadne poszczególne świadectwo doświadczenia nie jest związanie z jakimś określonym zdaniem z wnętrza pola;

---

[22] Podobnie jak w wypadku prezentacji poglądów Gödla, jest to jedynie szkic. Czytelnik znajdzie więcej szczegółów w pracy: K. Wójtowicz, *Na czym polega argument z niezbędności Quine'a?*, Edukacja Filozoficzna 24(1997), 297–306.

[23] „Jesteśmy skłonni zakładać ogólnie, że prawdziwość zdań daje się rozłożyć na komponent językowy i komponent faktualny. Przy tym założeniu wydaje się racjonalne sądzić, że w przypadku pewnych zdań ów komponent faktualny powinien być zerowy: byłyby to właśnie zdania analityczne. Lecz przy całej apriorycznej racjonalności tego pomysłu linia graniczna pomiędzy zdaniami analitycznymi i syntetycznymi po prostu nie została poprowadzona. Przekonanie, że rozróżnienie to jest w ogóle wykonalne jest nieempirycznym dogmatem empirystów, ich metafizycznym artykułem wiary". W. V. O. Quine, *Dwa dogmaty empiryzmu*, w: W. V. O. Quine, *Z punktu widzenia logiki*, tłum. z ang. B. Stanosz, Warszawa 1969, 57–58.

związek ten ma co najwyżej charakter pośredni, za sprawą równowagi pola jako całości"[24].

„Jednostką sensu empirycznego" staje się – w holistycznym ujęciu Quine'a – cała teoria, włącznie z instrumentarium matematycznym i logicznym. Prawdy matematyczne nie różnią się więc zasadniczo od prawd empirycznych, gdyż ulokowane są w naszej całościowej siatce przekonań: „W granicach nauk przyrodniczych istnieje continuum poziomów, od twierdzeń, które są sprawozdaniami z obserwacji, do tych, które wyrażają podstawowe idee, powiedzmy, teorii kwantów czy teorii względności. (...) twierdzenia ontologii, a nawet twierdzenia matematyki i logiki są kontynuacją tego continuum, kontynuacją, która jest zapewne jeszcze bardziej odległa od obserwacji niż główne zasady teorii kwantów czy teorii względności. Różnice w tej dziedzinie są (...) jedynie różnicami stopnia, a nie rodzaju. Nauka jest strukturą jednolitą i w zasadzie ta struktura jako całość, nie zaś jej zdania składowe z osobna, jest tym, co doświadczenie potwierdza lub podważa"[25].

W przypadku teorii empirycznych nie można więc różnicować poszczególnych ich fragmentów. Tym samym status pytań o istnienie obiektów matematycznych jest analogiczny do statusu pytań o istnienie obiektów fizycznych[26]. A zatem, przyjmując realistyczną interpretację danej teorii fizycznej, należy uznać istnienie wszystkich obiektów, do jakich ta teoria się odnosi. Kryterium tego, czy dana teoria odnosi się od obiektów danego typu stanowi zaś kwantyfikacja.

Matematyka stanowi jednak zasadniczą, nieusuwalną część teorii fizycznych. A zatem przyjęcie stanowiska realistycznego w stosunku do teorii empirycznej, nakłada na nas obowiązek uznania także zobowiązań ontologicznych tej teorii „w świecie obiektów matematycznych". Quine zatem – podobnie jak instrumentalista – wychodzi od faktu, iż matematyczne instrumentarium jest fragmentem teorii empirycznych. Jednak zupełnie inaczej niż instrumentalista interpretuje matematyczne zdania egzystencjalne – in-

[24] Tamże, 65.

[25] Tenże, *O poglądach Carnapa na ontologię*, tłum. z ang. B. Stanosz, w: *Empiryzm współczesny*, red. B. Stanosz, Warszawa 1991, 171.

[26] Na pierwszy rzut oka może się to wydawać zaskakujące, jednak analogia ta jest bardziej czytelna w kontekście hipotez dotyczących istnienia obiektów teoretycznych, niż obserwacyjnych.

terpretuje je *at face value*, bezpośrednio – a nie jako pozbawione treści zdania pomocnicze.

Z punktu widzenia Quine'a pytanie o prawdziwość zdań matematycznych jest sensowne, podobnie jak pytanie o to, czy prawdziwe jest zdanie dotyczące cząstek elementarnych, gęstości wody, czy dowolna inna hipoteza fizyczna. Kryterium prawdziwości zdań matematycznych opiera się na analizie roli matematyki w teoriach empirycznych[27]. Należy uznać za prawdziwe takie zdania, dla których można znaleźć empiryczne potwierdzenie – dotyczy to zarówno zdań o treści czysto fizycznej, jak i zdań matematycznych. Należy tu pamiętać, że zdania te są potwierdzane jako fragment teorii.

