Janusz Wesserling

Dwa semantyczne ujęcia logiki drugiego rzędu z identycznością

Studia Philosophiae Christianae 39/1, 75-103

2003

Studia Philosophiae Christianae
UKSW
39(2003)1

JANUSZ WESSERLING
Wydział Prawa UKSW

DWA SEMANTYCZNE UJĘCIA LOGIKI DRUGIEGO RZĘDU Z IDENTYCZNOŚCIĄ

WSTĘP

Powstanie różnorodnych systemów formalnych jest powodem dużego usprawnienia przeprowadzanych rozumowań na gruncie nauki a w tym również filozofii. Formalizacja teorii i rozumowań napotyka jednak na rozmaite trudności. Wyniki prac K. Gödla z 1930r. wskazują na problemy związane z dowodliwością zdań prawdziwych niektórych teorii nadbudowanych nad logiką pierwszego rzędu oraz systemów logicznych będących jej rozszerzeniem, a także na nieistnienie modeli dla pewnych teorii niesprzecznych. Do systemów posiadających powyższe własności zalicza się również przedstawiana w niniejszym artykule logika drugiego rzędu. Znajomość możliwości i ograniczeń tej logiki można uznać za niezbędną do właściwego jej wykorzystywania jako narzędzia w zastosowaniu do teorii filozoficznych. Bogactwo semantycznych założeń logiki drugiego rzędu, umożliwiających mówienie na jej gruncie o własnościach przysługujących własnościom bytów oraz rozważanie pojęć ekstensjonalnych pozwalają w sposób precyzyjny mówić np. o powszechnikach, kategoriach, przyczynowości itd.

W artykule przedstawiamy dwa ujęcia semantyczne dla logiki drugiego rzędu. Analiza podstaw obydwu ujęć semantycznych, a także warstwa dowodowa dotycząca niektórych własności metalogicznych zdaje się uwyraźniać między innymi zależności między ilością i budową modeli logiki drugiego rzędu, a wyrażalnością na jej gruncie pewnych pojęć, których nie można wyrazić w języku pierwszego rzędu.

W wielu publikowanych pracach dotyczących rozważanej logiki zakłada się, że w jej modelach dysponujemy wraz z uniwersum indywiduów (U_0) również rodzinami wszystkich podzbiorów uniwersów typu U_0^n (gdzie n jest dowolną liczbą naturalną). W ramach niniejszej pracy będzie się także brać pod uwagę szerszą klasę modeli. Część pierwsza dotyczy wspólnej dla obydwu podejść, podstawy syntaktycznej. W części drugiej, ograniczając pojęcie *struktury drugiego rzędu*, wprowadzimy terminy: *struktura ogólna* i *struktura główna,* w oparciu o które budować będziemy semantyki, odpowiednio: ogólną oraz główną. W ramach części trzeciej przedstawimy pewne sprowadzenie języka drugiego rzędu do języka pierwszego rzędu. Twierdzenia podane w części trzeciej umożliwią wykazanie niekategoryczności pewnych teorii drugiego rzędu na gruncie semantyki ogólnej (4) oraz posiadanie własności zwartości przez logikę drugiego rzędu na gruncie tegoż ujęcia semantycznego (5). Odniesiemy również te własności oraz własności z nimi związane do logiki drugiego rzędu z semantyką główną.

1. CHARAKTERYSTYKA SYNTAKTYCZNA KLASYCZNEJ LOGIKI II RZĘDU Z IDENTYCZNOŚCIĄ (L_2)

Na alfabet branego pod uwagę języka predykatów pierwszego rzędu **Alf** (J_1) składają się: symbole logiczne ($\sim$, $\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$, $\leftrightarrow$); stałe indywiduowe (a, b, c, a_1, a_2, a_3....); zmienne indywiduowe (x, y, z, x_1, x_2, x_3...); stałe predykatowe (P, Q, R, P_1, P_2, P_3..); kwantyfikatory wiążące zmienne indywiduowe: ogólny ($\forall$) i szczegółowy ($\exists$); nawiasy.

