Jerzy Dadaczyński

Składowa konceptualistyczna w przedfregowskich podstawach matematyki

Studia Philosophiae Christianae 38/1, 60-68

2002

PODSUMOWANIE

Zarówno Gödel, jak i Quine byli zwolennikami realizmu matematycznego. Jednak opierali swoje stanowiska na zupełnie innych argumentach, i nadawali mu inną postać. Różnice dotyczą zarówno ich stanowiska metafilozoficznego, jak i konkretnych rozstrzygnięć dotyczących postaci realizmu. Nie jest jasne, czy – i w jaki sposób – możliwe jest jakieś „uwspólnienie" tych stanowisk i czy możliwe jest sformułowanie jakiejś „kompromisowej" wersji realizmu[58].

JERZY DADACZYŃSKI

SKŁADOWA KONCEPTUALISTYCZNA W PRZEDFREGOWSKICH PODSTAWACH MATEMATYKI

Do połowy XIX wieku przestrzeń poglądów filozoficznych, która stanowiła bazę założeniową dla konstrukcji teorii naukowych, była zasadniczo zdominowana przez dwa główne nurty. Z jednej strony był to krytyczny idealizm typu niemieckiego, który inspirował wiele odmian psychologizmu. Na drugim biegunie dominowały: empiryzm, pozytywizm i materializm, zawdzięczające swą pozycję rozwijającym się burzliwie naukom przyrodniczym, w których doniosłą rolę odgrywał wówczas eksperyment.

Uważa się zarazem, że żaden z tych kierunków filozoficznych nie gwarantował stosownego zaplecza ontologicznego i epistemologicznego naukom logiczno-matematycznym w drugiej połowie XIX wieku. Przekonanie to wyprowadza się z tezy, że dla matematyków owego okresu wyniki tych nauk miały charakter obiektywny, powszechnie obowiązujący, zatem nie wolno ich było uzależniać od immanentnych uwarunkowań ducha oraz od subiektywnych struktur ludzkich procesów myślenia i przedstawiania[1].

---

[58] Próbę taką podejmuje Maddy w pracy: P. Maddy, *Realism in mathematics*, New York, 1990 – jest jednak wątpliwe, czy próba ta jest udana.

[1] Por. R. Carls, *Idee und Menge. Der Aufbau einer kategorialen Ontologie*, München 1974, 22–24.

Odrzucenie pozytywizmu i empiryzmu jako epistemicznej bazy matematyki i logiki miało inne podstawy. Prawa tych nauk posiadały – taką wysuwa się tezę – przynajmniej dla tych, którzy byli w ich rozwój aktywnie zaangażowani, taki stopień pewności, że żaden rodzaj poznania zmysłowego i żadna indukcja nie były go w stanie zagwarantować[2].

Toteż jedynym rozwiązaniem dla matematyków i logików, poszukujących solidnej bazy ontologiczno-epistemologicznej, pozostawało sięgnięcie do filozofii przedkantowskiej. Wiązało się to z renesansem myśli Bolzano (działał on wprawdzie po Kancie, ale był zupełnie zapomniany do drugiej połowy XIX wieku), Leibniza i przede wszystkim Platona. Wysuwa się tezę, że koncepcje nauk formalnych wielu wybitnych matematyków i logików drugiej połowy XIX wieku, takich jak Peirce, Frege, Dedekind, Cantor, Peano, pracujących nad podstawami tych nauk, spotkały się na gruncie platonizmu, przede wszystkim dzięki akceptacji skrajnego realizmu pojęciowego. Twierdzi się również, że platonizm, dający odpowiedź na pytania o solidną, pewną ontologię i epistemologię matematyki i logiki, stał się pośrednio źródłem wielu dokonań w zakresie przedmiotowym wielu matematyków i logików owego okresu. Równocześnie stanowił pomoc dla obrony dotychczasowego dorobku matematyki przed atakami praintuicjonistów, takich jak Kronecker.[3]

Teza, że wiodący logicy i twórcy teorii mnogości drugiej połowy XIX wieku byli zwolennikami skrajnego realizmu pojęciowego wydaje się być niepodważalna. Należał on niewątpliwie do części wspólnej przyjmowanej przez nich ontologii i epistemologii. Istnieje jednak cały szereg wypowiedzi tych samych wiodących logików i twórców teorii mnogości, które wydają się mieć wydźwięk konceptualistyczny, nie komplementarny z wiodącym w ówczesnej ontologii nurtem. Niniejsze opracowanie ma na celu wskazanie owej konceptualistycznej „składowej" ontologii dziewiętnastowiecznych twórców logiki i teorii mnogości[4].