Koncepcja istnienia Quine'a relatywizuje kryterium istnienia do danej teorii. Mówi o tym, że dany obiekt O istnieje w myśl teorii T, jeśli jest wartością zmiennej odpowiedniego wyrażenia kwantyfikatorowego. Zobowiązania ontologiczne dotyczą zawsze poszczególnych teorii, nie mają charakteru absolutnego. Dlatego pytanie o istnienie obiektów matematycznych – i w szczególności o prawdziwość zdań matematycznych – należy rozpatrywać w kontekście akceptowanych przez nas teorii empirycznych[28].

Aby dane zdanie matematyczne można było uznać za prawdziwe, musi ono występować w instrumentarium pewnej teorii empirycznej. Tym samym tylko zdania matematyki stosowanej (przy całej nieostrości tego pojęcia) podlegają temu kryterium. Teorie matematyki czystej mogą pełnić co najwyżej rolę porządkującą czy upraszczającą teorie matematyki stosowanej, poza tym stanowią jedynie systemy niezinterpretowane[29]. W ujęciu Quine'a nie ma więc sensu stawiać pytania o prawdziwość tych teorii (tj. o posiadanie przez nie interpretacji), tak jak nie ma sensu stawiać pytania o to, czy reguły jakiejś czysto formalnej gry posiadają interpretację.

---

[27] Stąd termin „quasi-empiryzm".

[28] Nie należy tego oczywiście rozumieć jako tezy, że zdania matematyczne są bezpośrednio uzasadniane empirycznie. Status procedur w matematyce dowodowych – o ile już się zdecydujemy na wybór określonego systemu formalnego – pozostaje nienaruszony. Względy empiryczne świadczą natomiast o tym, która teoria fizyczna – włącznie z jej matematyczną częścią (w szczególności aparatem dedukcyjnym) winna być uznana za teorię zinterpretowaną, i konsekwentnie, jakie obiekty – w tym matematyczne – winny być włączone do naszej ontologii.

[29] Opinię taką Quine wyraża np. w: W. V. O. Quine, *Review of Parsons C. Mathematics in Philosophy*, Journal of Philosophy 81(1984), 783–794 – por. dalej.

W odniesieniu do tych (niezinterpretowanych) zdań problem uzasadniania się nie pojawia.

Stanowisko Quine'a prowadzi zatem do wyróżnienia pewnej grupy pytań sensownych. Nie ma sensu zastanawiać się nad prawdziwością czy uzasadnieniem dla zdań matematycznych, które nie mają związku z zastosowaniami.

Stanowisko filozoficzne (i metafilozoficzne) Quine'a motywuje więc konkretne decyzje metodologiczne (warto uprawiać przede wszystkim taką matematykę, jaka znajduje zastosowanie w teoriach fizycznych). Reasumując, dla analizy zagadnienia prawdziwości i uzasadniania zdań matematycznych istotne są następujące tezy Quine'a:

(i) Pomiędzy pytaniami naukowymi a ontologicznymi nie ma różnicy rodzaju, a jedynie różnice stopnia; są one pytaniami tego samego typu i istnieje pomiędzy nimi „ciągłe" przejście.

(ii) Teorie naukowe należy interpretować holistycznie. „Jednostką miary" jest cała teoria – i to cała teoria jest potwierdzana lub odrzucana, a nie poszczególne jej fragmenty.

(iii) Należy uznać pełne zobowiązania ontologiczne teorii; nie jest uzasadniony częściowy realizm.

(iv) Kryterium istnienia stanowi kwantyfikacja (należy uznać istnienie tych obiektów, które są wartościami zmiennych).

(v) Konsekwentnie, należy zająć stanowisko realistyczne w stosunku do teorii matematycznych stanowiących instrumentarium akceptowanych przez nas teorii empirycznych.

3. PORÓWNANIE STANOWISK

3.1. JAKA JEST KLASA SENSOWNYCH PROBLEMÓW MATEMATYCZNYCH?

Gödel – inaczej niż Quine – za sensowne uważa wszelkie otwarte pytania matematyczne, niezależnie od problemu zastosowań. Pytanie o ich prawdziwość i uzasadnienie jest, według Gödla, istotne poznawczo. Myślenie matematyczne nie podlega tutaj żadnym ograniczeniom – istotna jest możliwość rozwiązania otwartych problemów w danej teorii. Metodą rozwiązywania danych problemów jest np. wprowadzanie coraz silniejszych, bardziej abstrakcyjnych hipotez. Oczywiście wprowadzanie hipotez nie odbywa się *ad hoc*, ale oparte jest o analizę pojęć (lub kryterium „owocności"). Nie ma jednak bezpośredniego związku z problemem zastosowań. Tieszen pisze w tym kontekście, iż „ten rodzaj «wspinania się» (*ascent*) potrzebny do rozwiązywania oddala nas coraz dalej i dalej od nauk przyrodniczych i ich problemów i nie ma nic wspólnego z systematyzowaniem matematyki potrzebnej w naukach przyrodniczych”[30].

