

Jerzy Dadaczyński

Ontologiczne i poznawcze założenia teorii mnogości Georga Cantora Cz. 1

Studia Philosophiae Christianae 39/1, 7-42

2003

Artykuł został zdigitalizowany i opracowany do udostępnienia w internecie przez Muzeum Historii Polski w ramach prac podejmowanych na rzecz zapewnienia otwartego, powszechnego i trwałego dostępu do polskiego dorobku naukowego i kulturalnego. Artykuł jest umieszczony w kolekcji cyfrowej bazhum.muzhp.pl, gromadzącej zawartość polskich czasopism humanistycznych i społecznych.

Tekst jest udostępniony do wykorzystania w ramach dozwolonego użytku.

JERZY DADACZYŃSKI

ONTOLOGICZNE I POZNAWCZE ZAŁOŻENIA TEORII MNOGOŚCI GEORGA CANTORA

CZĘŚĆ I

1. Założenia ontologiczne. 1.1. Wątek spinozjańsko-fichteński. 1.1.1. Platoniczna interpretacja ontologii Spinozy. 1.1.2. Monizm substancjalny? Między realizmem a idealizmem. 1.1.3. Dualizm: sfery intra- i transsubiektywna. 1.1.4. Paralelizm sfer intra- i transsubiektywnej. 1.1.5. Inteligibilność porządku poznawczego? 1.2. Wątek platoński. 1.2.1. Ogólna akceptacja ontologii Platona. 1.2.2. Problem uniwersaliów. 1.2.2.1. Język a rzeczywistość pozajęzykowa. 1.2.2.2. Skrajny realizm pojęciowy. 1.2.2.3. Zbiór – idea – byt abstrakcyjny. 1.3. Nieścistości dwuwątkowej ontologii. 2. Implikacje założeń ontologicznych. 2.1. Główne kierunki oddziaływania. 2.2. Ontologia a definicja liczb kardynalnych.

Czy o powstaniu teorii mnogości zdecydowały tylko czynniki natury matematycznej i intuicje metamatematyczne Cantora? Analizując kontekst odkrycia tej teorii, wypada uwzględnić eksponowane przez niego przekonania filozoficzne. Dlatego celem niniejszej pracy będzie prezentacja tych tez ontologicznych i teoriopoznawczych, które Cantor uważał za logicznie pierwotne w stosunku do budowanej przez siebie teorii mnogości. Jest to jednak tylko pewien ogólny szkic tematyki pracy. Jej uszczegółowienie wymaga uprzedniego wprowadzenia kilku uwag.

Nie można rozstrzygnąć, czy Cantor już w pierwszej fazie swojej pracy naukowej, a więc w latach 70. XIX wieku, kiedy tworzył podstawy teorii pozaskończonych liczb porządkowych i mocy zbiorów nieskończonych, wyraźnie uświadamiał sobie oraz akceptował tezy ontologiczne czy teoriopoznawcze, które prezentował później jako logicznie pierwotny „fundament” teorii mnogości. Nie jest wykluczone,

zione, że pracując w ramach weierstrassowskiego wzorca uprawiania analizy, nie odczuwał on potrzeby eksponowania filozoficznych założeń tworzonej teorii. Dopiero rodząca się opozycja mogła przyczynić się do tego, że zaczął publikować swe przekonania w kwestii natury i kryteriów istnienia obiektów matematycznych.

W pracach i listach Cantora elementy refleksji filozoficznej zaczęły się pojawiać dopiero na początku lat 80. Trudno jednak przypuszczać, aby prezentowane tam założenia filozoficzne zostały przez niego przyjęte *ad hoc*. Poza tym, na początku lat 80. proces powstawania Cantorowskiej teorii nie był zakończony. Te przesłanki przemawiają za zaliczeniem filozoficznych założeń teorii mnogości do zbioru czynników tworzących kontekst odkrycia tej teorii.

Z góry należy wskazać trudności, na jakie napotyka realizacja wyznaczonego celu. Tylko pozornie mogłoby się wydawać, że określenie Cantorowskich preferencji filozoficznych jest sprawą łatwą i nie wymagającą szczegółowych analiz. Wszak tradycyjnie zwykło się klasyfikować Cantora jako przedstawiciela platonizmu. Istotna trudność w prezentacji filozoficznego „fundamentu” teorii mnogości polega na tym, że nigdy nie pokusił się on o jego systematyczne przedstawienie i uzasadnienie.

Pod tym względem był zupełnym przeciwieństwem G. Fregego, który precyzyjnie konstruował ontologię, aby później oprzeć na niej swój system logiki. Inny sposób podejścia Cantora do kwestii założeń filozoficznych wynikał najprawdopodobniej stąd, że był on przede wszystkim matematykiem pracującym zgodnie z kanonami szkoły K. Weierstrassa. Kiedy jednak konsekwencje sposobu stawiania przezeń problemów i metod ich rozwiązywania zaczęły burzyć zastaną tradycję filozoficzną, zmuszony został do obrony powstającej teorii na płaszczyźnie ontologicznej i teoriopoznawczej.

Dotyczyło to przede wszystkim kwestii istnienia obiektów matematyki. Cantor reprezentował przyjętą ogólnie wśród niemieckojęzycznych przedstawicieli analizy opcję, według której do przyjęcia istnienia definiowanego przedmiotu nie było wymagane podanie sposobu jego konstrukcji¹. Dopiero, gdy on sam w analogiczny sposób, bez konstrukcji, przyjął istnienie liczb pozaskończonych lub

¹ Klasycznym przykładem jest twierdzenie o istnieniu kresu górnego czy dolnego funkcji zmiennej rzeczywistej, ciągłej w danym przedziale. Wspomnianą opcję reprezentowali B. Bolzano i wpływowy K. Weierstrass.

zbiorów nieskończonych, rozpoczęła się polemika, w której musiał bronić koncepcji istnienia, milcząco przyjmowanej w dziewiętnastowiecznej matematyce. Wypowiedzi Cantora o charakterze ontologicznym lub epistemologicznym nie miały charakteru systematycznego. Raczej były głosem w polemice, w której po przeciwnej stronie najważniejsze zdanie należało do dawnego nauczyciela Cantora na uniwersytecie berlińskim, L. Kroneckera².

Dodatkową trudność sprawia to, iż Cantor nie rozgraniczał wyraźnie swoich poglądów ontologicznych i teoriopoznawczych. Dlatego również w niniejszej pracy nie będzie możliwe całkowite rozdzielenie obydwu płaszczyzn.

Wypada jeszcze raz podkreślić, że filozoficzne zapatrywania Cantora były ujawniane ze względu na kształtującą się dopiero teorię mnogości. Toteż celem pracy będzie nie tylko prezentacja jego preferencji w zakresie ontologii czy teorii poznania, lecz również – gdy to możliwe – ukazanie wpływu, jaki owe założenia mogły odgrywać w formułowaniu i rozwiązywaniu istotnych zagadnień przedmiotowych. Podkreślone też zostanie znaczenie, jakie miały jego preferencje filozoficzne dla powstania ważnego kierunku w filozofii matematyki – hilbertowskiego formalizmu. Istotną tezę w tym względzie będzie stwierdzenie, że już Cantor reprezentował stanowisko, które można określić jako „formalizm metodyczny”.

Takie ustawienie tematyki determinuje strukturę pracy. Dwukrotnie, po zaprezentowaniu możliwych do zrekonstruowania najogólniejszych założeń ontologicznych, a potem poznawczych, zostanie ukazana zależność najpierw pewnych działań samego Cantora w zakresie matematyki, a następnie kształtowania się pocantorskich poglądów w zakresie filozofii matematyki od przyjmowanych przez twórcę teorii mnogości preferencji filozoficznych.

² Niestety, również L. Kronecker nie opracował systematycznie swoich koncepcji w zakresie ontologii i epistemologii. Swoje poglądy prezentował on zasadniczo w dygresjach podczas prowadzonych wykładów czy też w trakcie towarzyszących dyskusji matematyków. Por. W. Purkert, H. J. Ilgads, *Georg Cantor*, Leipzig 1985, 35-37. Dlatego jego poglądy znane są jedynie „z drugiej ręki”, dzięki opracowaniom biograficznym poświęconym wybitnym przedstawicielom matematyki niemieckiej drugiej połowy XIX wieku. Brak solidnego źródła zawierającego ontologię i epistemologię matematyki L. Kroneckera jeszcze bardziej utrudnia przedstawienie poglądów jego głównego opoenta w tym zakresie, Cantora.

1. ZAŁOŻENIA ONTOLOGICZNE

W zakresie ontologii problemy związane z jej prezentacją i częściową rekonstrukcją mają co najmniej dwojaki charakter. Po pierwsze Cantor, często tylko szkicując własne poglądy, dla ich uzasadnienia odwoływał się do zastanych systemów filozoficznych, przede wszystkim Platona i Spinozy. Wskazywał przy tym, że jego tezy harmonizują z głównymi wątkami owych systemów. Jediną metodą rekonstrukcji założeń ontologicznych Cantora wydaje się wówczas poszukiwanie części wspólnej obu systemów, takie ich uzgodnienie w zakresie interesujących go zagadnień, aby stanowiły spójną całość.

Niejako *a priori* można też wskazać drugą trudność w ujawnianiu poglądów z zakresu ontologii Cantora, mianowicie nieostrość terminologiczną. Z góry wiadomo, że co innego oznacza termin „idea” u Platona, a co innego u Spinozy. Do tego dochodzi jeszcze wieloznaczność terminów u poszczególnych autorów. Cantor również nie dbał o uściślenie swojej terminologii filozoficznej. Poza tym starał się kilkakrotnie dookreślić w swych tekstach filozoficznych, czym jest zbiór. Dla matematyków prezentujących przekonania formalistyczne jest to przedsięwzięcie absolutnie zbędne. W tradycji zermelowskiej zbiór jako pojęcie pierwotne jest wprowadzany przy pomocy definicji uwikłanej, to znaczy w aksjomatyce opisującej żądane własności pojęcia pierwotnego. Cantorowskie próby filozoficznego dookreślenia pojęcia zbioru zawierają ważne intuicje natury ontologicznej, ale z konieczności dopuszczają wieloznaczność w interpretacji.

Tekst, który najpełniej ujawnia założenia ontologiczne teorii mnogości Cantora, pochodzi z roku 1883³. Dlatego będzie on podstawą – uzupełnianą innymi źródłami – prezentacji jego ontologii⁴.

³ Por. G. Cantor, *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten. Nr 5. Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*, 1883, w: G. Cantor, *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, hrsg. E. Zermelo, Berlin 1932 [reprint Berlin, Heidelberg, New York 1980], 181-183. Bardzo istotne dla zrozumienia tego tekstu przypisy autora znajdują się na s. 206-207. Tezy zawarte na początku tego tekstu stanowią ontologiczną bazę dla doniosłych wypowiedzi natury epistemologicznej, a jego następne fragmenty będą analizowane przy omawianiu epistemologii Cantora.

⁴ Cantor nie zaprezentował „pełnego” i spójnego zbioru tez ontologicznych. Dlatego – ściśle rzecz biorąc – nie powinno się mówić o „ontologii Cantora”. Ze względów praktycznych posłużono się jednak w niniejszej pracy wspomnianym terminem. Zastępuje on długie frazy typu: „założenia ontologiczne Cantora”. Ta sama uwaga dotyczy terminu „teoria poznania Cantora”.

Twórca teorii mnogości starał się w nim uzasadnić istnienie poza-skończonych liczb porządkowych oraz pozaskończonych mocy zbiorów (liczb kardynalnych). Właśnie tutaj odwołał się on do systemów Spinozy i Platona, aby uwiarygodnić własne przekonania dotyczące istnienia obiektów matematycznych.

Cantor stwierdził, że o istnieniu (*Existenz*) lub rzeczywistości (*Realität*) liczb całkowitych, zarówno skończonych, jak i nieskończonych, można mówić w dwóch znaczeniach (*Bedeutung*). Dokładnie w tych samych dwóch znaczeniach, w jakich można przyjmować istnienie pojęć (*Begriffen*) lub idei (*Ideen*)⁵.

Ostatnia uwaga jest cenną wskazówką w rekonstrukcji ogólnych założeń ontologicznych Cantora. Pozwoli ona bowiem, przy bliższym doprecyzowaniu rozumienia przez niego obydwu sposobów istnienia liczb całkowitych, stwierdzić to samo o istnieniu pojęć i idei. Należy też zaraz zaznaczyć, że Cantor nie określił bliżej, jak rozumieć terminy: „pojęcie” i „idea”. Z jego wprowadzenia nie wynika też, czy są one nazwami odnoszącymi się do tej samej rzeczywistości i mogą być stosowane zamiennie, czy też chodzi raczej o nazwy odnoszące się do różnych, ale izomorficznych ze sobą zakresów rzeczywistości. Innymi słowy: czy pojęcie i idea to dla Cantora to samo, czy też nie.

Każda liczba całkowita – a zatem również, zgodnie z tym, co powiedziano wyżej, każde pojęcie i idea – ma równocześnie dwa sposoby istnienia⁶: intrasubiektywne (immanentne) oraz transsubiektywne⁷. Uzasadnienie dla dualizmu istnienia liczb (pojęć, idei) znalazł Cantor między innymi w systemie Spinozy⁸.

⁵ „Wir können in zwei Bedeutungen von der Wirklichkeit oder Existenz der ganzen Zahlen, der endlichen sowie der unendlichen sprechen; genau genommen sind es aber dieselben zwei Beziehungen, in welchen allgemein die Realität von irgend welchen Begriffen und Ideen in Betracht gezogen werden kann”. G. Cantor, *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten. Nr 5. Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*, art. cyt., 181.