Alfabet języka drugiego rzędu **Alf** (J_2) otrzymujemy, dodając do alfabetu języka pierwszego rzędu zmienne predykatywne (X, Y, Z, X_1, X_2, X_3...), a także nowe kwantyfikatory wiążące te zmienne: ogólny ($\forall$) i szczegółowy ($\exists$)[1].

[1] Na zbiory symboli pozalogicznych wchodzących w skład alfabetów **Alf** (J_1) **i Alf** (J_2) nakładamy standardowe warunki. Zakładamy, że stałych pozalogicznych jakiegokolwiek typu jest przeliczalnie wiele. Dopuszczamy przy tym, aby stałych nazwowych była skończona ilość, włączając w to przypadek, gdy w ogóle nie ma ich w języku. Zbiór stałych predykatowych również może mieć skończoną ilość elementów, jednak w przypadku języka pierwszego rzędu musi być niepusty. Zmiennych natomiast jest nieskończenie przeliczalnie wiele.

Ze względu na to, że w artykule będziemy mówić o systemach formalnych z identycznością, zakładamy, że w alfabetach języków znajduje się również stała predykatowa „=". Ponadto, w konkretnych przykładach możemy używać standardowo stosowanej symboliki na gruncie matematyki np. dla predykatu większości (>), czy mniejszości (<).

Z sy mbolami predykatowymi związane jest pojęcie argumentowości[2]. Jednak w sytuacjach, w których nie będzie to prowadziło do nieporozumień, będziemy niekiedy pomijać informację dotyczącą tego, ilu argumentowy jest dany symbol predykatywny.

Pojęcia, służące określeniu języka pierwszego rzędu ($\mathbf{J_1}$) oraz języka drugiego rzędu ($\mathbf{J_2}$) oraz pojęcia z nimi związane, będziemy rozumieć w standardowy sposób. Należą do nich: *formuła poprawnie zbudowana* (*formuła sensowna*, *formuła*), *formuła atomowa*, *term*, *zmienna związana przez kwantyfikator*, *zasięg kwantyfikatora*, *zmienna związana w danej formule* φ oraz *zmienna wolna w* φ[3]. Należy pamiętać jednak, że dane pojęcie dotyczące języka $\mathbf{J_2}$ jest rozszerzeniem odpowiadającego mu pojęcia zdefiniowanego dla języka $\mathbf{J_1}$.

W aksjomatycznym ujęciu rachunku predykatów pierwszego rzędu z identycznością[4] ($\mathbf{L_1}$) w jego inwariantnej wersji schematami aksjomatów są schematy aksjomatów klasycznego rachunku zdań, aksjomaty identyczności[5] oraz:

(RP1) $\forall x_i\ \varphi \rightarrow \varphi\,[x_i/t]$, gdzie t jest dowolnym termem,

(RP2) $\varphi \rightarrow \exists x_i\ \varphi$,

(RP3) $\forall x_i\ (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \forall x_i\ \psi)$, gdzie x_i nie jest zmienną wolną w φ,

---

[2] Funkcje argumentowości **ArgJ1** (dla języka pierwszego rzędu) oraz **ArgJ2** (dla języka drugiego rzędu) przyporządkowują każdemu symbolowi predykatywnemu liczbę naturalną oznaczającą ilość jego argumentów.

[3] Zob. L. Borkowski, *Wprowadzenie do logiki i teorii mnogości*, Lublin 1991, 83-88 oraz 136-139; H. B. Enderton, *A second order logic*, w: *A mathematical introduction to logic*, New York 1972, 268-289.

[4] Zamiast mówić o rachunku predykatów i-tego rzędu z identycznością (i=1,2) będziemy zamiennie mówić o logice i-tego rzędu z identycznością. Często też będziemy omijać w nazewnictwie fakt, że w danym systemie formalnym dysponujemy predykatem identyczności z ustalonym znaczeniem.