Natomiast w myśl koncepcji Quine'a ostatecznym trybunałem, przed jakim staje nasza całościowa teoria świata, jest doświadczenie. Dotyczy to także jej matematycznych fragmentów. Jeśli dany problem matematyczny nie ma odniesienia do nauk empirycznych, to nie można twierdzić, że jest poznawczo istotny. W szczególności nie ma sensu wprowadzanie coraz silniejszych założeń, aby móc rozwiązać otwarte problemy matematyczne, jeśli problemy te nie mają znaczenia dla teorii empirycznych. Nie ma też powodu, aby za właściwą metodę zdobywania wiedzy matematycznej uznać analizę treści pojęć matematycznych. Metodą weryfikacji zdań matematycznych jest „holistyczna konfrontacja teorii z doświadczeniem” i może ona zostać zastosowana jedynie do pewnych fragmentów matematyki.

W tym kontekście warto poruszyć problem zdań niezależnych i ich statusu poznawczego. Dla Gödla zdania niezależne stanowiły autentyczne problemy poznawcze, dotyczące obiektywnej rzeczywistości i wymagające rozwiązania[31]. Ilustracją tego jest stosunek Gödla do problemu *continuum*. Gödel przypuszczał, że CH (hipoteza *continuum*) jest zdaniem niezależnym od ZFC (teoria mnogości Zermelo-Frenkla z aksjomatem wyboru)[32]. Jako realista uważał jednak problem *continuum* za autentyczny problem naukowy, dotyczący obiektywnie istniejącej rzeczywistości matematycznej. Problem ten uważał za dobrze postawiony, wymagający analizy i badań. Wielokrotnie podkreślał, że konieczne jest poszukiwanie nowych aksjomatów, które umożliwiałyby rozwiązywanie otwartych problemów matematycznych. Wprowadzanie tych aksjomatów nie miałoby

---

[30] R. Tieszen, art. cyt, 249.

[31] „Poprzez udowodnienie niezależności problem traci sens tylko wtedy, gdy rozważany system aksjomatów traktowany jest jako system hipotetyczno–dedukcyjny; tzn. gdy znaczenia terminów pierwotnych nie są ustalone”. K. Gödel, *What is Cantor's Continuum Problem?*, art. cyt., 271. Stanowisko Gödla jest tu odmienne.

[32] Gödel udowodnił niesprzeczność CH z ZFC, ale nie udowodnił jej niezależności. Jego przypuszczenia zostały potwierdzone, kiedy Cohen udowodnił w latach 60–tych niezależność CH od ZFC.

oczywiście mieć arbitralnego charakteru – „wspięcie" się na pewien wyższy poziom abstrakcji jest możliwe dzięki analizie znaczeń podstawowych pojęć matematycznych[33]. Zasadniczy mechanizm, z jakim mamy tu do czynienia, polega na „niewyczerpywalności matematyki" – której formalnym wyrazem są twierdzenia Gödla o niezupełności[34]. Niezależne od danego formalizmu zdanie możemy uznać za prawdziwe dzięki analizie treści występujących w nim pojęć, poprzez ścisłe, lecz nieformalne analizy. W szczególności, Gödel sądził, że rozwiązanie problemu *continuum* może być możliwe dzięki aksjomatom dużych liczb kardynalnych[35]. Gödel podkreślał fakt, że nierozstrzygalność pewnych zagadnień matematycznych ma związek z niedostatecznie głęboką analizą podstawowych pojęć matematycznych. Takie stanowisko nie byłoby do pogodzenia z poglądami Quine'a. Według niego bowiem, zdania matematyczne są poznawczo istotne, o ile wywodzą się z teorii empirycznych, i tylko, o ile mają odniesienia do rzeczywistości empirycznej, są istotne poznawczo[36].

3.2. JAK BOGATA JEST KLASA OBIEKTÓW MATEMATYCZNYCH?

Gödel był zwolennikiem „silnego realizmu" w odniesieniu do hierarchii mnogościowej odpowiadającej silnej teorii, jaką jest ZFC.

---

[33] Gödel sam także usiłował sformułować aksjomaty mające umożliwić rozwiązanie tego problemu. Aksjomaty te nie dotyczyły jednak dużych liczb kardynalnych.

[34] „Jak zostanie wykazane (...) prawdziwą przyczyną niezupełności obecnej we wszystkich formalnych systemach matematycznych jest fakt, że formacja coraz wyższych typów może być kontynuowana w pozaskończoność (...) podczas gdy w każdym systemie formalnym mamy ich do dyspozycji co najwyżej przeliczalnie wiele. Można pokazać, że nierozstrzygalne zdania skonstruowane tutaj stają się rozstrzygalne, kiedykolwiek dodane zostaną stosowne wyższe typy (...). Podobna sytuacja zachodzi dla aksjomatów teorii mnogości". K. Gödel, *Über formal unentscheidbare Sätze der Prinzipia mathematica und verwandter Systeme I*, w: K. Gödel, *Collected Works*, dz. cyt., vol. 1, 191.