⁶ Inaczej: każda liczba całkowita jest realna na dwa sposoby.

⁷ Inaczej: „transjente Realität” jako przeciwstawienie „immanente Realität”. „(...) es sei mir gestattet, diese Art der Realität unsrer Zahlen ihre intrasubjektive oder immanente Realität zu nennen.... Diese zweite Art der Realität nenne ich die transsubjektive oder auch transjente Realität der ganzen Zahlen”. G. Cantor, *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten. Nr 5. Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*, art. cyt., 181.

⁸ „Diese Überzeugung stimmt im wesentlichen (...) mit einem wesentlichen Zuge des Spinozaschen Systems überein; (...)”. Tamże, 206 (przypis Cantora do s. 181).

1.1. WĄTEK SPINOZJAŃSKO-FICHTEAŃSKI⁹

Procedura dalszej analizy będzie następująca: chodzi o stwierdzenie, w jakim wycinku systemu Spinozy doszukiwał się matematyk niemiecki potwierdzenia swej tezy, a następnie o to, na ile zmienił lub modyfikował dla własnych potrzeb twierdzenia Spinozjańskie przy okazji określenia dwu sposobów istnienia liczb (pojęć, idei). Uchwycenie istotnych elementów systemu Spinozy, które Cantor akceptował lub reinterpretował, oraz sam sposób reinterpretacji pozwala wyznaczyć przyjętą przez niego perspektywę ontologiczną.

1.1.1. Platonizująca interpretacja ontologii Spinozy

Twórca teorii mnogości dla uzasadnienia swej wypowiedzi o dwu sposobach istnienia odwołał się wprost do twierdzenia zawartego w *Etyce*: „porządek i związek idei jest taki sam, jak porządek i związek rzeczy”¹⁰. W tej tezie Spinozy znajduje wyraz jego teoria uniwersalnego paralelizmu dwu atrybutów jednej – jedynej istniejącej substancji: rozciągłości i myśli. Każda poszczególna rzecz, według Spinozy, to jakiś modus substancji. Dlatego każdą można rozważać z punktu widzenia dwu atrybutów.

Ów dualizm można ująć jeszcze inaczej – każda rzecz ma niejako podwójną egzystencję: jako modus atrybutu rozciągłości jest ciałem, zaś jako modus atrybutu myślenia jest ideą. Przy czym ciało i idea nie są dwiema różnymi rzeczami, lecz stanowią zawsze tę samą rzecz rozważaną z dwu różnych punktów widzenia.

Zatem cały świat ma formalnie dwa porządki: posiada strukturę cielesną, rozciągłościową oraz idealną, logiczną. Obydwa te po-

⁹ W toku prowadzonych analiz będzie chodziło o wskazanie, że obok wpływu filozofii Spinozy, w ontologii Cantora dostrzegalne są inspiracje, których źródłem był dziewnastowieczny niemiecki idealizm. Użycie w tytule paragrafu sformułowania „wątek spinozjańsko-idealistyyczny” nie wyznaczyłoby jednoznacznie typu idealizmu inspirowanego Cantora. Zdecydowano się na sformułowanie „wątek spinozjańsko-fichteński” z dwu powodów:

1. Filozofia J. G. Fichtego jest reprezentatywna dla wspomnianego nurtu idealizmu;
2. W pracy niniejszej zostanie uzasadniony związek ontologii Cantora z dorobkiem J. G. Fichtego.

¹⁰ „Hinsichtlich Spinozas brauche ich nur an seinen Satz in Ethik, pars II, prop. VII zu erinnern: ordo et connexio idearum idem est ac ordo et connexio rerum?”. Tamże, 207 (przypis Cantora do s. 181). Tłumaczenie polskie za: B. de Spinoza, *Etyka w porządku geometrycznym dowiedziona*, tłum. z łac. I. Myślicki, oprac. i wstęp L. Kołakowski, Warszawa 1954.

rządki są jednak tylko formami przejawiania się jedynego istniejącego porządku rzeczywistości¹¹. Ze względu na akcentowany przez Spinozę uniwersalny paralelizm obydwu sposobów przejawiania się rzeczywistości można twierdzić, że porządki te są identyczne z dokładnością do izomorfizmu lub, że są izomorficzne.

Dla dobrego odczytania Cantora, posługującego się niedookreślonym terminem „idea” i odwołującego się do Spinozy, istotna wydaje się odpowiedź na pytanie: co oznacza atrybut myślenia przypisywany przyrodzie i co oznacza własność „bycia ideą” przysługująca poszczególniej rzeczy?

Wśród możliwych interpretacji najlepiej odpowiadała Cantorowi – jak się wydaje – interpretacja platonizująca, bowiem dla uzasadnienia tezy o dualizmie istnienia odwołał się on, jak zaznaczono wyżej, zarówno do Spinozy, jak i do Platona¹². Według niej modus atrybutu myślenia to jednostkowo pojęta idea platońska¹³. Jej egzystencja jest zagwarantowana niezależnie od istnienia jakiegokolwiek podmiotu aktualnie poznającego tę rzecz, do której owa idea się odnosi. L. Kołakowski w swej interpretacji Spinozy także wydaje się bliski platonizującego rozumienia tego filozofa. Według niego rzecz jako idea to rzecz jako przedmiot poznania, jednak nie aktualnego, lecz możliwego. Gwarantuje to poznawalność świata. Nie jest ona cechą subiektywnego umysłu, polegającą na zdolności do poznania świata, ale odrębną cechą samego świata (częścią jego struktury), obiektywnie mu przysługującą, bez względu na to, czy ktoś go aktualnie poznaje lub poznawać będzie¹⁴.

Nie wdając się w dalszą szczegółową analizę ontologii Spinozjańskiej, wypada zebrać w całość te jej najistotniejsze tezy, które

¹¹ Por. L. Kołakowski, *Wstęp*, w: B. de Spinoza, *Etyka w porządku geometrycznym dowiedziona*, dz. cyt., XXII-XXIII.

¹² Inne najpoważniejsze wersje interpretacji to:

1. Subidealistyczna: egzystencja rzeczy uzależniona jest od aktualnego istnienia umysłu, dla którego dana rzecz stanowi przedmiot poznania;

2. Panpsychiczna czy hylozoistyczna: każdy przedmiot posiada zdolność myślenia lub każda rzecz jest ożywiona. Por. L. Kołakowski, art. cyt., XXIII-XXIV.

¹³ Idea jednostkowa to taka idea, do zakresu której należy dokładnie jeden element (należałoby dodać: element rozciągły, by zostać wierny koncepcji Spinozjańskiej). L. Kołakowski w swej interpretacji Spinozy na określenie tego typu idei posługuje się terminem: „idea syngularna”. Por. L. Kołakowski, art. cyt., XXVI-XXVII. W niniejszej pracy wybrano termin „idea jednostkowa”.

¹⁴ Por. Tamże.

mogły zostać przeniesione do ontologii Cantora. Można je streścić następująco:

1. Istnieje jedna substancja (monizm substancjalny);
2. Istnieją (przynajmniej formalnie) dwa porządki rzeczywistości: idealny i materialny (dualizm). Każdej rzeczy przysługuje podwójne istnienie jako rzeczy materialnej oraz idei jednostkowej;
3. Obydwa porządki rzeczywistości są izomorficzne (paralelizm);
4. Sfera idealna posiada charakter obiektywnego – niezależnego od jakiegokolwiek podmiotu aktualnie poznającego – porządku poznawczego (inteligibilność).

Wypada teraz, wracając do analizowanego tekstu Cantora, zapytać: jaką recepcję w jego ontologii znalazły wyżej wymienione twierdzenia Spinozy?

1.1.2. Monizm substancjalny? Między realizmem a idealizmem

Odpowiednik tezy stwierdzającej monizm substancjalny może stanowić wypowiedź Cantora, że związek obu realności (*Realitäten*) – intrasubiektywnej oraz transsubiektywnej – ma swoją właściwą podstawę w „jedności wszystkiego, do której my sami współnależymy”¹⁵. Jak rozumieć ową „jedność wszystkiego” – czy w sensie monizmu substancjalnego właśnie, czy tylko jakiegoś izomorfizmu sfery intra- i transsubiektywnej, tego Cantor nie dopowiedział.

Wskazówką, pozwalającą nieco lepiej określić jego myśl, jest stwierdzenie, iż stanowisko, które reprezentuje, ma w takim samym stopniu podstawy realistyczne, co idealistyczne¹⁶. W kontekście wypowiedzi o „jedności wszystkiego”, a więc i obydwu realności (*Realitäten*), należy chyba tezę Cantora rozumieć jako próbę określenia własnego stanowiska w ramach sytuacji problemowej, która legła u podstaw powstania niemieckiego idealizmu na początku XIX wieku.

Za zasadnicze zagadnienie filozofii uważano wówczas stosunek myśli i bytu materialnego¹⁷ oraz łączące się z tym pytanie o pierwot-

¹⁵ „Dieser Zusammenhang beider Realitäten hat seinen eigentlichen Grund in der Einheit des Alls, zu welchem wir selbst mitgehören”. G. Cantor, *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten*. Nr 5. *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*, art. cyt., 182. Być może należałoby tłumaczyć: „Jedności Wszystkiego”.

¹⁶ „Bei der durchaus realistischen, zugleich aber nicht weniger idealistischen Grundlage meiner Betrachtungen (...)”. Tamże, 181.

¹⁷ Tak samo można postrzegać naczelne zagadnienie filozofii I. Kanta.

ną naturę bytu. O ile tendencja realistyczna traktowała byt jako pierwotny i z niego wywodziła myśl, o tyle niemiecki idealizm uważał myśl za pierwotną¹⁸. Jeśli tak interpretować znaczenie terminów „realizm” i „idealizm” w analizowanej wypowiedzi Cantora, to trzeba wyprowadzić twierdzenie, że nie był on zwolennikiem ani ontycznego pierwszeństwa myśli (idealizm), ani ontycznego pierwszeństwa bytu materialnego (realizm). Zbliża to w jakiejś mierze stanowisko Cantora do Spinozjańskiej tezy o jednej substancji, przedstawiającej się w dwu porządkach.

1.1.3. Dualizm: sfery intra- i transsubiektywna

Ontologia Cantora zawiera – jak już wskazywano wcześniej – teżę stwierdzającą dualność rzeczywistości, ale na tym kończy się podobieństwo do systemu Spinozy. Opisywane przez niego dwie sfery realności (rzeczywistości) różnią się znacznie swoimi zakresami od dwu Spinozjańskich porządków rzeczywistości.

Dotyczy to przede wszystkim transsubiektywnej sfery istnienia, której nie można w żaden sposób utożsamiać z porządkiem materialnym różnych modi, w jakich ujawnia się substancja. Cantor zalicza do sfery transsubiektywnej obiekty, które występują w „naturze duchowej”¹⁹. Sfera transsubiektywna to dla niego „świat zewnętrzny” (*Außenwelt*) w stosunku do intelektu²⁰. Zatem ów „świat zewnętrzny” składa się nie tylko z materialnych (rozciąglących), ale i duchowych (nierozciąglących) przedmiotów.

Jak zasygnalizowano wyżej, punktem odniesienia dla zdefiniowanej przez Cantora rzeczywistości transsubiektywnej był intelekt. Wszystko, co nie należy do intelektu – tak wypada rozumieć jego podział – należy do „świata zewnętrznego” (*Außenwelt*). Zaś ów bliżej nie określony intelekt to druga, intrasubiektywna sfera istnienia. W nim właśnie liczby całkowite, zarówno skończone, jak i nie-

¹⁸ Wystarczy wskazać na jaźń Fichtego lub ideę Hegla.

¹⁹ „(...) die in der (...) geistigen Natur tatsächlich vorkommen”.

²⁰ „Dann kann aber auch den Zahlen insofern Wirklichkeit zugeschrieben werden, als sie für einen Ausdruck oder ein Abbild von Vorgängen und Beziehungen in der Intellekt gegenüberstehenden Außenwelt gehalten werden müssen, als ferner die verschiedenen Zahlenklassen (I), (II), (III) u.s.w. Repräsentanten von Mächtigkeiten sind, die in der körperlichen und geistigen Natur tatsächlich vorkommen. Diese zweite Art der Realität nenne ich die *transsubjektive* oder auch *transiente Realität* der ganzen Zahlen”. G. Cantor, *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten. Nr 5. Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*, art. cyt., 181.

skończone, a więc również – co w tej chwili bardziej istotne – pojęcia i ewentualnie idee (?) realizują swój pierwszy sposób egzystencji. Mogą one²¹ być traktowane o tyle jako rzeczywiste (*wirklich*), o ile na mocy definicji zajmują „w naszym rozumie” (*in unserm Verstande*) określone miejsce oraz gdy są dobrze odróżnialne od innych elementów (*Bestandteilen*) naszego myślenia, są z tymi częściami w określonych związkach (relacjach) i w ten sposób modyfikują substancję naszego ducha²².

Cantor zaznaczył, że tak scharakteryzowana rzeczywistość (*Realität*) intrasubiektywna czy immanentna pojęć lub idei winna być zgodna z określeniem *adaequata* w tym znaczeniu, w jakim użył go Spinoza, który twierdził: „przez ideę adekwatną (*adaequatam*) rozumie ideę, która, o ile rozważa się ją samą w sobie, bez odniesienia do przedmiotu, posiada wszystkie własności, czyli cechy (*denominaciones*) wewnętrzne idei prawdziwej”²³. Należy wyjaśnić, że według L. Kořakowskiego cecha wewnętrzną (*denominatio intrinseca*) w systemie Spinozy jest cecha absolutna, to jest taka, którą przedmiot posiada bez względu na relację do innych przedmiotów²⁴.