[5] Aksjomaty te mają następującą postać: **(I 1)** aksjomat zwrotności: $\forall x_i\ (x_i = x_i)$; **(I 2)** aksjomat symetryczności: $\forall x_i\ \forall x_j\ [(x_i = x_j) \rightarrow (x_j = x_i)]$; **(I 3)** aksjomat przechodniości: $\forall x_i\ \forall x_j\ \forall x_l\ [(x_i = x_j) \wedge (x_j = x_l) \rightarrow (x_i = x_l)]$; **(I 4)** aksjomat ekstensjonalności dla identyczności indywiduów: $(x_i = x_j) \rightarrow (\varphi(x_i) \leftrightarrow \varphi(x_j))$, gdzie φ jest dowolną formułą języka pierwszego rzędu.

(RP4) $\forall x_i (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\exists x_i \varphi \rightarrow \psi)$, gdzie x_i nie jest zmienną wolną w ψ.

Zbiór reguł pierwotnych tworzą[6]:

(1) reguła odrywania dla implikacji (r_0): $\varphi, \varphi \rightarrow \psi \vdash \varphi$;

(2) reguła generalizacji (r_g), o schemacie: $\varphi \vdash \forall x_i \varphi$.

Schematy aksjomatów klasycznego rachunku zdań oraz RP1–RP4 są również schematami aksjomatów logiki drugiego rzędu (**L_2**). Oczywiście, każdemu z powyższych schematów odpowiadają poza formułami logiki **L_1** również i inne. Są to formuły poprawnie zbudowane zawierające zmienne predykatywne.

Aby wyznaczyć **L_2** wprowadzamy nowe aksjomaty. Można powiedzieć, że aksjomaty (RP5) – (RP8) są rozszerzeniami odpowiednio aksjomatów (RP1) – (RP4) na zmienne innego typu niż indywiduowe. Są to:

(RP5) $\forall X_i \varphi \rightarrow \varphi [X_i/\tau]$, gdzie τ jest zmienną lub stałą predykatywną oraz Arg (X_i) = Arg (τ),

(RP6) $\varphi \rightarrow \exists X_i \varphi$,

(RP7) $\forall X_i (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \forall X_i \psi)$, gdzie X_i nie jest zmienną wolną w φ.

(RP8) $\forall X_i (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\exists X_i \varphi \rightarrow \psi)$, gdzie X_i nie jest zmienną wolną w ψ.

Drugą grupę aksjomatów stanowią zasadniczo nowe wyrażenia:

(RP9) $\exists X \forall x_1 ... \forall x_n [X (x_1, x_2 ... x_n) \leftrightarrow \varphi(x_1 ... x_n)]$, gdzie φ jest dowolną formułą języka drugiego rzędu, o jedynych zmiennych wolnych $x_1 ... x_n$.

(RP10) $\forall x_1 \forall x_2 ... \forall x_n [(X_i (x_1, x_2 ... x_n) \leftrightarrow X_j (x_1, x_2 ... x_n)) \rightarrow X_i = X_j]$, gdzie X_i oraz X_j są n-argumentowymi zmiennymi predykatowymi, n – dowolną liczbą naturalną[7].

Wyrażenie (RP9) jest schematem, któremu odpowiada nieskończona ilość zdań języka drugiego rzędu. Zdania te nazywane są **postulatami definicyjnymi**. Wyrażenia otrzymane ze schematu RP10 zwane są **aksjomatami ekstensjonalności.** Dysponując tym schematem, nie musimy wprowadzać (I1) – (I4) aby określić identyczność między indywiduami. Można ją bowiem wprowadzić do systemu za pomocą następującej definicji:

$x = y \leftrightarrow \forall X (Xx \leftrightarrow Xy)$.

---

[6] Znak: $\vdash$ jest używany na oznaczenie konsekwencji syntaktycznej.

[7] Zob. L. Borkowski, dz. cyt., 136.

Możliwość definicyjnego ustalenia znaczenia identyczności indywiduów świadczy o większych ekspresyjnych możliwościach systemu $\mathbf{L}_2$ w stosunku do $\mathbf{L}_1$.