[35] Okazało się jednak, że jest inaczej. Niedługo po odkryciu przez Cohena metody forcingu okazało się, że aksjomaty dużych liczb kardynalnych nie pozwalają na rozstrzygnięcie problemu *continuum*. Wyniki Levy'ego i Solovaya pokazują, że przyjęcie założenia o istnieniu liczby mierzalnej, zwartej, Ramsey'a *etc*., nie mówią nic o wartości *continuum* – tzn. niesprzeczne z założeniem istnienia tych liczb jest zarówno CH jak i $\neg$CH.

[36] Można wyobrazić sobie sytuację, gdy dana teoria empiryczna T nie rozstrzyga hipotezy empirycznej H, jednak po dodaniu do T zdania niezależnego φ teoria $T+\varphi$ rozstrzyga H. W tej sytuacji zdanie φ ma odniesienia do sytuacji empirycznej i można je uznać za istotne dla naszej wiedzy. Jeśli jednak dane zdanie niezależne φ nie ma żadnych implikacji tego typu, to nie można byłoby go uznać za istotny problem poznawczy.

Postulował nawet wprowadzenie aksjomatów dużych liczb kardynalnych, jeśli tylko taka procedura okaże się uzasadniona (poprzez analizę pojęć, bądź poprzez odwołanie się do „kryterium owocności"). Jest tu więc maksymalistą[37].

Quine odrzuca tak silną formę realizmu. Status ontologiczny przyznaje tylko tym fragmentom matematyki, które mają zastosowanie w naukach przyrodniczych: „Ta część matematyki, która jest potrzebna w naukach empirycznych, ma ten sam status, co reszta nauki. Pozaskończone rozgałęzienia mają ten sam status, o ile pełnią rolę upraszczającego usystematyzowania (*simplificatory rounding out*), jednak reszta ma status niezinterpretowanych systemów"[38]. „Uznaję nieprzeliczalne nieskończoności tylko dlatego, że są one konieczne dla systematyzacji zagadnień. Obiekty wykraczające poza te potrzeby, np. $Beth_{\omega}$ lub liczby nieosiągalne uważam za matematyczną rozrywkę i za pozbawione statusu ontologicznego"[39].

Ontologia matematyki uzależniona jest zatem od ontologii nauk przyrodniczych. W szczególności, to, czy uznamy pełną ontologię teorii mnogości zależy od faktu, czy wykorzystanie pełnej siły teorii mnogości dla konstrukcji matematycznego instrumentarium teorii empirycznych jest konieczne. Natomiast Gödel uważał teorię mnogości za teorię zinterpretowaną. Użyteczność teorii mnogości z punktu widzenia rozwiązywania problemów matematycznych (częstym przykładem, na który powoływał się Gödel, była teoria liczb) wynika z obiektywnej prawdziwości twierdzeń teorii mnogości; nie może być interpretowana i wyjaśniana instrumentalistycznie. Otwarte problemy teorii mnogości są więc autentycznymi problemami poznawczymi.

---

[37] Należy pamiętać, że stanowiska tego Gödel nie przyjął *ad hoc*. Stanowi to efekt pewnego rozwoju, w którym Gödel wyszedł od stanowiska „słabego realizmu" – w ramach którego przyjmowane jest jedynie istnienie liczb naturalnych, a następnie, poprzez analizę roli teorii mnogości i założeń teoriomnogościowych w teorii liczb (i innych działach matematyki) doszedł do wniosku, iż matematyka winna być uprawiana właśnie w ramach teorii mnogości, a nie słabszych systemów. Istotną rolę odegrała tu motywacja związana z przekonaniem o zasadniczej rozwiązywalności otwartych problemów matematycznych i o swoistej „niewyczerpalności" matematyki – umożliwiającej formułowanie coraz to nowych aksjomatów, pozwalających na rozwiązywanie otwartych problemów.

[38] W. V. O. Quine, *Review of Parsons C. Mathematics in Philosophy*, art. cyt.

[39] Tenże, *Reply to Charles Parsons*, w: *The philosophy of W. V. Quine*, red. L. Hahn, P. A. Schlipp, La Salle 1986, 400.