²¹ Liczby, a zatem i pojęcia, idee (?).

²² „Einmal dürfen wir die ganzen Zahlen insofern für wirklich ansehen, als sie auf Grund von Definitionen in unserm Verstande einen ganz bestimmten Platz einnehmen, von allen übrigen Bestandteilen unseres Denkens aufs beste unterschieden werden, zu ihnen in Bestimmten Beziehungen stehen und somit die Substanz unseres Geistes in bestimmter Weise modifizieren; es sei mir gestattet, diese Art der Realität unsrer Zahlen ihre *intrasubjektive* oder *immanente Realität* zu nennen”. G. Cantor, *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten. Nr 5. Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*, art. cyt., 181.

²³ „Was ich hier «intrasubjektive» oder «immanente» Realität von Begriffen oder Ideen nenne, dürfte mit der Bestimmung «adäquat» in derjenigen Bedeutung, wie dieses Wort von Spinoza gebraucht wird, übereinstimmen, indem er sagt: Eth. pars II def. IV, «Per ideam adaequatam intelligo ideam, quae, quatenus in se sine relatione ad obiectum consideratur, omnes verae ideae proprietates sive denominationes intrinsecas habet». Tamże, 206 (przypis Cantora do s. 181).

²⁴ Jej przeciwieństwem jest cecha zewnętrzna (*denominatio extrinseca*), czyli relatywna, którą przedmiot posiada ze względu na swój stosunek do innych przedmiotów. Tak scharakteryzowana Spinozjańska idea adekwatna, do której odwoływał się Cantor, opisując sferę intrasubiektywnego istnienia pojęć [idei (?)], miała prawdopodobnie pewien wpływ na konstrukcję jego epistemologii. Idea adekwatna posiadała wszystkie cechy wewnętrzne idei prawdziwej. Można postawić hipotezę, że istnieje metoda rozstrzygnięcia, bez odwołania się do przedmiotu, do którego się idea odnosiła, czy jest ona adekwatną, czy też nie. Wówczas można by było, bez odnoszenia się do rzeczywistości transsubiektywnej (to w wypadku Cantora, zaś w wypadku Spinozy – do porządku materialnego), formułować sądy prawdziwe, dotyczące tej rzeczywistości. Ponieważ dla Cantora, jak się okaże, kryte-

Nie analizując w tym miejscu teoriopoznawczej zawartości charakterystyki sfery intrasubiektywnej, wypada stwierdzić, że Cantor, przejmując dualną koncepcję rzeczywistości (istnienia), oparł ją na zupełnie innym schemacie, który nie pokrywa się ze Spinozjańskim. Miejsce schematu: myśl – materia zajęła opozycja: intelekt – „świat zewnętrzny” (w stosunku do intelektu).

1.1.4. Paralelizm sfer intra- i transsubiektywnej

Cantor zaadaptował dla potrzeb własnej ontologii tezę o paralelizmie obydwu porządków, odwołując się wprost do twierdzenia Spinozy: „porządek i związek idei jest taki sam, jak porządek i związek rzeczy”. Zatem można stwierdzić, że pomiędzy dwoma rodzajami rzeczywistości – intrasubiektywną oraz transsubiektywną – istnieje izomorfizm²⁵. Relacja ta jest funkcją, która w sposób wzajemnie jednoznaczny elementom jednej dziedziny (intrasubiektywnej) przyporządkowuje elementy drugiej (transsubiektywnej). Elementami sfery transsubiektywnej są wszystkie przedmioty należące do „świata zewnętrznego” w stosunku do intelektu.

Problemem jest to, czy również zbiory²⁶ tych elementów mogą być traktowane jako elementy, dla których istnieje odpowiednik w sferze intrasubiektywnej. Odpowiedzi na to pytanie można będzie udzielić dopiero po dokładniejszym przeanalizowaniu tego, co według ujęcia Cantora zaliczało się do elementów konstytuujących rzeczywistość intrasubiektywną.

Jak wskazano wyżej, elementami składowymi intrasubiektywnej sfery rzeczywistości są pojęcia (*Begriffen*) i idee (*Ideen*)²⁷. Nie wyja-

rium tego, czy idea jest adekwatna, była syntaktyczna niesprzeczność pojęć, zatem niesprzeczność gwarantowała prawdziwość semantyczną (przy klasycznym rozumieniu tej drugiej, co ma miejsce zarówno w systemie Spinozy, jak i w filozofii Cantora).

²⁵ Skoro stwierdzono wyżej, że w ujęciu Spinozjańskim wyrażenie: „porządek i związek... jest taki sam, jak porządek i związek (...)”, oznacza izomorfizm dwu dziedzin, to tym bardziej należy takiego sensu domniemywać u Cantora, który zaczynał dobrze rozumieć, czym jest izomorfizm. Posługiwał się on nawet tymi własnościami izomorfizmu, które współcześnie sformułowane są jako twierdzenia metamatematyki.

²⁶ Zbiór jest tutaj rozumiany w sensie dystrybutywnym, chociażby dlatego, że taką, a nie mereologiczną koncepcją zbioru posługiwał się Cantor, tworząc teorię mnogości.

²⁷ „Wir können in zwei Bedeutungen von der Wirklichkeit oder Existenz der ganzen Zahlen, der endlichen sowie der unendlichen sprechen; genau genommen sind es aber dieselben zwei Beziehungen, in welchen allgemein die Realität von irgend welchen Begriffen und Ideen in Betracht gezogen werden kann”. G. Cantor, *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten*. Nr 5. *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*, art. cyt., 181.

śniono dotychczas, czy dla Cantora terminy „pojęcie” i „idea” znaczą to samo, czy zbiór idei jest podzbiorem pojęć (ewentualnie odwrotnie), czy może to jakieś dwa odrębne, lecz izomorficzne ze sobą porządki rzeczywistości. Rozwiązanie tego problemu wymaga przede wszystkim dokładniejszej analizy tych fragmentów tekstu Cantora, gdzie występuje termin „pojęcie”.

Stwierdził on, iż pojęcie, istniejące w sferze intrasubiektywnej, posiada pod pewnymi (nawet nieskończenie wieloma) względami również rzeczywistość transsubiektywną²⁸. Co oznacza, że pojęcie może pod wieloma względami posiadać rzeczywistość transsubiektywną?

W analizowanym tekście mowa jest o tym, że klasy liczbowe (I), (II), (III) są reprezentantami mocy występujących w „naturze” zarówno „cielesnej”, jak i „duchowej”. Owe klasy liczbowe to „wzorce” późniejszych, kolejnych pozaskończonych liczb kardynalnych: \aleph_0 , \aleph_1 ²⁹, \aleph_2 . Liczba \aleph_0 , mająca jako pojęcie istnienie intrasubiektywne, posiada również, i to „pod wieloma względami”, rzeczywistość transsubiektywną, na przykład we wszystkich materialnych obiektach składających się ze zbioru monad-atomów o takiej właśnie mocy³⁰.

Podobnie można powiedzieć, że „czerwoność” istnieje jako pojęcie w naszym umyśle (rzeczywistość intrasubiektywna), a równocześnie posiada „pod wieloma względami” rzeczywistość transsubiektywną, mianowicie w każdym przedmiocie „świata zewnętrznego”, który jest czerwony. Stawiany przez Cantora wymóg izomorfizmu obydwu dziedzin rzeczywistości: intra- i transsubiektywnej sprawia, że pojęcie istniejące w sferze immanentnej musi być w relacji³¹ z jednym i tylko jednym elementem drugiej dziedziny.

Z powyższych rozważań wynika, że owym przyporządkowanym elementem może i musi być cała klasa tych i tylko tych przedmio-

²⁸ „Bei der durchaus realistischen, zugleich aber nicht weniger idealistischen Grundlage meiner Betrachtungen unterliegt es für mich keinem Zweifel, daß diese beiden Arten der Realität stets sich zusammenfinden in dem Sinne, daß ein in der ersten Hinsicht als existent zu bezeichnender Begriff immer in gewissen, sogar unendlich vielen Beziehungen auch eine transiente Realität besitzt, (...)”. Tamże.

²⁹ Czyli *continuum*, przy założeniu, że Cantorowska hipoteza *continuum* byłaby prawdziwa.

³⁰ Jest to znane twierdzenie Cantora z zakresu filozofii przyrody.

³¹ Relacja ta jest funkcją wzajemnie jednoznaczną.

tów, istniejących w „świecie zewnętrznym”, które podpadają pod to pojęcie. W innym wypadku pojęcie mogłoby być związane relacją na przykład z dwoma przedmiotami. Wówczas relacja taka nie byłaby funkcją, a tym bardziej funkcją wzajemnie jednoznaczną. Innymi słowy: pojęcie ma istnienie transsubiektywne jako klasa tych i tylko tych przedmiotów „świata zewnętrznego”, które pod nie podpadają.

Przybliżywszy znaczenie terminu „pojęcie” w języku filozofii Cantora, należy bliżej sprecyzować, jak rozumiał on w analizowanej pracy termin „idea”.

W cytowanych wcześniej tekstach niemieckiego matematyka zarówno słowo „idea”, jak i „pojęcie” użyte są jako terminy znaczące to samo co „idea” w tekstach Spinozy. Wynikałoby stąd, że dla Cantora „idea” i „pojęcie” znacząły dokładnie to samo co u Spinozy „idea jednostkowa”. Takie rozumienie „pojęcia” stoi jednak w sprzeczności ze zrekonstruowanym wyżej Cantorowskim rozumieniem słowa „pojęcie”, którego zakres może zawierać więcej niż jeden element.

Trzeba zwrócić uwagę, że w systemie Spinozy, obok idei jednostkowych, były również przyjęte idee powszechne, czyli pojęcia powszechne, w których ujmowane było to, co wspólne we wszystkich ciałach na drodze abstrakcji³². Zatem, przez analogię do Spinozy, należałoby stwierdzić, iż termin „idea” w analizowanym tekście Cantora nie oznacza nic innego, jak Spinozjańską ideę jednostkową, której w „świecie zewnętrznym” (*Außenwelt*) odpowiada jeden i tylko jeden przedmiot. Zaś pojęciu można zawsze przyporządkować w sferze transsubiektywnej przynajmniej dwuelementową klasę przedmiotów, które pod to pojęcie podpadają. Termin „pojęcie” według Cantora znaczyłby tyle, co „pojęcie ogólne” (*Allgemeinbegriff*) Schemat ontologiczny Cantora można by jeszcze uprościć przy założeniu, że odpowiednikiem idei jednostkowych w sferze transsubiektywnej są nie pojedyncze przedmioty należące do „świata zewnętrznego”, lecz jednoelementowe klasy zawierające owe przedmioty. Wówczas idee (jednostkowe) stanowiłyby w zbiorze wszystkich pojęć pewien podzbiór właściwy tych i tylko tych pojęć, których zakres byłby dokładnie jednoelementowy.

³² Por. B. de Spinoza, *Etyka w porządku geometrycznym dowiedziona*, dz. cyt., część II, Tw. XXXVIII (Dodatek) oraz przypis do Tw. XL.

Sumując dotychczasowe rozważania, można powiedzieć, że w ontologii Cantora pojęcia posiadają podwójne istnienie: są o tyle rzeczywiste (*wirklich*), o ile na mocy definicji zajmują w naszym umyśle „określone miejsce” oraz istnieją w znaczeniu transsubiektywnym, o ile w „świecie zewnętrznym” w stosunku do intelektu istnieją przedmioty, które pod te pojęcia podpadają. Sfera pojęć „w naszym umyśle” (*in unserm Verstande*) i ich zakresów w „świecie zewnętrznym” są dziedzinami izomorficznymi.

1.1.5. Inteligibility porządku poznawczego?

Spinozjański porządek idealny posiadał – jak stwierdzono wcześniej – charakter obiektywnego, to znaczy niezależnego od jakiegokolwiek podmiotu aktualnie poznającego, porządku poznawczego. Pojawia się pytanie: czy teza o tak rozumianej inteligibility jest prawdziwa w odniesieniu do Cantorowskiej intrasubiektywnej sfery rzeczywistości?

Z całą pewnością sfera ta miała charakter porządku poznawczego – nie tylko dlatego, że Cantor powoływał się na Spinozjański paralelizm – ale i „umiejscawiana” była przez niemieckiego matematyka w rozumie (*in (dem)... Verstande*) lub wręcz identyfikowana z intelektem (*Intellekt*). Czy intrasubiektywna sfera rzeczywistości mogła jednak posiadać walor obiektywnego porządku poznawczego (abstrahując od samej nazwy!), skoro w jej charakterystyce utożsamiono ją w pewnym sensie z „naszym rozumem”, „naszym duchem” (*unser Geist*) lub z „naszym myśleniem” (*unser Denken*)?