---

[2] Por. Tamże.
[3] Por. Tamże.
[4] Idea napisania tego artykułu powstała podczas lektury fragmentu pracy Franka Krickela (*Teil und Inbegriff. Bernard Bolzanos Mereologie*, Sankt Augustin 1995, 264–274). Autor, omawiając przedfregowskie dzieje pojęcia zbioru, zwrócił uwagę na konceptualistyczne „zabarwienie" niektórych wypowiedzi poprzedników Fregego, dotyczących natury i sposobu istnienia zbiorów.

Owa „składowa" konceptualistyczna ujawniła się szczególnie w wypowiedziach twórców teorii mnogości i logiki, którzy pracowali przed Fregem. Właśnie wówczas zaczęto sobie zdawać sprawę, ze znaczenia pojęć zbioru, klasy czy systemu[5], dla ufundowania całej matematyki. Już w 1884 roku Georg Cantor wypowiedział tezę, że matematyka jest wyprowadzalna z teorii mnogości, czyli z teorii zbiorów nieskończonych[6]. A jeśli tak, to ostateczne rozstrzygnięcia dotyczące statusu ontologicznego zbiorów musiały mieć decydujący wpływ na określenie podstawy ontologicznej dla całej matematyki. Ontologia zbioru determinowała – w pojęciu Cantora – ontologię matematyki.

We współczesnych opracowaniach[7] akcentuje się przede wszystkim tę wypowiedź Cantora, w której podkreślił on, że zbiór jest dla niego obiektem „pokrewnym" z ideą Platona, eksponując właśnie tylko ten jeden element jego „definicji" zbioru[8]. Wyciąga

---

[5] Takich pojęć jak zbiór czy klasa używano w drugiej połowie XIX wieku *de facto* zamiennie, były to synonimy. Różne znaczenia związano z nimi dopiero w aksjomatycznej teorii mnogości von Neumanna (zob. J. von Neumann, *Eine Axiomatisierung der Mengenlehre*, Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal) 100(1925), Bd. 154, 219–240).

[6] „Sie (die allgemeine *Typentheorie* – J. D.) bildet einen wichtigen und grossen Theil der reinen *Mengenlehre* (Theorie des ensembles), also auch der *reinen Mathematik*, denn letztere ist nach meiner Auffassung nichts Anders als reine *Mengenlehre*", G. Cantor, *Principien einer Theorie der Ordnungstypen. Erste Mittheilung*, w: I. Grattan-Guiness, *An unpublished paper by Georg Cantor „Principien einer Theorie der Ordnungstypen". Erste Mittheilung*, Acta Mathematica 89(1970), Bd. 124, 84 (65–107).

Artykuł, napisany przez Cantora w roku 1884, nie ukazał się za jego życia, przede wszystkim na skutek oporu środowiska matematyków niemieckich, którym przewodził Leopold Kronecker, przeciwnik teorii mnogości, nieskończoności aktualnej w matematyce, jeden z praintuicjonistów. Pierwsza publikacja nastąpiła dopiero w roku 1970, dzięki Grattan-Guinessowi.

[7] Por. H. Meschkowski, *Probleme des Unendlichen. Werk und Leben Georg Cantors*, Braunschweig 1967, 111–129; J. W. Dauben, *Georg Cantor and Pope Leo XIII. Mathematics, theology and infinite*, Journal of the History of Ideas 38(1977), 85–108; J. Dadaczyński, *Heurystyczne funkcje założeń filozoficznych w kontekście odkrycia teorii mnogości Georga Cantora*, Kraków 1994 (w tej ostatniej pracy zwrócono wprawdzie uwagę na składową spinozjańsko-fichteańską ontologii Cantora, ale nie podniesiono *explicite* kwestii elementów konceptualistycznych tej ontologii).

[8] „Unter einer (...) «Menge» verstehe ich nämlich allgemein jedes Viele, welches sich als Eines denken läßt, d. h. jeden Inbegriff bestimmter Elemente, welcher durch ein Gesetz zu einem Ganzen verbunden werden kann, und ich glaube hiermit etwas zu definieren, was verwandt ist mit **Platonischen** (podkr. Cantora)

się stąd wniosek, że zbiór w pojęciu Cantora, był – podobnie jak idea Platona – bytem niekonkretnym, pozaczasowym, atemporalnym, abstrakcyjnym, ontycznie pierwotnym w stosunku do jakiejkolwiek działalności mentalnej i jakiejkolwiek formy intelektualnych poszukiwań[9]. I wydaje się, że rzeczywiście taki jest najogólniejszy wydźwięk wypowiedzi Cantora na temat statusu ontycznego zbiorów.