3.3. JAKĄ ROLĘ ODGRYWA FAKT ISTNIENIA ZASTOSOWAŃ DLA MATEMATYKI?

Gödel oddziela więc kwestię prawdziwości zdań matematycznych od kwestii zastosowań. Zauważa, iż faktycznie dla rekonstrukcji przeważającej większości matematyki wystarczające są pierwsze szczeble hierarchii mnogościowej: „Można powiedzieć, że 99,9% współczesnej matematyki zawiera się w pierwszych trzech szczeblach hierarchii mnogościowej. A zatem z praktycznego punktu widzenia, cała matematyka może zostać zredukowana do skończonej ilości aksjomatów. Jest to jednak jedynie pewien historyczny zbieg okoliczności (*historical accident*), który nie ma znaczenia dla samej zasady. Co więcej, nie jest całkiem nieprawdopodobne, że taki właśnie charakter współczesnej matematyki ma związek z inną jej cechą, a mianowicie niemożliwością udowodnienia pewnych podstawowych twierdzeń, takich jak np. hipoteza Riemanna, pomimo wieloletnich wysiłków"[40].

Natomiast z punktu widzenia Quine'a, zasadniczym kryterium przyjęcia danej ontologii jest kwestia zastosowania danego instrumentarium matematycznego w uznanej przez nas teorii empirycznej. W szczególności, gdyby okazało się np., że z punktu widzenia zastosowań wystarczająca jest jakaś słaba teoria (np. PA – aksjomatyka Peano, albo słaby podsystem ZF), to ontologia winna być ograniczona do ontologii odpowiadającej temu właśnie systemowi. Warto w tym kontekście zasygnalizować pewne wyniki formalne. Wykazano bowiem, że znaczące fragmenty klasycznej matematyki mogą zostać zrekonstruowane w tzw. arytmetyce drugiego rzędu (Z_2) – czyli w systemie, w którym mowa jest jedynie o liczbach naturalnych i zbiorach liczb naturalnych[41]. Wyniki te stały się punktem wyjścia badań w zakresie tzw. matematyki odwrotnej. Celem tych badań jest ustalenie, jak silne aksjomaty istnienia zbiorów (chodzi o zbiory liczb naturalnych) są konieczne dla rekonstrukcji pewnych fragmentów praktyki matematycznej. Okazuje się, że można wskazać pewne naturalne podsystemy Z_2, które odpowiadają pewnym grupom twierdzeń klasycznej matematyki. Systemy te różnią się między sobą m. in. siłą założeń egzystencjalnych czyli – przy realistycznej interpretacji – zakładaną ontologią[42]. Szczególnie ważny jest tu fakt, że to właśnie

---

[40] K. Gödel, *Some basic theorems on the foundations of mathematics and their implications*, art. cyt., 307.

[41] D. Hilbert, P. Bernays, *Grundlagen der Mathematik*, Band I, Berlin 1934.

matematyka występująca w zastosowaniach w zasadzie może zostać zrekonstruowana w Z_2, a nawet w pewnych podsystemach Z_2. Wyniki te są niewątpliwie istotne w kontekście kryterium zobowiązań ontologicznych Quine'a, gdyż Z_2 jest systemem istotnie słabszym od ZFC.

Nastawienie Gödla jest tu odmienne. Gödel twierdził, że zasadniczo nie jest możliwe tworzenie analizy bez definicji niepredykatywnych[43]. Okazuje się jednak, że możliwa jest rekonstrukcja znaczących fragmentów analizy w systemach predykatywnych. Wyniki w tym zakresie osiągnął Feferman (inspirowany ideami Weyla)[44]; także badania w zakresie matematyki odwrotnej pokazują, że znaczący fragment klasycznej matematyki może zostać zrekonstruowany w systemach predykatywnych. Gödel nie odnosił się explicite do tych wyników (w wypadku wielu z nich byłoby to zresztą niemożliwe, gdyż zostały uzyskane już po śmierci Gödla). Można jednak zadać sobie pytanie, czy znajomość tych wyników miałaby znaczenie dla jego stanowiska. Sądzę, że można postawić tezę, iż dla Gödla fakty te nie miałyby znaczenia. Zasadnicze bowiem znaczenie miał dla niego fakt istnienia otwartych problemów matematycznych – uważał go za doniosły poznawczo i stanowiący wystarczający motyw do wprowadzania nowych metod i pojęć. Sam fakt, że pewne fragmenty matematyki można zrekonstruować w stosunkowo słabych systemach nie stanowiłyby dla niego argumentu przeciwko przyjęciu bogatej ontologii mnogościowej. Gödel stawiał bowiem maksymalistyczne cele: rozwiązywanie istniejących problemów matematycznych, a nie dokonanie rekonstrukcji fragmentów matematyki z użyciem możliwie najsłabszych środków.

Dla Quine'a natomiast istotne poznawczo są tylko niektóre problemy. „Rękojmią" realizmu w odniesieniu do obiektów postulowanych przez teorię matematyczną jest stosowalność tej teorii w naukach empirycznych. Jeśli instrumentarium matematyczne konieczne dla uprawiania nauk empirycznych można byłoby zrekon-

---

[42] Szczegółową prezentację techniczną tych zagadnień zawiera monografia: S. G. Simpson, *Subsystems of Second Order Arithmetic*, Berlin 1999. Popularne prezentacje Czytelnik znajdzie np. w: R. Murawski *Rozwój programu Hilberta*, Wiadomości Matematyczne 30(1993), 51–72, oraz: K. Wójtowicz, *Realizm mnogościowy*, Warszawa 1999.