Jedynym sposobem obrony obiektywnego charakteru rzeczywistości intrasubiektywnej, traktowanej jako porządek poznawczy, wydaje się założenie, że sformułowania „nasz duch”, „nasz rozum” nie odnoszą się do pojedynczego podmiotu poznającego (np. Cantora), ale do jakiejś kolektywnej świadomości³³. „Zawartość” takiej kolektywnej świadomości jest jednak zawsze pewną funkcją czasu, z czego akurat Cantor musiał sobie doskonale zdawać sprawę. Przecież przed rokiem 1870 ani w świadomości żadnego pojedynczego matematyka, ani tym bardziej w kolektywnej świadomości uczonych nie było miejsca dla pojęcia pozaskończzonej liczby kardynalnej \aleph_0 lub dla liczby porządkowej $\omega + 1$. Ponieważ jednak twórca

³³ Można przypuszczać, że Cantorowi chodziło o kolektywną świadomość matematyków (uczonych) drugiej połowy XIX wieku.

teorii mnogości mocno upierał się przy tym, aby intrasubiektywna sfera rzeczywistości (kolektywny intelekt) była izomorficzna ze „światem” w stosunku do niej „zewnętrznym” (*Außenwelt*), dlatego należałoby konsekwentnie twierdzić, że na przykład w rzeczywistości transsubiektywnej ciała składające się z monad-atomów materialnych o liczbie \aleph_0 pojawiły się również dopiero gdzieś po roku 1870. Czyli „świat zewnętrzny” zmieniałby się paralelnie do „zawartości” zbiorowego intelektu uczonych.

Z przeprowadzonego rozumowania można by wyprowadzić i dalsze konsekwencje, które posiadają już charakter *reductio ad absurdum*. Jakakolwiek zmiana w „świecie zewnętrznym” mogłaby się dokonywać ze względu na wymóg izomorfizmu jedynie wtedy, gdy przynajmniej jeden z uczonych byłby w trakcie takiej czy innej czynności poznawczej. W momencie zmiany w sferze transsubiektywnej, w tej samej chwili t , zdołałby ją uchwycić, dokonując tym samym paralelnej zmiany w intrasubiektywnej sferze istnienia. Wymóg izomorfizmu preferowałby rodzaj pierwszeństwa ontycznego intrasubiektywnego porządku poznawczego, gdyż bez uprzedniego uaktywnienia przynajmniej jednego indywidualnego podmiotu poznającego w „świecie zewnętrznym” nie mogłaby się dokonać jakakolwiek zmiana.

Zatem założenie, że intrasubiektywna sfera rzeczywistości jest tożsama ze zbiorowym intelektem, redukowałoby zrekonstruowaną ontologię Cantora³⁴ do jakiejś odmiany idealizmu subiektywnego typu berkeleyowskiego. Suponowana Cantorowska kolektywna świadomość odpowiadałaby, w swych ogólnych zarysach, kreującej rzeczywistość „świata zewnętrznego” (*Außenwelt*) jaźni Fichtego.

Wniosek dotyczący przejścia i reinterpretacji schematu ontologicznego Spinozy przez niemieckiego matematyka należy wyrazić następująco: prowadzą one do paradoksalnych konsekwencji i nakazywałyby klasyfikować ontologię Cantora jako idealizm subiektywny. Takie zaszeregowanie ontycznych założeń jego epistemologii z całą pewnością nie odpowiadałoby składanym przez niego deklaracjom. Na planie opozycji: idealizm (typu niemieckiego) – realizm Cantor widział bowiem dla siebie miejsce pośrednie.

Ostatecznie zaś sklasyfikowanie Cantorowskiej ontologii jako rodzaju idealizmu subiektywnego miałoby swe przyczyny w ko-

³⁴ Nawet bez dalszego wglębiania się w problem, co według Cantora jest ontycznie pierwotne: sfera intrasubiektywna czy też „świat zewnętrzny”.

niunkcji dwu tez: określenia, czym są dwa porządki rzeczywistości oraz wymogu ich izomorfizmu³⁵. Innymi słowy: to niechciane pójście Cantora w stronę idealizmu typu berkeleyowskiego lub fichteańskiego dokonałoby się przez utożsamienie, w rzeczywistości intrasubiektywnej, jednego z porządków istnienia z porządkiem poznawczym.

1.2. WĄTEK PLATOŃSKI

Druga składowa ontologii Cantora miała – jak wcześniej zauważono – rodowód platoński. Dlatego celem dalszych badań będzie zrekonstruowanie wątku platońskiego tej ontologii i próba w miarę spójnego dopasowania go do składowej spinozjańsko-fichteańskiej.

1.2.1. Ogólna akceptacja ontologii Platona

Celowe będzie zwrócenie uwagi na pewną analogię sytuacji problemowych, które zobligowały Cantora do naszkicowania ontologicznego tła jego epistemologii, a Platona do stworzenia jego oryginalnej teorii idei. Cantor, w trakcie swych prac matematycznych, doszedł do pojęcia liczb pozaskończonych. W ramach epistemologii matematyki, którą tworzył w konkretnym celu uzasadnienia i obrony swych poczynań na płaszczyźnie matematyki, natknął się na zagadnienie pewności wiedzy matematycznej. Skąd wiadomo, że wiedza pojęciowa, jaką dla Cantora była matematyka, jest wiedzą pewną w tym znaczeniu, że pojęciom, którymi operuje, coś odpowiada w rzeczywistości (i w jak rozumianej rzeczywistości)?

Sytuacja problemowa, która powstała dla podejmującego wątki filozofii sokratejskiej Platona, była identyczna: wiedza, jaką można osiąść o rzeczywistości, jest wiedzą pojęciową, ale co gwarantuje jej pewność? Podobnie jak w wypadku matematyka niemieckiego, odpowiedź domagała się zbudowania ontologii.

Skonstruowana przez Platona ontologia była dualna, ale w swych istotnych zarysach różna od Cantorowskiej, w jej dotychczas zrekonstruowanej, spinozjańsko-fichteańskiej postaci. Pojęciom odpowiadał zarówno byt zmienny, niszczałny i poznawany przez zmysły, jak i byt idealny: niezmienny, wieczny, poznawany przez pojęcia.

³⁵ Zestawienie przez Cantora obydwu tez miało ostatecznie za cel zagwarantowanie pewności poznania naukowego.

Cantor natomiast – co powodowałoby skierowanie jego ontologii postspinozjańskiej w stronę idealizmu subiektywnego – ów drugi rodzaj bytu utożsamiał z pojęciami, z porządkiem poznawczym. To zaś absolutnie nie zagwarantowało pojęciom niezmienności ani wieczności.

Cantor był świadom naszkicowanej analogii i epistemologicznych uwarunkowań sytuacji problemowej, w której znalazł się zarówno on, jak i filozof grecki. Co więcej, widział on analogie obu rozwiązań ontologicznych, mających gwarantować pewność wiedzy pojęciowej. Akceptował Platońską tezę, wyrażającą ostrożny realizm w tym znaczeniu, że skoro pojęcia zawierać mają wiedzę, to muszą posiadać jakiś istniejący przedmiot rzeczywisty³⁶. Akceptacja ostrożnego realizmu znajduje też swe uzasadnienie w dotychczas zrekonstruowanej warstwie ontologii niemieckiego matematyka, zawierającej wzajemnie jednoznaczną relację: pojęcie – klasa przedmiotów ze „świata zewnętrznego” (*Außenwelt*), które pod nie podpadają.

Trzeba postawić pytanie, czy Cantor swą akceptację platonizmu ograniczał jedynie do tak rozumianej, bardzo ostrożnej i ogólnikowej wersji realizmu, czy też wzmocnił go, wprowadzając do swojej ontologii jakiś rodzaj sfery bytu abstrakcyjnego na kształt idei platońskich. Dalsze analizy będą zmierzały w kierunku rozstrzygnięcia tego problemu.

Doniosłe dla dalszych rozważań jest stwierdzenie Cantora, że wyrażone przez niego w analizowanym tekście przekonania dotyczące ontologii i epistemologii były zgodne z podstawowymi twierdzeniami systemu Platona, przedstawionymi w opracowaniu E. Zellera *Die*

³⁶ Cantor powołał się na opracowanie filozofii Platona zawarte w dziele E. Zellera. Por. E. Zeller, *Die Philosophie der Griechen*, Leipzig 1875³, Th. 2. Abt. 1., 541: „Es heißt hier gleich im Anfange des Abschnittes: *Nur das begriffliche Wissen soll (nach Plato) eine wahre Erkenntnis gewahren. So viel aber unsern Vorstellungen Wahrheit zukommt – diese Voraussetzung teilt Plato mit andern (Parmenides) – ebensoviel muß ihrem Gegenstand Wirklichkeit zukommen, und umgekehrt. Was sich erkennen läßt, ist, was sich nicht erkennen läßt, ist nicht, und in demselben Maße, in dem etwas ist, ist es auch erkennbar*”. G. Cantor, *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten. Nr 5. Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*, art. cyt., 206-207 (przypis do s. 181). Według dziewiętnastowiecznych znawców przedmiotu, E. Zeller, do którego Cantor często się odwoływał, czerpiąc wiadomości na temat filozofii Platona, był jednym z najbardziej kompetentnych znawców filozofii greckiej. W kwestiach szczegółowych, dotyczących właśnie Platona, zarzucano mu jednak mieszanie płaszczyzny logicznej, etycznej i metafizycznej. Por. W. Lutosławski, *O logice Platona*, cz. II, Warszawa 1892, 11.

*Philosophie der Griechen*³⁷. W tej części podręcznika E. Zellera, która została wskazana przez Cantora jako punkt odniesienia, zawarte są między innymi klasyczne twierdzenia mówiące, że idee są bytami niematerialnymi³⁸, pozaprzestrzennymi, pozaczasowymi, istniejącymi poza i niezależnie od poznającego podmiotu. Konstytuują one pewną dziedzinę rzeczywistości, która jest izomorficzna ze sferą pojęć³⁹.

Gdyby założyć, że Cantor zaliczał wszystkie wymienione tezy – tradycyjnie traktowane jako klasyczne, bo należące do istoty filozofii Platona – do zbioru podstawowych twierdzeń systemu Platońskiego, należałoby pytać: gdzie na dotychczas odtworzonym planie ontologicznym umiejscowić hipotetyczną sferę idei platońskich?

Teza Platona o istnieniu idei poza podmiotem poznającym nie pozwala ich lokalizować w Cantorowskiej sferze intrasubiektywnej. Z twierdzenia Cantora o dualizmie rzeczywistości wynika zatem, że istniałyby one w sferze transsubiektywnej.

Należy przypomnieć, że według twórcy teorii mnogości rzeczywistość transsubiektywna była konstytuowana zarówno przez „naturę cielesną” (*körperliche Natur*), jak i „naturę duchową” (*geistige Natur*). „Miejscem naturalnym” nierozciąglonych, pozaprzestrzennych idei Platona na dotychczasowym planie ontologicznym Cantora byłaby zatem sfera „natury duchowej” rzeczywistości transsubiektywnej. Zgodnie zaś z klasycznym twierdzeniem Platona, dziedzina idei byłaby izomorficzna z dziedziną pojęć.

Jeszcze raz trzeba zwrócić uwagę, że na tym etapie rekonstrukcji założeń ontologicznych twórcy teorii mnogości posłużono się dwoma mocnymi założeniami:

1. Cantor zaliczał przedłożone wyżej klasyczne twierdzenia Platona do zbioru twierdzeń podstawowych systemu Platońskiego, czyli uważał je za obowiązujące we własnej ontologii. Założenie takie jest właśnie na tyle zasadne, na ile w tradycji filozoficznej zwykło się wymienione tezy Platona klasyfikować jako należące do istoty jego systemu;

³⁷ „Diese Überzeugung stimmt im wesentlichen (...) mit den Grundsätzen des Platonischen Systems, (...); in erster Beziehung verweise ich auf Zeller, Philos. d. Griechen, 3. Aufl. 2. Teil I. Abt. S. 541-602”. G. Cantor, *Über unendliche lineare Punktmanigfaltigkeiten*. Nr 5. *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*, art. cyt., 206 (przypis do s. 181).

³⁸ Są one nierozciąglone w sensie Spinozjańskim.

³⁹ E. Zeller już na początku paragrafu *Die Begründung der Ideenlehre* tak właśnie charakteryzował związek ontologii i epistemologii Platona. Por. E. Zeller, dz. cyt., 541n.

2. Należy tak prowadzić rekonstrukcję, aby dopasować akceptowane przez Cantora twierdzenia Platona do składowej spinozjańsko-fichteańskiej (wymóg spójności). Dlatego na przykład zachowano układ dualny rzeczywistości. Nie wprowadzono – przynajmniej formalnie – trzeciej sfery istnienia „poza” rzeczywistością transsubiektywną: sfery bytu idealnego.

Wypada też od razu zastrzec, że taka próba odtworzenia ontologii Cantora, z „ogólnikowym” uwzględnieniem składowej platońskiej, pozostawia wiele niejasności, a jednocześnie dziedziczy trudności znamienne dla systemów platońskich.

Nie ma na tym etapie badań żadnych kryteriów, które pozwalałyby rozstrzygnąć, czy dziedzina idei była według Cantora tożsama z całą sferą przedmiotów „natury duchowej”, czy też widziałby w tej sferze również takie przedmioty nierozciągłe, które nie były ideami. Nie wiadomo też, czy idea mogłaby należeć do zakresu pojęcia. Gdyby tak było, wówczas ontologia Cantora przejmowałaby „paradoks trzeciego człowieka”⁴⁰.