Jednakże dwie próby dookreślenia przez Cantora pojęcia zbioru zawierają wyraźne elementy konceptualizmu. Pierwsza z tych „definicji" – pochodząca z roku 1883 – to dokładnie ta sama, w której zakończeniu Cantor twierdził, że zbiór jest obiektem „spokrewnionym" z ideą Platona: „Pod pojęciem «rozmaitości» (*Mannigfaltigkeit*) czy «zbioru» (*Menge*) rozumiem mianowicie ogólnie każdą wielość (*jedes Viele*), która może być pomyślana jako jedność (*als Eines*), tj. każdy ogół (*Inbegriff*) określonych elementów, które na mocy pewnego prawa mogą być złączone w jedną całość. Mam nadzieję, że definiuję w ten sposób coś, co jest spokrewnione z platońskim εἶδος czy ἰδέα (...)"[10].

Jeśli pominie się ostatnie zdanie tej „definicji" zbioru[11], to zaczyna ona – po części – nabierać charakteru konceptualistycznego. Otóż zbiorem jest wielość, która może zostać pomyślana jako jedność. Powstaje tu istotne pytanie: czy należy rozróżnić zbiory potencjalne, wielości nigdy nie pomyślane jako jedność, ale mogące być pomyślane jako jedność i zbiory zaktualizowane, to znaczy wielości dla których istnieje (istniał) taki podmiot poznający, który dokonał pewnego aktu mentalnego – pomyślał je jako jedność? Co więcej, czy aby stwierdzić, że dana wielość jest potencjalnie zbio-

---

εἶδος oder ἰδέα (...)". G. Cantor, *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten. Nr 5. Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*, w: G. Cantor, *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, hrsg. E. Zermelo, Berlin 1932, reprint: Berlin-Heidelberg-New York 1980, 204 (165–209).

[9] Por. chociażby J. Dadaczyński, dz. cyt., 82–86.

[10] Tekst niemiecki w przypisie 8. Tłumaczenie z niemieckiego: R. Murawski, w: *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, wyb. i opr. R. Murawski, Poznań 1986, 157.

[11] Cantor w swych dookreśleniach pojęcia zbioru posługuje się nie zdefiniowanymi i intuicyjnie nieklarownymi pojęciami, takimi jak: wielość czy ogół. Dlatego używając czasami terminu „definicja" dla owych dookreśleń pozostawia się go w cudzysłowie.

rem należy – zdaje się bowiem, że nie ma innej drogi – pomyśleć ją jako jedność? Wydaje się, że na obydwa pytania należy udzielić – wczytując się w intencję wypowiedzi Cantora – pozytywnej odpowiedzi. Zatem pewien akt mentalny – pomyślenie – przez podmiot myślący – byłby według wypowiedzi Cantora niezbędny dla zaktualizowania się zbioru. To już teza konceptualistyczna, bowiem wynika z niej, że działalność mentalna jest konstytutywna przynajmniej dla zaktualizowania się zbioru. Co więcej, z wypowiedzi Cantora wynika, że właśnie w owym akcie mentalnym ogół byłby łączony w całość. Aktualizacja zbioru to efekt mentalnej operacji na wielości (ogóle), operacji nazwanej łączeniem. W swej „definicji" Cantor nie określił statusu ontycznego wielości (ogółów). Ale bez względu na to jaki by on nie był, można przynajmniej brać pod uwagę taką możliwość, że wynikiem operacji dokonanej na nich byłyby obiekty mentalne, konstrukty myślącego podmiotu. Czyli dopuszczalna jest taka interpretacja „definicji" Cantora, z której wynikałoby, że zbiory zaktualizowane są konstruowane przez myślący podmiot.

Oczywiście, nowe światło na pojmowanie zbioru przez Cantora rzuca ostatnie zdanie jego „definicji". Wówczas powstaje jednak istotny problem spójności dwóch jej części, z których jedna niewątpliwie może być interpretowana w duchu konceptualistycznym, druga zaś ma charakter platoński. W każdym razie dla prowadzonych tutaj badań istotne jest, że w Cantorowskich podstawach matematyki pojawia się niewątpliwie – obok platońskiego – wątek konceptualistyczny.