[43] Zob. K. Gödel, *The present situation in the foundations of mathematics*, art. cyt., 50.

[44] Por. np. prezentację w: S. Feferman, *Infinity in Mathematics: Is Cantor Necessary?*, w: *L'infinito nella scienza*, red. G. T. Di Francia, Roma 1987, oraz: S. Feferman, *Why a Little Bit Goes a Long Way: Logical Foundations of Scientifically Applicable Mathematics*, w: S. Feferman, *In the light of logic*, New York 1998, 284–298.

struować np. w Z_2, to przyjmowanie ontologii odpowiadającej ZFC byłoby pozbawione uzasadnienia.

3.4. PRAWDY MATEMATYCZNE A PRAWDY EMPIRYCZNE

Według Quine'a faktycznie nie ma ostrej granicy pomiędzy zdaniami matematycznymi a empirycznymi. Kryteria ich uznawania mają wspólne źródło, jakim jest doświadczenie (różnią się one stopniem ogólności i oddaleniem od „brzegu", jakim są dane zmysłowe). Według Gödla natomiast zdania te są różne, dotyczą różnych składowych rzeczywistości, jednak jest pewna analogia między naszymi doświadczeniami, jakie zbieramy w tych dziedzinach[45]. Ma to związek z ujęciem problemu analityczności. Według Quine'a brak jest wyraźnej granicy między tymi zdaniami. Według Gödla jest inaczej. Zdania matematyczne są analityczne, jednak Gödel nadaje tu pojęciu „analityczności" niestandardowy sens: prawdy analityczne wynikają z treści pojęć. Tym samym zdania matematyczne, inaczej niż empiryczne, są prawdziwe na mocy występujących w nich pojęć. Takie stanowisko Quine oczywiście odrzuca – zdania matematyczne mają bowiem status podobny do statusu hipotez teoretycznych w fizyce.

Takie ujęcie oczywiście ogranicza matematykę poprzez wiązanie jej z danymi empirycznymi i przypisywanie jej roli wyjaśniania danych. Gödel natomiast akcentował niewyczerpywalność matematyki, jej bogactwo, możliwość tworzenia coraz to bogatszych pojęć i silniejszych systemów. O ile zatem Quine jest minimalistą – w tym sensie, że dopuszcza (tzn. uznaje za zinterpretowaną) tylko tyle matematyki, ile jest to konieczne dla potrzeb nauki, o tyle Gödel lokuje się na przeciwległym krańcu – pomijając analizy związane z rolą matematyki w naukach przyrodniczych.

3.5. JAKA JEST ROLA METAFIZYKI?

Gödel i Quine wykazują zasadniczo różne nastawienia jeśli chodzi o tradycyjną problematykę metafizyczną. Quine ogranicza się do sformułowania technicznego kryterium, które pozwala na ustalanie, jakie zobowiązania ontologiczne niesie za sobą przyjęcie danej teorii T. Jawnie twierdzi iż „tradycyjna metafizyka nie ma we

[45] Carnap, jeszcze inaczej niż Gödel i Quine sądzi, że pomiędzy zdaniami empirycznymi i matematycznymi istnieje ostra granica, i nie ma między nimi analogii.

mnie obrońcy"[46]. Jego analizy ontologiczne nie mają na celu ożywienia dawnej tradycji. Zupełnie inne jest tu nastawienie Gödla. Gödel deklaruje wiarę w zasadność stawiania głębokich pytań metafizycznych – dotyczących nie tylko filozofii matematyki, ale metafizyki w ogóle.

Filozofia powinna – według Gödla – zajmować się problemami podstawowymi i być uprawiana w sposób precyzyjny, choć niekoniecznie techniczny. Gödel stawiał sobie ambitny cel – chciał stworzyć system metafizyczny, zbudowany na wzór systemów aksjomatycznych. Konstrukcja tego systemu miała przebiegać poprzez znalezienie pierwotnych pojęć i aksjomatów, które je opisują. Gödel przyznawał, że filozofia jest na razie w stanie „niedorozwiniętym"[47], i że sam nie jest w stanie nadać swoim rozważaniom precyzyjnej postaci. Wydaje się on być w tej kwestii optymistą; świadczy o tym np. jego stwierdzenie, że projekt stworzenia *characteristica universalis* Leibniza nie był czystą utopią[48].