1.2.2. Problem uniwersaliów

Zasadność pierwszego założenia, które poczyniono w celu odtworzenia wątku platońskiego założeń ontologicznych Cantora, należy potwierdzić innymi jego tekstami, bowiem źródło analizowane dotychczas zawiera jedynie ogólnikowe odwołanie do systemu Platona. Są to przede wszystkim te teksty, w których Cantor starał się scharakteryzować niektóre własności zbioru. Zostaną one poddane analizie pod kątem tego, jakie stanowisko zajmował niemiecki matematyk w klasycznym sporze o uniwersalia. Gdyby udało się ustalić, że stanowiskiem tym był skrajny realizm, byłoby to równoznaczne z rzeczywistą akceptacją wyliczonych wyżej klasycznych tez Platona.

Podjęcie takiego zagadnienia wymaga wcześniejszego uporządkowania nielicznych Cantorowskich intuicji, dotyczących koncepcji języka⁴¹. Problem uniwersaliów jest bowiem ściśle związany z kon-

⁴⁰ Jaka idea odpowiadałaby idei człowieka i Sokratesowi?

⁴¹ Są autorzy, którzy zdają się sugerować, że w tekstach Cantora nie było żadnych elementów filozofii języka albo starają się je bagatelizować: „Bei ihm (Cantor – J.D.) spielt die Beziehung von der Sprache zum Außensprachlichen kaum eine Rolle (...) Bei Cantor, dem sprachlich-logische Erwägungen fern lagen (...)”. R. Carls, *Idee und Menge. Der Aufbau einer kategorialen Ontologie*, München 1974, 58; 61.

cepcją języka, gdy formuluje się go jako pytanie o to, co odpowiada w sferze ontycznej nazwom ogólnym. Wyjście od sfery językowej wydaje się w przypadku Cantora uzasadnione, chociażby ze względu na utożsamienie przez niego płaszczyzny poznawczej, pojęciowej, z płaszczyzną ontyczną w intrasubiektywnej sferze istnienia. Gdyby bowiem problem uniwersaliów wyrazić w formie pytania: jaki byłby odpowiadał według niego pojęciom ogólnym, można by udzielać tautologicznej odpowiedzi: właśnie pojęcia ogólne.

1.2.2.1. Język a rzeczywistość pozajęzykowa

Pewne elementy filozofii języka ujawnił Cantor w ramach omawiania epistemologii matematyki. Ponieważ matematyka to wiedza pojęciowa, trzeba było określić metodę właściwego tworzenia pojęć. Z jego wypowiedzi wynika, że elementom konstytuującym sferę intrasubiektywną – pojęciom i ideom adekwatnym w sensie Spinozjańskim – odpowiadają w sferze języka predykaty⁴². Predykaty są związane z pojęciami (ideami adekwatnymi) pewną relacją, mianowicie te drugie ujawniają sens (*Bedeutung*) predykatu⁴³.

⁴² „Der Vorgang bei der korrekten Bildung von Begriffen ist m. E. überall derselbe; man setzt ein eigenschaftloses Ding, das zuerst nichts anderes ist als ein Name oder ein Zeichen A, und gibt demselben ordnungsmäßig verschiedene, selbst unendlich viele verständliche Prädikate, deren Bedeutung an bereits vorhandenen Ideen bekannt ist, und die einander nicht widersprechen dürfen; dadurch werden die Beziehungen von A zu den bereits vorhandenen Begriffen und namentlich zu den verwandten bestimmt; (...)”. G. Cantor, *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten. Nr. 5. Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*, art. cyt., 207 (przypis do s. 182, 187).

⁴³ Cantor nigdy nie wprowadził w swoich tekstach Fregowskiego rozróżnienia opartego na kategoriach „Sinn” i „Bedeutung”. Dlatego trudno narzucać te kategorie jako obowiązujące w Cantorowskiej koncepcji języka, tym bardziej, że analizowany tekst twórcy teorii mnogości powstał kilka lat wcześniej, przed wprowadzeniem podziału. Por. G. Frege, *Über Sinn und Bedeutung*, *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik* 56(1892), 25-50. W literaturze polskiej różne tłumaczy się nazwy Fregowskich kategorii, na przykład jako „znaczenie” (*Sinn*), „denotacja” (*Bedeutung*). Por. J. Kopania, *Problematyka znaczenia*, w: *Logika formalna. Zarys encyklopedyczny z zastosowaniem do informatyki i lingwistyki*, red. W. Marciszewski, Warszawa 1987, 271-280. A także: „sens” (*Sinn*) i „nominat” (*Bedeutung*). Por. G. Frege, *Sens i nominat*, tłum. z niem. J. Pelc, w: *Logika i język. Studia z semiotyki logicznej*, red. J. Pelc, Warszawa 1967. Czy też: „sens” (*Sinn*) i „znaczenie” (*Bedeutung*). Por. G. Frege, *Sens i znaczenie*, tłum. z niem. J. Wolniewicz, w: G. Frege, *Pisma semantyczne*, Warszawa 1977. Ponieważ słowa *Bedeutung* użył Cantor, charakteryzując relację pomiędzy predykatami a pojęciami rozumianymi jako pewna treść myślowa, dlatego należy sądzić, że w tym miejscu pełniło ono funkcję Fregowskiego *Sinn* [*Bedeutung* predykatu (nazwy ogólnej) według G. Fregego to zbiór denotatów].

Na innym miejscu Cantor przeciwstawił pojęcia relacyjne (*Beziehungsbegriff*) ideom adekwatnym⁴⁴. Tym pierwszym nie może być przypisane istnienie w sferze intrasubiektywnej. Odpowiednikami pojęć relacyjnych w sferze języka są, jak należy sądzić, funktory zdaniotwórcze o postaci:

$z / (n_p, \dots, n_k)$, gdzie $k \geq 2$,

czyli, o co najmniej dwu zmiennych nazwowych. Natomiast pojęciom nierelacyjnym (ideom adekwatnym) należałoby, jak można wnioskować, przypisać jako odpowiedniki w języku funktory zdaniotwórcze o jednej zmiennej nazwowej⁴⁵.

Należy zapytać: jakie własności miała dla Cantora relacja wiążąca klasę predykatów jednoargumentowych ze sferą intrasubiektywną? Dwie charakterystyki zbioru pozwalają ujawnić te własności.

Według Cantora, kiedy podana jest definicja jakiegoś zbioru, wówczas na mocy zasady wyłączonego środka można rozstrzygnąć, jaki przedmiot należący do uniwersum należy do tego zbioru, a jaki nie⁴⁶. Ta charakterystyka zbioru zakłada procedurę wyróżniania z rodzaju (uniwersum) pewnego gatunku (zbioru). Zatem wypada przypuszczać, że każda taka definicja poszczególnego zbioru była według Cantora definicją klasyczną, gdzie definiens miał postać $\{x: P(x)\}$, czyli predykatu jednoargumentowego.

W drugim opisie zbioru mowa jest o „prawie” (*Gesetz*), które „łączy elementy zbioru w całość” (*durch ein Gesetz zu einem Gan-*

⁴⁴ „Dem Unbestimmten, Veränderlichen, Uneigentlich-unendlichen, in welcher Form sie auch erscheinen, kann ich kein Sein zuschreiben, denn sie sind nichts als entweder Beziehungsbegriffe oder rein subjektive Vorstellungen resp. Anschauungen (imaginationes), in keinem Falle adäquate Ideen”. G. Cantor, *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten*. Nr 5. *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*, art. cyt., 205 (przypis do s. 176).

⁴⁵ Potwierdza to również charakterystyka Spinozjańskich idei adekwatnych dokonana przez L. Kolakowskiego.

⁴⁶ „Eine Mannigfaltigkeit (ein Inbegriff, eine Menge) von Elementen, die irgendwelcher Begriffssphäre angehören, nenne ich *wohldefiniert*, wenn auf Grund ihrer Definition und infolge des logischen Prinzips vom ausgeschlossenen Dritten es als intern bestimmt angesehen werden muß, *sowohl* ob irgendein derselben Begriffssphäre angehöriges Objekt zu der gedachten Mannigfaltigkeit als Element gehört oder nicht, *wie auch*, ob zwei zur Menge gehörige Objekte, trotz formaler Unterschiede in der Art des Gegebenseins einander gleich sind oder nicht”. G. Cantor, *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten*. Nr 3, 1882, w: G. Cantor, *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, dz. cyt., 150.

zen verbunden werden kann)⁴⁷. Należy sądzić, że prawo, na które powoływał się Cantor, w formie zwerbalizowanej może posiadać postać jednoargumentowego predykatu $P(x)$, występującego w definiensie konkretnego zbioru.

Z przedstawionych opisów wynika, że każdemu $P(x)$ można przyporządkować w sferze transsubiektywnej dokładnie jedną klasę elementów⁴⁸ – klasę jego denotatów, czyli tych przedmiotów, któ-

⁴⁷ „Unter einer ‘Mannigfaltigkeit’ oder ‘Menge’ verstehe ich nämlich allgetnein jedes Viele, welches sich als Eines denken läßt, d. h. jeden Inbegriff bestimmter Elemente, welcher durch ein Gesetz zu einem Ganzen verbunden werden kann, (...)”. G. Cantor, *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten. Nr 5. Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*, art. cyt., 204 (przypis do s. 165).

⁴⁸ Całe to rozumowanie można też ująć następująco: z przedstawionych przez Cantora opisów zbioru wynika, że oparł on przedaksjomatyczną teorię zbiorów na (postulowanym w opisach zbiorów) nieograniczonym aksjomacie komprehensji (*comprehension axiom* lub *naive comprehension principle*. Por. J.A. Faris, *Plato’s theory of forms and Cantor’s theory of sets*, Belfast 1968, 12-13), a w zasadzie na jego słabszym sformułowaniu, mającym postać jednostronnej implikacji:

$$\sum_x \Pi_x (F(x) \rightarrow x \in y),$$

zapewniającym dla każdego predykatu jednoargumentowego $F(x)$ istnienie zbioru y . Aksjomat ekstensjonalności zapewnia jedyność takiego zbioru. Cantor *implicite* przyjmował aksjomat ekstensjonalności. Potwierdza to H. Wang: „Like most mathematicians, Cantor uses implicitly the axiom of extensionality, for example, in establishing $P = Q$ for two two point sets P and Q (but compare the introduction of (on p. 145)”. Por. H. Wang, *From Mathematics to Philosophy*, London 1974, 211. Zdaniem E. Betha, przyjmowane *implicite* pewniki komprehensji i oraz ekstensjonalności stanowiły podstawę przedaksjomatycznej teorii mnogości Cantora. Por. E. Beth, *Foundations of Mathematics*, Amsterdam 1959, 366; 369; 382. Stosowanie nieograniczonego aksjomatu komprehensji prowadziło do antynomii w przedaksjomatycznej teorii mnogości (wystarczyło zbudowanie formy zdaniowej $x(x)$). Dlatego pewnik ten został w aksjomatyce Zermelowskiej zastąpiony aksjomatem wyróżniania. Operowanie, nawet *implicite*, aksjomatem komprehensji gwarantowało istnienie w teorii mnogości Cantora zbioru pustego, podobnie jak aksjomat wyróżniania gwarantuje to w teorii Zermelowskiej. Są i inne argumenty potwierdzające tę tezę. Cantor definiował liczby jako zbiory zbiorów. To upoważniło go potem do stwierdzenia, że całą matematykę (co istotne: arytmetykę liczb naturalnych) można „zredukować” czy „nabudować” na teorii mnogości. Liczbę „0” można definiować przy takim ujęciu jedynie przy pomocy zbioru pustego. Zatem postulowanie istnienia zbioru pustego i z tego powodu jest konieczne w przedaksjomatycznej teorii mnogości. Wartość tego argumentu osłabia uwaga I. Grattan-Guinnessa, który podkreślił, że Cantor, określając liczby porządkowe przy pomocy tzw. zasad generowania, rozpoczyna od liczby „1” a nie od „0”. Z drugiej strony, ten sam autor zauważył, iż Cantor posługuje się jednak liczbą „0” w swej teorii liczb rzeczywistych. Teoria ta bez liczby „0” byłaby niekompletna. Por. I. Grattan-Guinness, *Georg Cantor’s influence on Bertrand Russell*, *History and Philosophy of Logic* 1 (1980), 71. Poza tym Cantor wprowadził pojęcie zbioru potęgowego. Por. G. Cantor, *Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre*, 1890, w: G. Cantor, *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, 278-281. Zatem przynaj-

rych nazwy wstawione w miejsce zmiennej nazwowej tworzyłyby zdanie prawdziwe. Izomorfizm tejże sfery ze sferą intrasubiektywną implikuje, że każdemu $P(x)$ przyporządkowane jest dokładnie jedno pojęcie istniejące w sferze intrasubiektywnej.

Cantorowski opis „właściwego tworzenia pojęć” zawiera ukryte założenie, że dla każdego pojęcia ze sfery intrasubiektywnej można zbudować w języku jakiś predykat jednoargumentowy. Zatem relacja wiążąca zbiór (potencjalny) funkcji zdaniowych o jednym argumencie nazwowym ze sferą intrasubiektywnego istnienia pojęć jest funkcją typu na⁴⁹. Przyjmując, że każdej funkcji zdaniowej tego typu można wzajemnie jednoznacznie przyporządkować nazwę ogólną⁵⁰, należy stwierdzić, że scharakteryzowana wyżej relacja wiąże również zbiór nazw ogólnych z pojęciami w Cantorowskiej sferze intrasubiektywnej⁵¹.