Teza ta ulega wzmocnieniu, jeśli uwzględni się drugie określenie pojęcia zbioru, które podał Cantor: „Pod pojęciem «zbioru» (*Menge*) rozumiemy każde zebranie w jedną całość (*jede Zusammenfassung zu einem Ganzen*) *M* określonych przedmiotów *m* naszego oglądu (*unserer Anschauung*) czy naszych myśli (które tu nazywane są «elementami» *M*)"[12]. Nie można już tu zauważyć tendencji do rozróżnienia zbioru potencjalnego i zbioru zaktualizo-

[12] „Unter einer Menge verstehen wir jede Zusammenfassung *M* von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten *m* unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die Elemente von *M* genannt werden) zu einem ganzen". G. Cantor, *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*, w: G. Cantor, *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, dz. cyt., 282 (282–356); tłum z niem. w: *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, dz. cyt., 157.

wanego. Zbiorem jest „zebranie w całość", które powinno być rozumiane – jak się wydaje – jako efekt, produkt aktu „zbierania w całość" elementów. Trzeba zauważyć, że w wypadku tej drugiej definicji obiektami, na których dokonuje się operacji „zbierania w całość" nie są przedmioty obiektywnie istniejącej rzeczywistości (zewnętrznej w stosunku do podmiotu myślącego), ale przedmioty mentalne („obiekty naszego oglądu", „obiekty naszego myślenia"). Z analizy poprzedniej „definicji" wynikało, że sama operacja „zbierania w całość" elementów też ma charakter myślowy, mentalny. A zatem produkt takiej operacji – zbiór – wydaje się też z konieczności być obiektem pomyślanym, przedmiotem mentalnym, konstruktem myślącego podmiotu. Tak więc drugie Cantorowskie dookreślenie pojęcia zbioru jeszcze bardziej uwypukla składową konceptualistyczną w ujawnionych przez niego ontologicznych podstawach matematyki.

Okazuje się, że Cantor, który skłaniał się czasami ku konceptualizmowi w swych charakterystykach zbioru, nie był osamotniony. Drugi z wybitnych matematyków, który istotnie przyczynił się do powstania teorii mnogości, Richard Dedekind[13], również przejawiał takie tendencje. Wychodząc od pojęcia rzeczy (*Ding*) jako „przedmiotu naszego myślenia" (*Gegenstand unseres Denkens*) „definiował" on następująco pojęcie zbioru (w jego terminologii: „systemu"): „Zdarza się bardzo często, że różne rzeczy *a, b, c*... z jakiegoś powodu ujęte ze wspólnego punktu widzenia, są w umyśle złożone; mówi się wówczas, że tworzą one pewien system *S*; nazywa się wówczas rzeczy *a, b, c*... elementami systemu *S*; i na odwrót, system *S* składa się z tych elementów"[14].

---

[13] To właśnie Dedekind jako pierwszy wykorzystał tę własność (znaną wcześniej Bolzano) wszystkich zbiorów nieskończonych, że dla każdego z nich istnieje podzbiór właściwy z nim równoliczny, do zdefiniowania zbiorów nieskończonych. Współcześnie prezentuje się czasami pogląd, iż istniały dwie wersje czy wręcz dwie przedaksjomatyczne teorie mnogości: Cantora i Dedekinda. Por. F. A. Medwedew, *Über die abstrakten Mengelehren von Cantor und Dedekind*, Berichte zur Wissenschaftsgeschichte 7(1984), 195–200.

[14] „Es kommt sehr häufig vor, daß verschiedene Dinge *a*, *b*, *c*,... aus irgend einer Veranlassung unter einem gemeinsamen Gesichtspunkte aufgefaßt, im Geiste zusammengestellt werden, und man sagt dann, daß sie ein System *S* bilden man nennt die Dinge *a*, *b*, *c*,... die Elemente des Systems *S*, sie sind enthalten in *S* umgekehrt besteht *S* aus diesen Elementen". R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?*, Braunschweig 1960[7].