W nauce i filozofii nowożytnej brak jest – według Gödla – postępu w autentycznym rozumieniu. Ograniczamy się bowiem do zbierania informacji, rezygnując z poznania natury rzeczywistości[49]. To stanowi początek końca nauki teoretycznej i prowadzi do wyrugowania problematyki metafizycznej, do pesymizmu poznawczego, połączonego ze sceptycyzmem, płytkim scjentyzmem i materializmem. Tego typu stanowiska (charakterystyczne – według niego – dla neopozytywizmu) Gödel zalicza do grupy „antymetafizycznej". Sam natomiast jest zwolennikiem grupy „metafizycznej" – tj. tych stanowisk, w ramach których prowadzi się analizy metafizyczne i teologiczne.

Gödel podał swoistą klasyfikację stanowisk filozoficznych w zależności od tego, na ile głęboko starają się one wnikać w „naturę rzeczywistości": „Sądzę, że najbardziej owocnym schematem klasyfikacji stanowisk światopoglądowych jest ich podział ze względu na stopień podobieństwa lub odwrócenia się od metafizyki (lub reli-

---

[46] W. V. O. Quine, O *poglądach Carnapa na ontologię*, tłum. z ang. B. Stanosz, w: *Empiryzm współczesny*, dz. cyt., 163.

[47] K. Gödel, *Some basic theorems on the foundations of mathematics and their implications*, art. cyt., 311.

[48] Tenże, *Russel's Mathematical Logic*, art. cyt.

[49] Tenże, *The modern development of the foundations of mathematics in the light of philosophy*, art. cyt., 377.

gii). W ten sposób natychmiast otrzymujemy podział na dwie grupy: po jednej stronie materializm, sceptycyzm, pozytywizm, po drugiej spirytualizm, idealizm i teologia. Od razu widoczne są również różnice stopnia w tym ciągu, mianowicie sceptycyzm jest oddalony od teologii jeszcze bardziej niż materializm, podczas gdy z drugiej strony idealizm, np. w swej panteistycznej postaci jest osłabieniem teologii we właściwym rozumieniu tego słowa"[50].

Oczywiście, stanowisko Quine'a jest tu zdecydowanie różne – deklarował się jako naturalista. Stanowisko to określa zaś w sposób następujący: „Naturalizm: uznanie, że rzeczywistość jest identyfikowana i opisywana w nauce, a nie w jakiejś uprzedniej wobec niej filozofii"[51]. Quine odrzuca więc tezę, iż punktem wyjścia może być filozofia pierwsza. Granica między filozofią a nauką jest płynna, a punktem wyjścia analiz filozoficznych powinny być nauki przyrodnicze.

3.6. PROBLEM AKSJOMATU KONSTRUOWALNOŚCI

Czytelną ilustracją różnic w stanowiskach Gödla i Quine'a jest ich stosunek to aksjomatu konstruowalności (V=L)[52].

Gödel, po udowodnieniu metodą zbiorów konstruowalnych niesprzeczności hipotezy *continuum* z pozostałymi aksjomatami teorii mnogości, początkowo skłonny był uznać aksjomat konstruowalności za naturalne uzupełnienie aksjomatów teorii mnogości, dlatego w szczególności skłonny był zaakceptować wynikającą z niego uogólnioną hipotezę *continuum*. „Zdanie A (tj. V=L) dodane jako nowy aksjomat wydaje się stanowić naturalne uzupełnienie aksjomatów teorii mnogości w tym sensie, że precyzuje niejasne pojęcie dowolnego zbioru nieskończonego w określony sposób"[53]. Później jednak zmienił zdanie, skłaniając się ku odrzuceniu hipo-

[50] Tamże, 374.

[51] W. V. O. Quine, *Rzeczy i ich miejsca w teoriach*, tłum. z ang. T. Szubka, w: *Metafizyka w filozofii analitycznej*, red. T. Szubka, Lublin 1995, 49.

[52] Jest to aksjomat który – swobodnie mówiąc – głosi, iż istnieją tylko zbiory *explicite* definiowalne. Na każdym kroku tworzenia hierarchii kumulatywnej ograniczamy się nie do wszystkich podzbiorów dotychczas skonstruowanego fragmentu tej hierarchii, ale jedynie do podzbiorów definiowalnych w terminach obiektów skonstruowanych uprzednio.

[53] K. Gödel, *The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis*, Proceedings of the National Academy of Sciences USA 24(1938), 557.

tezy *continuum* – i tym samym także aksjomatu konstruowalności. Gödel zauważa, że jedyny znany dowód CH odwołuje się do aksjomatu konstruowalności (V=L), który ogranicza uniwersum zbiorów do zbiorów definiowalnych w pewien określony sposób[54]. Narzucanie tego typu ograniczeń na uniwersum zbiorów nie jest jednak uzasadnione[55].

Odmienne jest tu zdanie Quine'a. Quine wyraża opinię iż V=L jest eleganckim, ekonomicznym aksjomatem. Dla potrzeb matematyki stosowanej wystarczy matematyka uprawiana przy założeniu V=L. Ten aksjomat maksymalnie ogranicza uniwersum zbiorów – zarówno „na szerokość" (istnieją tylko obiekty definiowalne), jak i „na wysokość" (nie istnieją zbyt duże liczby kardynalne[56]). Tym samym V=L winien zostać przyjęty z powodów „ontologicznej ekonomii", gdyż „pozwala on zapobiec niepotrzebnym wzlotom wyższej teorii zbiorów"[57].