1.2.2.2. Skrajny realizm pojęciowy

Po przedstawieniu i częściowej rekonstrukcji koncepcji języka i związków języka z intrasubiektywną sferą rzeczywistości, trzeba przystąpić do zapowiedzianego wcześniej określenia stanowiska Cantora w kwestii uniwersaliów. Skrajny realizm w tym zakresie można zdefiniować jako koniunkcję dwu tez:

1. Dla każdego predykatu jednoargumentowego istnieje byt abstrakcyjny;

2. Owe byty abstrakcyjne są indywidualnymi, stanowiącymi jedność przedmiotami. Różnią się one od konkretnych przedmiotów swym abstrakcyjnym charakterem, ale nie odróżniają się od nich swą przedmiotowością⁵².

mniej *implicite* musiał akceptować istnienie zbioru pustego. Posługiwał się on też *explicite* pewną formą zbioru pustego. Por. G. Cantor, *Über unendliche lineare Punkt-mannigfaltigkeiten*. Nr 2, 1880, w: G. Cantor, *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, 146.

⁴⁹ Przeciwbraz funkcji to zbiór wszystkich pojęć – dla uproszczenia dalszych analiz można nazwać tę funkcję „F”.

⁵⁰ Na przykład funkcji zdaniowej „x jest czerwony” przyporządkowuje się „czerwość”, która jest nazwą, bowiem w zdaniu może zajmować miejsce podmiotu.

⁵¹ Ta uwaga pozwoli w dalszych rozważaniach mówić zamiennie o predykatach jednoargumentowych lub nazwach ogólnych.

⁵² Takie sformułowanie stanowiska skrajnego realizmu zostało w głównych zarysach przejęte od R. Carlsa, przy czym autor ten mówi o istnieniu dla każdego pojęcia odpowiedniego bytu abstrakcyjnego:

Na podstawie analizy Cantorowskich opisów własności zbioru trzeba wysunąć wniosek, że każdemu predykatowi jednoargumentowemu $P(x)$ (zwerbalizowane prawo – *Gesetz*) można przyporządkować jakiś byt. Jest nim zbiór $\{x: P(x)\}$ tych i tylko tych przedmiotów sfery transsubiektywnej, których nazwy wstawione w miejsce zmiennej nazwowej tworzą zdanie prawdziwe⁵³.

Z charakterystyki zbiorów dokonanej przez Cantora wynika również, iż posiadały one własności bytu abstrakcyjnego, to znaczy: niezależnego od elementów, pozaczasowego i pozaprzestrzennego.

W celu uzasadnienia tej tezy można skonstruować następujący predykat jednoargumentowy: „ x jest monetą, którą ofiarowano na cele charytatywne 1.01.1850 w kościele franciszkanów w Krakowie, i która między godziną 23.00 a 24.00 tegoż dnia spoczywała w skarbcu kościoła”⁵⁴. Takiej funkcji zdaniowej przyporządkowany jest – zgodnie z tym, co powiedziano wyżej – pewien zbiór, niezależnie od tego, czy wszystkie monety tworzące ów zbiór jeszcze istnieją, czy też nie istnieje obecnie żadna. Cantor absolutnie nie stawia w swej charakterystyce zbioru takiego warunku odnośnie do elementów. Dlatego można twierdzić, iż akceptował on pozaczasowy charakter zbiorów.

Odwołując się do tego samego predykatu, można argumentować za pozaprzestrzennym, niezależnym od elementów charakterem zbiorów w rozumieniu Cantora. Dla istnienia zbioru odpowiadającego funkcji zdaniowej $P(x)$ nie żądałby on, jak można sądzić, aby monety były obecnie „zebrane razem” w jakimś skarbcu, pojemniku lub „blisko siebie”. Istotnym argumentem w tym wypadku jest

„I. la' Zu jedem beliebigen Allgemeinbegriff gibt es eine entsprechende abstrakte Entität, und

I. lb' diese abstrakten Entitäten sind als individuelle, einheitliche Gegenstände zu betrachten, die sich von den konkreten Gegenständen wohl durch ihren abstrakten Charakter, nicht aber durch ihre Gegenständlichkeit unterscheiden”. R. Carls, dz. cyt., 58.

⁵³ „(...) wenn auf Grund ihrer (einer Mannigfaltigkeit = einer Menge – J. D.) Definition und infolge des logischen Prinzips vom ausgeschlossenen Dritten es als intern bestimmt angesehen werden muß, (...) ob irgendein derselben Begriffssphäre angehöriges Objekt zu der gedachten Mannigfaltigkeit als Element gehört oder nicht...”.

⁵⁴ Przykład jest transpozycją przykładu z pracy J. A. Farisa. Por. J. A. Faris, *Plato's theory of forms and Cantor's theory of sets*, 8-9. Opracowanie to, opublikowane pod bardzo obiecującym tytułem, nie zawiera zapowiadanego porównania teorii mnogości Cantora (zasadniczo brak odwołań do suponowanego źródła, to znaczy do prac Cantora) z teorią Platona. Jest to raczej porównanie tej drugiej z szeroko rozumianą teorią cantorowską w fazie modyfikacji Russellowskich, mających na celu wyeliminowanie antynomii.

jednak to, że Cantor najprawdopodobniej przyjąłby istnienie zbioru odpowiadającego funkcji zdaniowej $P(x)$ nawet wtedy, gdyby w określonym dniu i miejscu nie zebrano ani jednej monety na cele charytatywne. Predykatowi przyporządkowany byłby wtedy zbiór pusty, absolutnie nie związany z jakimkolwiek elementem. W tym właśnie znaczeniu można mówić, że zbiory były, według Cantora, bytami abstrakcyjnymi *ante rem*.

Należy obecnie uzasadnić, iż zbiory te spełniają drugi warunek nałożony na byty abstrakcyjne w przyjętej definicji skrajnego realizmu. W tym celu trzeba najpierw zwrócić uwagę na dwuaspektywność zbiorów w opisach Cantora. Pod pewnym względem mogą one być traktowane jako „wielość”, pod innym zaś jako „jedność”⁵⁵. Ze względu na sposób zdefiniowania skrajnego realizmu, interesujący jest drugi z wymienionych aspektów.

Zbiór jest przede wszystkim przedmiotem, rzeczą (*Ding*). Indywidualność zbioru jako „jedności” jest zawarta *implicite* – jak się wydaje – w określeniu zbioru jako rzeczy. Co więcej, jest to przedmiot, który może być widziany właśnie jako „jedność dla siebie” (*als ein einheitliches Ding für sich*)⁵⁶. Owo „bycie jednością” potwierdza również termin *Ganze* stosowany przez Cantora dla określenia tego, czym jest zbiór.

Poza tym właściwa teorii mnogości Cantora zasada nieograniczonej komprehensji⁵⁷ dopuszcza, by dany zbiór stanowił element innego zbioru, w skład którego wchodzi też inne byty, o których wiadomo, że są indywiduami⁵⁸. To dodatkowy argument za jednostkowym charakterem zbioru.

Przeprowadzona analiza pozwala stwierdzić, że w zakresie problematyki uniwersaliów Cantor zajmował stanowisko skrajnego realizmu. Bytem abstrakcyjnym był dla niego zbiór w aspekcie jedności (*die Menge als Eines*).

⁵⁵ „Unter einer (...) 'Menge' verstehe ich nämlich allgemein jedes Viele, welches sich als Eines denken lässt (...)”.

⁵⁶ „Jede Menge wohlunterschiedener Dinge kann als ein einheitliches Ding für sich angesehen werden, in welchem jene Dinge Bestandteile oder konstitutive Elemente sind”. G. Cantor, *Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten*, 1887-88, w: G. Cantor, *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, 379.

⁵⁷ Zob. przypis 48.

⁵⁸ W sferze języka odpowiada temu przyporządkowanie każdemu predykatowi typu $P(x)$ nazwy ogólnej, która w innych predykatkach może zajmować miejsce zmiennej nazwowej.

1.2.2.3. Zbiór – idea – byt abstrakcyjny

Cantor podkreślał, że tak rozumiany zbiór jest „spokrewniony” (*verwandt*) z ideą Platona⁵⁹. Podobieństwo (czy wręcz identyczność) Cantorowskiego bytu abstrakcyjnego do idei platońskich wynika też pośrednio z powoływania się na tezę św. Augustyna o realnym istnieniu liczb całkowitych: skończonych i pozaskończonych, jako odwiecznych idei w umyśle Boga⁶⁰. Liczba była przez Cantora definiowana jako zbiór zbiorów równolicznych. Ów zbiór zbiorów w aspekcie jedności (jako „jedność”) istniałby tam odwiecznie jako idea. Wypada zresztą zauważyć, że w przytaczanym tekście akceptuje on wprost istnienie platońskiego świata idei, umieszczając go – za św. Augustynem – w umyśle Boga⁶¹.

W pismach Cantora trudno się natomiast dopatrzeć wyraźnego odpowiednika tezy Platona o izomorfizmie sfery pojęć ze sferą idei. W języku Cantora taka teza przyjmowałaby postać: dziedzina pojęć w rzeczywistości intrasubiektywnej jest identyczna (w znaczeniu: izomorficzna) z dziedziną zbiorów traktowanych jako jedność, „spokrewnionych” – względnie tożsamy – z ideami Platona.

Można przeprowadzić następujące rozumowanie: skoro każda liczba całkowita, skończona lub pozaskończona, istniejąca jako po-

⁵⁹ „Unter einer (...) ‘Menge’ verstehe ich nämlich allgemein jedes Viele, welches sich Eines denken läßt, d. h. jeden Inbegriff bestimmter Elemente, welcher durch ein Gesetz zu einem Ganzen verbunden werden kann, und ich glaube hiermit etwas zu definieren, was verwandt ist mit dem **Platonischen** (podkr. Cantora) εἶδος oder ἰδέα, (...)”. G. Cantor, *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten. Nr 5. Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*, art. cyt., 204 (przypis do s. 165).

⁶⁰ Cantor stwierdził w roku 1895, że sam doszedł do tej tezy, jeszcze przed zapoznaniem się z tekstami św. Augustyna.

⁶¹ „Gestatten Sie mir aber dazu zu bemerken, daß mir die Realität und absolute Gesetzmäßigkeit der ganzen Zahlen eine viel stärkere zu sein scheint als die der Sinnenwelt. Und daß es sich so verhält, hat einen einzigen, sehr einfachen Grund, nämlich diesen, daß die ganzen Zahlen sowohl getrennt wie auch in ihrer actual unendlichen Totalität **als ewige Ideen in intellectu Divino im höchsten Grade der Realität existieren** (podkr. – J. D.). (...) Viel später habe ich gesehen, daß im wesentlichen derselbe Gedanke vom heil. Augustin in dem Werke *De civitate Dei*, lib. XII, cap. 19 (contra eos, qui dicunt ea, quae infinita sunt, nec Dei posse scientia comprehendendi) vorkommt”. G. Cantor, *List do C. Hermite z 30.11.1895*, w: H. Meschkowski, *Problem des Unendlichen. Werk und Leben Georg Cantors*, Braunschweig 1967, 262-263. Na wspomniany rozdział (Przeciw tym, którzy twierdzą, że nieskończoności nie może objąć nawet wiedza Boża, tłum. za: Św. Augustyn, *O państwie Bożym. Przeciw poganom ksiąg XXII*, tłum. z łac. i oprac. W. Kornatowski, Warszawa 1977) dzieła św. Augustyna matematyk z Halle powoływał się częściej, uzasadniając istnienie liczb pozaskończonych.

jęcie w sferze intrasubiektywnej, ma swój odpowiednik w dziedzinie idei (zbiór w aspekcie jedności – w umyśle Boga) i odwrotnie, a status ontyczny liczb był – według Cantora – dokładnie taki sam jak wszystkich innych pojęć, zatem każde pojęcie ma wzajemnie jednoznacznie wyznaczony odpowiednik w dziedzinie idei platońskich. Należy zatem wnioskować, że Cantor uznałby tezę o istnieniu funkcji wzajemnie jednoznacznie odwzorowującej pojęcia istniejące w sferze intrasubiektywnej na idee (abstrakty – zbiory w aspekcie jedności). Można też przypuszczać, że odwołując się do św. Augustyna, *implicite* przyjmował on jeszcze mocniejszy jej wariant, w którym funkcja ta ma własność izomorfizmu.

Przy tej okazji warto zauważyć, iż nawet wzajemna jednoznaczność badanej relacji wystarcza – w połączeniu z określeniem funkcji F^{62} – do stwierdzenia, że relacja wiążąca językową sferę predykatów jednoargumentowych (*resp.* nazw ogólnych) z dziedziną idei (zbiorów w aspekcie jedności) jest funkcją typu na. Ten aspekt filozofii Cantorowskiej również mieści się w ogólnej tendencji systemów platońskich, dla których język nie jest kształtowany dowolnie, lecz w jego budowie musi być uwzględniana jakaś pozajęzykowa i poza-intelektualna rzeczywistość.

Prowadzone badania miały potwierdzić istnienie składowej platońskiej w zakresie preferencji ontologicznych twórcy teorii mnogości. Z konieczności należało w nich uwzględnić elementy filozofii języka i rekonstruować przyjmowaną przez Cantora semantykę. Ze względu na specyficzny status ontyczno-poznawczy sfery intrasubiektywnej trzeba też było odwołać się do tez o charakterze poznawczym.

Szczegółowe analizy wykazujące, że w kwestii uniwersaliów Cantor był skrajnym realistą, pozwoliły uzasadnić, iż przejął on główny zrąb ontologii Platona. Przy czym miejsce idei Platona zajął w jego ontologii zbiór pojęty w aspekcie jedności – „pokrewny” lub wręcz tożsamy z ideą Platona. Własności zbioru były zaś zdeterminowane dwoma, przyjmowanymi *implicite* w Cantorowskiej teorii mnogości, aksjomatami: nieograniczonej komprehensji oraz ekstensji⁶³.