W tej charakterystyce systemu (zbioru) można dostrzec daleko idące paralele, do tych Cantorowskich „definicji" zbioru, w których ujawnił on tendencje konceptualistyczne. „Wyjściowe" przedmioty, z których „budowany" jest system są „przedmiotami naszego myślenia". Na tych przedmiotach, ujmowanych przez podmiot poznający „ze wspólnego punktu widzenia", wykonywana jest przez umysł (dosłownie: *Geist*) operacja „składania" (*zusammenstellen*). Można zatem wnioskować, że otrzymany w ten sposób „produkt" mentalnej operacji na „przedmiotach naszego myślenia" jest przedmiotem mentalnym. Innymi słowy: Dedekindowskie systemy, czyli zbiory, są konstruktami umysłu. Zatem również przedstawiona przez Dedekinda koncepcja zbioru wykazuje istotne cechy konceptualistyczne.

Już wcześniej podkreślono, że dla twórców teorii mnogości: Cantora i Dedekinda pojęcie zbioru było podstawowym pojęciem matematycznym. Ich zdaniem matematyka mogła zostać zbudowana na teorii mnogości. Zatem ostatecznie ontologia zbioru rozstrzygała kwestie orientacji ontologicznej matematyki. Jak wcześniej wskazywano, przyjmuje się – słusznie – że obaj matematycy chcieli budować matematykę na podstawach platońskich. W niniejszym opracowaniu wykazano jednak, że ontologiczne podstawy matematyki Cantora i Dedekinda były niespójne. Obok dominującego wątku platońskiego można też dostrzec wyraźnie składową konceptualistyczną ich ontologii.

Pojęcie zbioru było też jednym z podstawowych pojęć burzliwie rozwijającej się w drugiej połowie XIX wieku logiki. „Zwieńczeniem" owego rozwoju była przeprowadzona przez Fregego próba wyprowadzenia matematyki z logiki. Dlatego wydaje się, że przedfregowskie koncepcje zbioru wypracowane w ramach logiki były również nieobojętne dla określenia ontologicznych podstaw matematyki. Jednym z najwybitniejszych logików owego okresu był Ernst Schröder. Odpowiednikiem Cantorowskiego pojęcia zbioru było w logice Schrödera pojęcie klasy. Klasę rozumiał on jako całość, która złożona jest z indywiduów: „Jesteśmy w stanie dowolne obiekty naszego myślenia jako indywidua połączyć w klasę"[15]. Opisana przez Schrödera „geneza" klasy dokładnie przypomina te „definicje" zbioru Cantora i Dedekinda, w których ujawniły się ich tenden-

[15] „Wir sind im stande irgend welche Objekte des Denkens als Individuen zu einer Klasse zu vereinigen". E. Schröder, *Vorlesungen über die Algebra der Logik*, Bd I, Leipzig 1890, 157.

cje konceptualistyczne. Indywidua to dowolne przedmioty myślenia, obiekty mentalne. Na nich umysł dokonuje intelektualnej operacji łączenia. „Produktem" jest klasa, która – jak się wydaje – jako wynik operacji myślowej na obiektach mentalnych, musi być konstruktem umysłu, obiektem mentalnym. A więc również Schröderowska koncepcja zbioru ma charakter konceptualistyczny.

Warto jeszcze dodać, że podobną tendencję w charakteryzowaniu klasy (zbioru) przejawiał także George Boole. Według niego klasy powstają w wyniku mentalnego aktu wyboru przedmiotów, które podpadają pod jakieś pojęcie[16].

Generalnie zatem można stwierdzić, że w przedfregowskich podstawach matematyki – i logiki – obok dominującego wątku platońskiego, pojawiała się – i to u wiodących autorów – składowa konceptualistyczna. Problemem pozostawała, oczywiście, kwestia pogodzenia tych dwóch tendencji.

Okazuje się zatem, że dopiero u Fregego otrzymała matematyka jednoznacznie platońskie podstawy. Wynikało to – jak się wydaje – z dwóch przyjętych przez Fregego (komplementarnych) założeń:

1. Obiekty logiki – a matematykę można było, według Fregego, wywieść z logiki – są abstrakcyjnymi, pozaprzestrzennymi i atemporalnymi obiektami;

2. Nauki – a więc również matematyki – nie można opierać na jakichkolwiek przejawach aktywności psychicznej podmiotów poznających. Ten postulat antypsychologizmu bezpośrednio implikował eliminację jakiejkolwiek składowej konceptualistycznej (konstruktywistycznej) z podstaw matematyki[17].