---

[54] K. Gödel, *What is Cantor's Continuum Problem?*, art. cyt.

[55] Motyw ten jest często obecny w argumentacji przeciwników aksjomatu konstruowalności. Często wskazują oni na jego restryktywność. Zarzut, jaki często wysuwa się wobec aksjomatu konstruowalności, odnosi się m. in. do faktu, że ogranicza on pojęcie podzbioru liczb naturalnych. W myśl aksjomatu konstruowalności istnieją bowiem jedynie definiowalne podzbiory ω. (Opinię taką wyraża np. Moschovakis w: Y. Moschovakis, *Descriptive Set Theory*, Amsterdam 1980, 610). Wielu matematyków uznaje to ograniczenie, uniemożliwiające uznanie istnienia „wszystkich zbiorów pojawiających się na danym etapie tworzenia uniwersum" za nieuzasadnione. Zob. F. R. Drake, *Set theory. An introduction to large cardinals*. Amsterdam 1974, 131. Podobną opinię wyraża Foreman, według którego aksjomat konstruowalności jako restryktywny nie uwzględnia „wszelkich możliwych zachowań zbiorów lub innych obiektów matematycznych". M. Foreman, *Generic large cardinals: new axioms for mathematics?*, w: *Documenta Mathematica, Jahrbuch der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Vol. II*, Berlin 1998, 13. Maddy stawia tezę, że V=L sytuuje się w pewnym szczególnym nurcie myślenia o matematyce, który Maddy nazywa *definabilism* (nazwę tę można – niedoskonale – przetłumaczyć używając neologizmu „definionizm"). W myśl tego stanowiska jedyne obiekty dopuszczalne w matematyce to obiekty *explicite* definiowalne. Definionizm Maddy nazywa „zdyskredytowaną maksymą metodologiczną". P. Maddy, *Does V equal L?*, Journal of Symbolic Logic 58(1993), 41. Aksjomat konstruowalności lokuje się jednak w „definionistycznym paradygmacie". Tym samym należy go odrzucić.

[56] Aksjomat konstruowalności jest sprzeczny z istnieniem liczby mierzalnej Zob. D. Scott, *Measurable cardinals and constructible sets*, Bull. Acad. Polon. Sci. 9(1961), 521-524.

[57] W. V. O. Quine, *Na tropach prawdy*, tłum. z ang. B. Stanosz, Warszawa 1997, 146.

PODSUMOWANIE

Zarówno Gödel, jak i Quine byli zwolennikami realizmu matematycznego. Jednak opierali swoje stanowiska na zupełnie innych argumentach, i nadawali mu inną postać. Różnice dotyczą zarówno ich stanowiska metafilozoficznego, jak i konkretnych rozstrzygnięć dotyczących postaci realizmu. Nie jest jasne, czy – i w jaki sposób – możliwe jest jakieś „uwspólnienie" tych stanowisk i czy możliwe jest sformułowanie jakiejś „kompromisowej" wersji realizmu[58].

JERZY DADACZYŃSKI

SKŁADOWA KONCEPTUALISTYCZNA W PRZEDFREGOWSKICH PODSTAWACH MATEMATYKI

Do połowy XIX wieku przestrzeń poglądów filozoficznych, która stanowiła bazę założeniową dla konstrukcji teorii naukowych, była zasadniczo zdominowana przez dwa główne nurty. Z jednej strony był to krytyczny idealizm typu niemieckiego, który inspirował wiele odmian psychologizmu. Na drugim biegunie dominowały: empiryzm, pozytywizm i materializm, zawdzięczające swą pozycję rozwijającym się burzliwie naukom przyrodniczym, w których doniosłą rolę odgrywał wówczas eksperyment.

Uważa się zarazem, że żaden z tych kierunków filozoficznych nie gwarantował stosownego zaplecza ontologicznego i epistemologicznego naukom logiczno-matematycznym w drugiej połowie XIX wieku. Przekonanie to wyprowadza się z tezy, że dla matematyków owego okresu wyniki tych nauk miały charakter obiektywny, powszechnie obowiązujący, zatem nie wolno ich było uzależniać od immanentnych uwarunkowań ducha oraz od subiektywnych struktur ludzkich procesów myślenia i przedstawiania[1].

---

[58] Próbę taką podejmuje Maddy w pracy: P. Maddy, *Realism in mathematics*, New York, 1990 – jest jednak wątpliwe, czy próba ta jest udana.

[1] Por. R. Carls, *Idee und Menge. Der Aufbau einer kategorialen Ontologie*, München 1974, 22–24.