⁶² Zob. przypis 49.

⁶³ Zob. przypis 48. Dla ontologii typu platońskiego należy – jak się wydaje – odróżniać teoriomnościowy aksjomat ekstensji od ontologicznej zasady ekstensji. Aby tę różnicę zobrazować, można podać następujący przykład. Niech uniwersum składa się

1.3. NIEŚCISŁOŚCI DWUWĄTKOWEJ ONTOLOGII

Należy postawić pytanie: czy tak zrekonstruowana ontologia Cantora jest spójna? Czy nie pozostawia jakichś niejasności, nie rozstrzygniętych kwestii?

Od razu należy zastrzec, że w tym miejscu nie będzie rozpatrywana kwestia antynomii wprowadzonych do ontologii Cantora w momencie utożsamienia idei Platona ze zbiorem. Własności zbioru były przecież zdeterminowane przez – generujący antynomie – aksjomat nieograniczonej comprehensji.

Niejasne pozostaje, czy Cantor przyjmował dualny, odziedziczony po Spinozie i idealistach niemieckich, układ rzeczywistości (sfera transsubiektywna – sfera intrasubiektywna). Czy też stwierdzając, że odpowiedniki pojęć istnieją w sferze transsubiektywnej, i akceptując platonizm, nie przyjmował on w konsekwencji *implicite* trzech sposobów egzystencji (pojęcie – idea – przedmiot).

z czterech elementów, ludzi. Wśród nich dwu jest łysych i dwaj (ci sami) są Murzynami. Wtedy zakresy obydwu predykatów, na mocy aksjomatu ekstensji, są równe:

$$\{x; L(x)\} = \{x; M(x)\}.$$

Pytanie: czy wówczas dwom predykatom odpowiada ten sam byt abstrakcyjny? Platon zgodziłby się, że zakresy idei łysości i idei Murzyna w tym wypadku są sobie równe (czyli obowiązuje w jego systemie teoriomnogościowy aksjomat ekstensji), natomiast nie zgodziłby się zapewne na tezę, że idea łysości jest tożsama z ideą Murzyna, a zatem nie obowiązuje w jego systemie ontologiczna zasada ekstensji. Por. A. Wedberg, *Plato's philosophy of mathematics*, Stockholm 1955, 35n. Zasadę tę formuluje się następująco: dwa byty abstrakcyjne, odpowiadające dwom różnym predykatom są sobie równe wtedy i tylko wtedy, gdy nazwy wszystkich i tylko tych przedmiotów, które z pierwszym predykatem dają zdanie prawdziwe, wstawione w miejsce zmiennej nazwowej drugiego predykatu, dają również zdanie prawdziwe. Por. R. Carls, dz. cyt., 63. Można wykazać, że w zrekonstruowanej ontologii Cantora ontologiczna zasada ekstensji jest spełniona. Niech $P(x)$ i $R(x)$ będą dwoma różnymi predykatami jednoargumentowymi. Zgodnie ze sformułowaniem zasady ekstensji dają one zdanie prawdziwe z nazwami tych samych przedmiotów. Na podstawie teoriomnogościowego aksjomatu ekstensji, przyjmowanego *implicite* przez Cantora, zachodzi wówczas:

$$\{x; P(x)\} = \{x; R(x)\}, \text{ czyli zakres (P) = zakres (R),}$$

zaś na mocy własności relacji izomorficznych:

$$\text{pojęcie (P) = pojęcie (R)}$$

i dalej na podstawie zachodzącego izomorfizmu:

$$\text{abstrakt (P) = abstrakt (R).}$$

Łatwo sprawdzić, że wszystkie przejścia w tym rozumowaniu mają charakter równoważności, co kończy dowód. Abstraktem u Cantora jest zbiór w aspekcie jedności. Wypada jeszcze podkreślić, że R. Carls, nie wdając się w zbyt szczegółowe badania, też skłania się ku tezie, że w ontologii Cantora spełniona jest zasada ekstensji. Por. R. Carls, dz. cyt., 64. Zatem zbiory Cantora (byty abstrakcyjne) są – przy uwzględnieniu klasycznego rozróżnienia – klasami, a nie atrybutami.

Można bronić dualizmu, przyjmując, że sfera transsubiektywna jest zbudowana wyłącznie z samych zbiorów – stanowiących jedność. Trzeba by wówczas dodać: jedynie ze względów formalno-poznawczych rozpatrywane są one również w drugim aspekcie jako wielość (zakres pojęcia, zakres abstrakcyjnej idei).

Broniąc dualizmu, należałoby jednak rozstrzygnąć kolejne problemy. Czy Cantor rzeczywiście wyobrażał sobie „świat zewnętrzny” (*Außenwelt*), jako „świat samych zbiorów”, „świat bez indywidualów”?⁶⁴ Czy taki „świat zewnętrzny” nie byłby w istocie rzeczywistością ustrukturalizowaną przez poznający podmiot, który po kantowsku nakładałby na indywiduala aprioryczną kategorię zbioru pojmowanego jako jedność?

Problem – albo dualizm, albo trzy sposoby istnienia – byłby bliższy rozstrzygnięcia, gdyby udało się ustalić, co według Cantora odpowiadało, w sferze transsubiektywnej, spinozjańskim ideom jednostkowym: indywidualum lub jednoelementowy zbiór złożony z tego indywidualum?⁶⁵ Odpowiedź: zarówno indywidualum, jak i zbiór jednoelementowy, nakazywałaby widzieć akceptację trzech sposobów istnienia. Wskazanie na zbiór jednoelementowy, przy równoczesnym wyraźnym odróżnieniu przez Cantora zbioru jednoelementowego od samego elementu, sugerowałoby dualizm. Jego teksty nie dają jednak podstaw do rozstrzygnięcia, która z odpowiedzi jest właściwa. Nie jest też wykluczone, że nie odróżniał on zbioru jednoelementowego od samego elementu⁶⁶.

W każdym razie, brak wyraźnie określonego stanowiska Cantora w opisaney sytuacji problemowej pociąga jako skutek nierozstrzy-

⁶⁴ Indywidua są tutaj rozumiane jako byty „nierozkładalne”, to znaczy takie, które same nie są zbiorami (nie posiadają one żadnego elementu i same nie są zbiorem pustym).

⁶⁵ Cały czas należy pamiętać, że termin „idea” jest w tekstach Cantora wieloznaczny, a przynajmniej dwuznaczny. Raz jest to idea spinozjańska, innym razem idea platońska – zbiór „pokrewny” idei Platona. „Miejsce” tej pierwszej jest w rzeczywistości intrasubiektywnej, druga należy do rzeczywistości transsubiektywnej.

⁶⁶ Co odpowiada w Cantorowskiej sferze transsubiektywnej idei jednostkowej komputera, przy pomocy którego pisana jest ta praca: właśnie ów komputer, czy może {komputer} – czyli jednoelementowy zbiór? Cantor posługiwał się zbiorami jednoelementowymi w swej matematycznej praxis [„(...) so besteht die Menge P' aus dem einem Punkte O (...)”. G. Cantor, *Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen*, 1872, w: G. Cantor, *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, 98]. Wcale nie jest jednak wykluczone, że nie odróżniał on zbioru jednoelementowego od samego elementu, czyli że prawdziwa była dla niego teza „ $a = \{a\}$ ”.

galność kwestii, co konstytuuje rzeczywistość transsubiektywną: tylko zbiory czy także indywidua (w znaczeniu określonym powyżej)⁶⁷. Jest prawdą, że niektóre jego wypowiedzi sugerują rozbitcie sfery transsubiektywnej na dwie sfery istnienia, jak u Platona i św. Augustyna, przy równoczesnym utożsamieniu jednej z nich z dziedziną idei („natura duchowa”, zbiory jako jedność czy w ogóle zbiory?), a drugiej z dziedziną przedmiotów materialnych⁶⁸. Jak powiedziano wyżej, jest to jednak nie do pogodzenia z podkreślanym przez Cantora dualizmem rzeczywistości⁶⁹.

Wprowadzenie do ontologii kategorii zbioru, którego własności były zdeterminowane przez aksjomat nieograniczonej komprehensji, jest przyczyną innej sprzeczności tkwiącej w założeniach ontologii Cantora. Konsekwencją przyjęcia aksjomatu komprehensji jest akceptacja istnienia zbioru pustego. Zgodnie z zasadami odtworzonej ontologii Cantorowskiej, zbiór pusty byłby odpowiednikiem (w rzeczywistości transsubiektywnej) tych pojęć ze sfery intrasubiektywnej, których zakres jest właśnie zbiorem pustym.

Na przykład obrazem zbioru pustego, istniejącego w sferze transsubiektywnej, byłoby pojęcie sprzeczne S , a więc takie, dla którego można wykazać zarówno $A(S)$, jak i $\sim A(S)$ ⁷⁰. Z drugiej

⁶⁷ Problem ten można sformułować również inaczej: gdyby podjąć próbę „uporządkowania” Cantorowskiej sfery transsubiektywnej przy pomocy Russellowskiej teorii typów, to co należałoby zakwalifikować do „typu zerowego”: indywidua czy też jednoelementowe zbiory tych indywiduów? Obydwa rozwiązania, zgodnie z tym, co powiedziano, wydają się możliwe.

⁶⁸ Podstawą podziału sfery transsubiektywnej byłaby opozycja: byt rozciągły – byt nierozciągły.

⁶⁹ Jeszcze raz nasuwa się sugestia, aby Cantorowską ontologię zinterpretować w duchu berkeleyowskiego idealizmu subiektywnego. Może należałoby utożsamić dziedzinę idei w umyśle Boga ze sferą istnienia intrasubiektywnego Cantora, zaś do sfery transsubiektywnej zaliczyć przedmioty rozciągłe? Idea w umyśle Boga byłaby wówczas tożsama z pojęciem istniejącym w sferze intrasubiektywnej i zachowany byłby, postulowany przez twórcę teorii mnogości, dualizm rzeczywistości. Proces poznania polegałby zaś na jakiejś partycypacji podmiotu poznającego w „myśleniu Boga”. Od razu trzeba wysunąć dwa kontrargumenty. Nie byłoby wówczas miejsca w sferze transsubiektywnej dla obiektów „natury duchowej”, co wyraźnie postulował niemiecki matematyk. Po wtóre, Cantorowska charakterystyka sfery intrasubiektywnej wyraźnie sugeruje, że nie jest ona intelektem Absolutu, zawierającym odwieczne idee, ale „naszym intelektem”, rozumem wypracowującym pojęcia w mozolnym procesie poznawczym.

⁷⁰ Niech S będzie pojęciem sprzecznym w znaczeniu opisanym powyżej. Niech funkcja zdaniowa $A(x)$ oznacza „ x jest człowiekiem”. Tej funkcji zdaniowej odpowiada pojęcie A w sferze intrasubiektywnej. Ponieważ „ S jest człowiekiem”, to:

zakres pojęcia $S \subset$ zakres pojęcia A . (I)

strony, takie właśnie pojęcia Cantor wykluczał z rzeczywistości intrasubiektywnej⁷¹. Zatem, zgodnie z własnościami izomorfizmu, nie był im przyporządkowany żaden element (nawet zbiór pusty) należący do rzeczywistości transsubiektywnej. Eliminowałoby to zbiór pusty ze sfery transsubiektywnej, co daje wspomnianą sprzeczność (niekonsekwencję) w ontologii Cantora⁷².

Warto też wspomnieć, iż wprowadzenie do ontologii aksjomatu komprehensji potwierdza, że ontologia Cantora dziedziczy paradoksy właściwe systemowi Platona⁷³. Zezwala bowiem, aby elementami tego samego zbioru były zarówno indywidua, jak i zbiory indywiduów, zbiory zbiorów indywiduów itd. Słowem, sfera transsubiektywna nie jest „uwarstwiona” według zasad Russellowskiej teorii typów⁷⁴.

2. IMPLIKACJE ZAŁOŻEŃ ONTOLOGICZNYCH

Mimo że Cantorowska ontologia zawierała wiele nieściśłości i niejasności, była niedopracowana, jej tezy zostały rozproszone w różnych pracach i nie była oryginalna, to jednak jej znaczenie nie ograniczało się wyłącznie do wpływu na sposób uprawiania matematyki przez samego twórcę teorii mnogości. Można już teraz, bezpośrednio po zrekonstruowaniu ontologicznych założeń, na któ-

Jednocześnie wiadomo, że: „S nie jest człowiekiem” (funkcji zdaniowej „x nie jest człowiekiem” odpowiada pojęcie $\sim A$). Czyli:

zakres pojęcia $S \subset$ zakres pojęcia $\sim A$. (I)

Na mocy Cantorowskiej charakterystyki zbioru, zawierającej zasadę *tertium non datur*:

zakres pojęcia $A \cap$ zakres pojęcia $\sim A = \emptyset$,

zatem na podstawie (I) i (II):

zakres pojęcia $S = \emptyset$.

Czyli odpowiednikiem zbioru pustego istniejącego w sferze transsubiektywnej jest pojęcie sprzeczne S w sferze intrasubiektywnej.⁷¹ „Die Mathematik ist in ihrer Entwicklung völlig frei und nur an die selbstredende Rücksicht gebunden, daß ihre Begriffe sowohl in sich widerspruchlos sind, als auch (...)”. G. Cantor, *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten. Nr. 5. Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*, art. cyt., 182.