Poza tym, u Fregego zaczyna brać górę zupełnie inne niż dotąd podejście do podstawowego pojęcia matematyki, jakim było pojęcie zbioru (klasy). Przedfregowskie ujęcia istoty zbioru miały charakter

---

[16] Ta uwaga pochodzi od Franka Krickela (F. Krickel, dz. cyt., 268; zob. też G. Boole, *The Mathematical Analysis of Logic*, Cambridge 1847, 4n; Tenże, *Investigation of the Laws of Thought*, London 1854, 27; 32).

[17] Postulat antypsychologizmu sformułował Frege stosunkowo wcześnie, bo już w roku 1884 (G. Frege, *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, Breslau 1884). Trudno jednoznacznie określić, czy była to jedynie reakcja na panującą w filozofii niemieckiej XIX wieku opcję kantowsko-idealistyczną, czy również na składową konceptualistyczną ujawniającą się w „definicjach" zbioru czy klasy takich autorów jak Boole, Schröder, Cantor i Dedekind.

przede wszystkim treściowy. Natomiast u Fregego zaczyna brać górę tendencja formalna. Podaje on pewne zasady „nakładane" na zbiory, na przykład te, które później nazwano zasadami nieograniczonej komprehensji i ekstensjonalności[18]. Zasady te są *de facto* aksjomatami, które spełniają funkcję definicji uwikłanej pojęcia zbioru[19].

Ta tendencja formalna w podejściu do pojęcia zbioru zaczęła zdecydowanie dominować nad ujęciami treściowymi, po okresie kryzysu podstaw matematyki (antynomie) i podaniu pierwszych aksjomatyk teorii mnogości. W większości tych aksjomatyk pojęcie zbioru było pojęciem pierwotnym. Na pytanie, czym jest zbiór – podstawowe pojęcie matematyki – odpowiadano po prostu, że to przedmiot, który spełnia aksjomaty teorii mnogości.

Jednakże dla filozofów matematyki taka odpowiedź wydaje się być niewystarczająca. Ich nadal interesuje pytanie: jakie są owe przedmioty, które spełniają aksjomatykę (aksjomatyki) teorii mnogości? Jak one istnieją? Czyli *de facto* stawiają oni pytanie o model (modele) teorii mnogości. Pytanie o stosowną semantykę teorii mnogości[20] jest powrotem – w istocie – do treściowego podejścia do pojęcia zbioru. Jest – ze względu na status teorii mnogości – pytaniem o ontologię matematyki[21].

---

[18] Por. H. G. Steiner, *Mengenlehre*, w: *Historisches Wörterbuch der Philosophie*, Bd. 5, hrsg. J. Ritter, K. Gründer, Darmstadt 1980, 1044.

[19] Współcześnie uważa się, że już Cantor *implicite* przyjmował aksjomat ekstensjonalności. Według H. Wanga: „Like most mathematicians, Cantor uses implicitly the axiom of extensionality, for example, in establishing $P = Q$ for two point sets P and Q". H. Wang, *From Mathematics to Philosophy*, London 1974, 211. Zdaniem Betha przyjmowane *implicite* pewniki komprehensji oraz ekstensjonalności stanowiły podstawę przedaksjomatycznej teorii mnogości Cantora. Por. E. Beth, *Foundations of Mathematics*, Amsterdam 1959, 366; 369; 382.

[20] Por. E. Zermelo, *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre*, Mathematische Annalen 41(1908), Bd. 65, 261–268.

[21] Teoria mnogości dostarcza – koniec końców – modeli wszystkim teoriom matematycznym. Natomiast pytanie o modele teorii mnogości wydaje się być zdecydowanie pytaniem filozoficznym. Oczywiście, ostatnie wyniki badań prowadzonych w ramach teorii kategorii zdają się temu ostatniemu stwierdzeniu zaprzeczać. Specjalny typ kategorii, jakie stanowią toposy, dostarczają modeli lokalnym teoriom mnogości (te modele są w jednoznaczny sposób wyznaczone). Zatem można by twierdzić, że dla różnych teorii mnogości (i różnych matematyk, na przykład: klasycznej, intuicjonistycznej) można znaleźć matematyczne modele, jakimi są toposy. Trzeba jednak zauważyć, że nawet dla teorii toposów (teorii kategorii) pozostaje teoria mnogości (najczęściej w wersji von Neumanna-Bernaysa-Gödla – *NBG*) teorią „logicznie pierwotną". Na początku każdego podręcznika teorii kategorii zakłada się bowiem *NBG*. Por. J. L. Bell, *Toposes and local set theories. An Introduction*, Oxford 1988.