⁷² Cantor, jak się wydaje, nie rozróżniał konsekwentnie zbioru pustego i liczby „0”.

⁷³ Zob. „paradoks trzeciego człowieka”.

⁷⁴ Skądinąd jest interesujące, że Cantor w swoich pracach matematycznych postępował często tak, jakby podświadomie przestrzegał niektórych podstawowych zasad teorii typów B. Russella: „Wir kennen heute mehrere Methoden, um diese Antinomien zu vermeiden. Am naheliegendsten ist es, einen stufentheoretischen Aufbau zu wählen, der auch im großen und ganzen den Vorstellungen der Cantorschen, sog. naiven, Mengenlehre entspricht”. K. Schröter, *Die Mengenlehre als inhaltliches Fundament der Mathematik*, NTM. Schriftenreihe für Geschichte der Naturwissenschaften, Technik und Medizin 6(1969), Heft 1, 3.

rych bazował Cantor, wskazać te sfery aktywności poznawczej, w których odwoływanie się do nich okazało się płodne.

2.1. GŁÓWNE KIERUNKI ODDZIAŁYWANIA

1. Cantor sformułował założenia ontologiczne po to, by znaleźć w nich oparcie dla epistemologii oraz uzasadnić istnienie liczb pozaskończonych. Nie jest wykluczone, że pomysł późniejszej definicji liczb całkowitych (skończonych i pozaskończonych), jako zbioru zbiorów równolicznych, był w jakiejś mierze inspirowany przyjmowaną ontologią.

W weierstrassowskim wzorcu uprawiania matematyki teoria liczb naturalnych była teorią podstawową, na której starano się zbudować całą matematykę⁷⁵. Stwierdzenie, że teorię tę można wyprowadzić z teorii mnogości, pozwoliło Cantorowi na stwierdzenie, że matematyka jest niczym innym, tylko czystą teorią mnogości⁷⁶. To zupełnie nowe ujęcie problemu, czym jest matematyka, w myśl tego, co powiedziano wyżej, miałoby pierwotne źródło w ontologii.

2. Ontologia typu platońskiego dawała podstawy epistemologii matematyki. Pojęciowy charakter wiedzy matematycznej gwarantował jej pewność. Skoro bowiem transsubiektywna dziedzina pojęć była izomorficzna z rzeczywistością transsubiektywną, nie trzeba było odwoływać się do tej drugiej w trakcie prowadzenia badań matematycznych. Zbędne okazały się zatem jakiegokolwiek formy doświadczenia lub intuicji dotyczące sfery transsubiektywnej.

Na bazie założeń ontologicznych Cantor mógł twierdzić, że niesprzeczność pojęć gwarantuje istnienie definiowanych obiektów w obydwu rzeczywistościach. Stanowiło to „teoretyczne” uzasadnienie eliminacji dowodów istnienia (konstrukcji) definiowanych obiektów matematyki. Przyjęta ontologia pozwoliła też Cantorowi „antycypować” niektóre tezy formalizmu w filozofii matematyki. Zostanie uzasadnione, że jego poglądy można słusznie określić mianem „formalizmu metodycznego”.

⁷⁵ Por. K. Schröter, dz. cyt., 2.

⁷⁶ „Die allgemeine Typentheorie scheint mir nach allen Richtungen einen grossen Nutzen zu versprechen. Sie bildet einen wichtigen und grossen Theil der reinen Mengenlehre (Theorie des ensembles), also auch der reinen Mathematik, denn letztere ist nach meiner Auffassung nichts Anderes als reine Mengenlehre”. G. Cantor, *Principien einer Theorie der Ordnungstypen. Erste Mittheilung*, w: I. Grattan-Guinness, *An unpublished paper by Georg Cantor*, Acta Mathematica 89(1970) Bd 124, 84.

3. W ontologii Cantora istotną funkcję spełniało pojęcie zbioru. Posługując się tym pojęciem w pracach z zakresu analizy, topologii prostej i teorii mnogości, uświadomił on sobie jego ogólność i zastąpił (utożsamił) nim podstawowe w ontologii Platona pojęcie idei. W konsekwencji – jak można sądzić – Cantor wyraził intuicję zbudowania ontologii „na bazie” teorii mnogości⁷⁷.

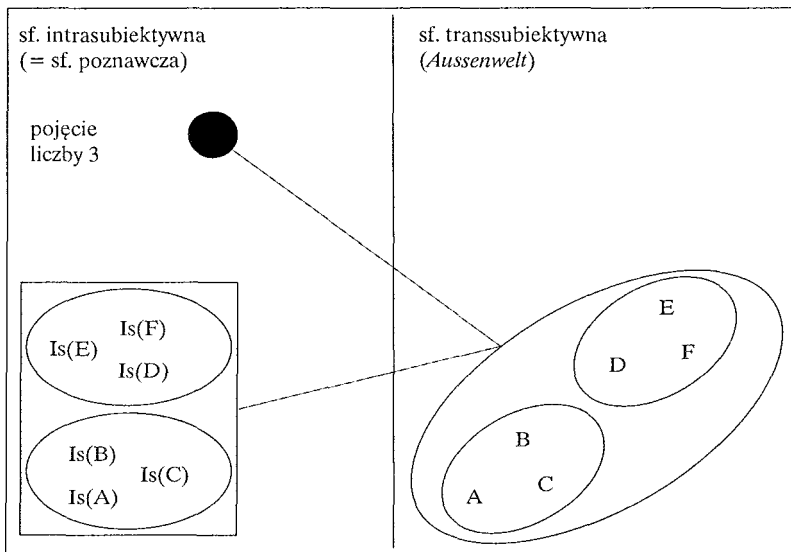
Był to pomysł, który w przyszłości miał zaowocować uznaniem teorii mnogości za ontologię i powstaniem ontologii formalnych, różniących się od siebie na tyle, na ile różniły się teorie mnogości, które legły u ich podstaw. Odwołując się do – opisaney w punkcie 1 – relacji pomiędzy teorią mnogości a resztą matematyki, można by skutek pomysłu wprowadzenia pojęcia zbioru do ontologii sparametryzować stwierdzeniem, że „ontologia, przy takim jej ujęciu, jest czystą teorią mnogości”.

4. Własności pojęcia zbioru, wprowadzonego przez Cantora do ontologii, były zdeterminowane przyjętymi *implicite* aksjomatami: ekstensji oraz nieograniczonej komprehensji. Ten drugi generował antynomie. Z drugiej strony wydaje się, że właśnie podkreślana i wymagana w ontologii dwuaspektowość zbioru mogła Cantorowi zasugerować sposób usunięcia antynomii. Polegał on na stwierdzeniu, że wśród wielości (*Vielheit* – dotychczas zbiorów w aspekcie wielościowym) nie każda jest zbiorem, są nim wyłącznie te, które niesprzecznie dają się pomyśleć jako jedność (*Einheit*). To rozwiązanie można interpretować jako pierwszą próbę ograniczenia aksjomatu komprehensji, co zaowocowało w aksjomatyce Zermelowskiej zastąpieniem go przez aksjomat wyróżniania.

W niniejszym pracy szerzej omówione zostaną te konsekwencje przyjętej ontologii, które zasygnalizowano w punktach 1 i 2.

⁷⁷ Ogólność pojęcia zbioru wynikała stąd, że elementami zbioru mogły być nie tylko obiekty matematyczne: liczby lub punkty przestrzeni, ale przedmioty jakiegokolwiek rodzaju. Cantor, bezpośrednio przed opisaniem własności zbioru i stwierdzeniem jego podobieństw z ideą Platona, wskazał na genezę teorii mnogości, rozwijanej dotychczas tylko na użytek badań matematycznych, ale będącej równocześnie „bardzo wiele obejmującą doktryną”. Takie określenie teorii mnogości i następujące po nim przyrównanie podstawowego jej pojęcia do najistotniejszej kategorii ontologii Platona sugeruje, że niemiecki matematyk widział w teorii mnogości rodzaj ontologii: „*Mannigfaltigkeitslehre*. Mit diesem Worte bezeichne ich einen sehr viel umfassenden Lehrbegriff, den ich bisher nur in der speziellen Gestaltung einer arithmetischen oder geometrischen Mengenlehre auszubilden versucht habe”. G. Cantor, *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten*. Nr 5. *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*, art. cyt., 204 (przypis do s. 165).

2.2. ONTOLOGIA A DEFINICJA LICZB KARDYNALNYCH



rys. 1

Skoro, zdaniem Cantora, status ontologiczny liczb całkowitych jest taki sam jak status pojęć, zatem – zgodnie z zasadami odtworzonej ontologii – w sferze intrasubiektywnej (poznawczej) istnieje pojęcie liczby 3. Izomorficznym obrazem tego pojęcia w sferze transsubiektywnej – przy dalszym konsekwentnym stosowaniu tych zasad – jest zbiór wszystkich zbiorów trójelementowych⁷⁸. Niech G_{iz} oznacza relację izomorficzną odwzorowującą sferę transsubiektywną na intrasubiektywną. Wówczas:

pojęcie liczby 3 = $G_{iz}(\{A, B, C\}, \{D, E, F\})$. (I)

Poszczególne elementy A, B, ... sfery transsubiektywnej muszą posiadać swoje odpowiedniki w sferze intrasubiektywnej: $G_{iz}(A)$, $G_{iz}(B)$, Co więcej, zbiory tych elementów i zbiory ich zbiorów też

⁷⁸ Dla uproszczenia rozumowania warto przyjąć, że istnieją tylko dwa takie zbiory $\{A, B, C\}$ i $\{D, E, F\}$, gdzie poszczególne elementy są indywiduami. Założono również, że odpowiednikami idei jednostkowych są nie jednoelementowe zbiory (zakresy pojęć), ale same elementy – indywidua. Jak pokazano wcześniej, kwestia ta nie została w ontologii Cantora jednoznacznie rozstrzygnięta.

mają, zgodnie z własnościami izomorfizmu, obrazy w dziedzinie transsubiektywnej. Zatem:

$$\{\{G_{iz}(A), G_{iz}(B), G_{iz}(C)\}, \{G_{iz}(D), G_{iz}(E), G_{iz}(F)\}\} = G_{iz}(\{\{A, B, C\}, \{D, E, F\}\}).$$

Ponieważ indywiduom przyporządkowane są idee jednostkowe, równanie to przyjmuje postać:

$$\{\{Is(A), Is(B), Is(C)\}, \{Is(D), Is(E), Is(F)\}\} = G_{iz}(\{\{A, B, C\}, \{D, E, F\}\}). \quad (II)$$

Z porównania równań (I) i (II) wynika, że:

$$\text{pojęcie liczby } 3 = \{\{Is(A), Is(B), Is(C)\}, \{Is(D), Is(E), Is(F)\}\}.$$

W ten oto sposób schemat ontologiczny – z „wbudowanym” pojęciem zbioru – przyjęty dla uzasadnienia istnienia pozaskończonych liczb kardynalnych, mógł okazać się pomocny w zdefiniowaniu liczb całkowitych. W konsekwencji prowadziło to do zupełnie nowej koncepcji matematyki, matematyki jako teorii mnogości. Ostatnie równanie jest niczym innym, tylko definicją pojęcia liczby 3, istniejącego w sferze intrasubiektywnej. A matematyka to – według Cantora – właśnie operowanie pojęciami istniejącymi w tej sferze.

Przyjęcie, że inspiracja zdefiniowania przez Cantora liczb kardynalnych za pomocą zbiorów równolicznych była natury ontologicznej, znajduje swe pośrednie potwierdzenie w sekwencji wydarzeń. Prawie natychmiast po sformułowaniu założeń ontologicznych (1883) zaczął on w przybliżony sposób definiować liczby kardynalne (moce zbiorów) i proklamował matematykę czytać teorią mnogości (1884)⁷⁹.

ONTOLOGISCHE UND ERKENNTNISTHEORETISCHE VORAUSSETZUNGEN DER MENGENLEHRE GEORG CANTORS (I)

Zusammenfassung

Der vorgestellte Text enthält eine Rekonstruktion der Ontologie der Mathematik Georg Cantors. Seine Ontologie ist vorgestellt als ein Ergebnis einer Syn-

⁷⁹ Por. G. Cantor, *Principien einer Theorie der Ordnungstypen. Erste Mittheilung*, w: I. Grattan-Guinness, *An unpublished paper by Georg Cantor*, art. cyt., 84-85. Zamieszczone wyjaśnienia I. Grattan-Guinnessa pozwalają stwierdzić, iż ta część pracy Cantora, na którą się tu powołano, powstała jesienią 1884 roku. Zob. Tamże, 82. Inne źródło inspiracji, w zakresie definiowania liczb kardynalnych, mogła stanowić opublikowana właśnie w roku 1884 praca G. Fregego. Por. G. Frege, *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, Breslau 1884.

these zwei Faktoren: den Spinozianischen Dualismus der Realität und den Platonischen begrifflichen Realismus. Cantor hat zwei Sphäre der Realität ausgesondert: die intrasubjektive und die transsubjektive. Sie widerspiegeln aber die Spinozianische geistige und materielle Attribute des Seins nicht. Cantor hat auch die Platonische Idee mit seiner Konzeption der Menge identifiziert. Die Cantorsche Ontologie, die aus diesen zwei heterogenen Elementen aufgebaut worden war, ist in vielen seinen Aspekten inkohärent. Trotzdem, hat sie eine wichtige, heuristische Rolle bei der Entstehung der Cantorschen Mengenlehre gespielt.