Zbiór reguł pierwotnych dla rachunku predykatów drugiego rzędu również powiększa się w stosunku do zbioru reguł przedstawionego wcześniej. Dodana zostaje tylko jedna reguła – reguła generalizacji (r_g') dla zmiennych predykatywnych. Ma ona zatem następującą postać:

(r_g') $\varphi (X_i) \vdash \forall X_i \, \varphi(X_i)$.

Z aksjomatycznym ujęciem logiki związane są ważne pojęcia syntaktyczne, takie jak: *teza*, *dowód*, *dowodliwość*, *inferencja*, *konsekwencja syntaktyczna* itd. Terminów tych używać będziemy, nadając im standardowe znaczenie[8].

Definicja 1

Zbiór formuł Φ jest **teorią nadbudowaną nad logiką** $\mathbf{L}_i$ ($i=1,2$) wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór jego konsekwencji syntaktycznych, Cn_{li} równy jest zbiorowi Φ.

2. SEMANTYCZNE UJĘCIA LOGIKI $\mathbf{L}_2$

H. B. Enderton podaje dwa rodzaje struktur relacyjnych, do których można odnieść rachunek predykatów drugiego rzędu[9]. Pogorzelski nazywa modele zdań w pierwszym z ujęć **modelami głównymi**[10]. Analogiczne, odpowiednie struktury nazywać będziemy **strukturami głównymi**, interpretacje – **interpretacjami głównymi**, a całą semantykę – **semantyką główną**. Z kolei, modele zdań w drugim ujęciu nazywane są przez H. B. Endertona **modelami ogólnymi**. Stąd, podobnie jak w poprzednim przypadku, będziemy mówić o **strukturach** lub **interpretacjach ogólnych**, a także o **semantyce ogólnej**[11].

Chcąc wprowadzić pojęcia *struktury głównej* oraz *struktury ogólnej* dla logiki $\mathbf{L}_2$, określimy najpierw szerszą klasę struktur relacyjnych niż te, które odpowiadają powyższym pojęciom.

---

[8] Zob. M. Porębska, W. Suchoń, *Klasyczny węższy rachunek predykatów*, w: *Elementarne wprowadzenie w logikę formalną*, Warszawa 1991, 189-231.

[9] Zob. H. B. Enderton, art, cyt., 268-289.

[10] Nazwa ta bierze się prawdopodobnie z tego, że mówiąc o modelach dla zdań logiki drugiego rzędu, mamy za zwyczaj na myśli właśnie modele pierwszego rodzaju.

[11] Zob. G. S. Boolos w artykule *O logice drugiego rzędu* nazywa semantykę główną, semantyką standardową lub, wymiennie, pełną. Chcąc jednak utrzymać jednolitość nazewnictwa będziemy się trzymać nazwy „semantyka główna".

Rozważmy struktury relacyjne o postaci:
S_2 = < U_0, {U_n: $U_n \subseteq P(U_0^n$ oraz n ∈ **N**}, {u_1, u_2... u_k}, {=, R_1, R_2,..., R_l}>, przy czym: k, l ∈ (**N** ∪ {0}); U_0 jest dowolnym niepustym zbiorem; u_1, u_2... u_k są wyróżnionymi elementami uniwersum U_0; R_1, R_2,.., R_l są relacjami, przy czym, jeśli relacja R_i jest n – argumentowa, to należy ona do uniwersum U_n[12].
Odniesienie języka drugiego rzędu do tak określonej struktury relacyjnej powodują *funkcja interpretująca* oraz *wartościowanie*.

Definicja 2
Interpretacją języka drugiego rzędu jest uporządkowana para **M_2** = < **S_2**, **$IntJ_2$**>, gdzie **$IntJ_2$** jest funkcją spełniającą następujące warunki:
(a) **$IntJ_2$** przyporządkowuje każdej stałej indywiduowej, element uniwersum **U_0**, znajdujący się w zbiorze indywiduów wyróżnionych. Wtedy gdy stałej: a_i, odpowiada element u_i, wówczas będziemy symbolicznie pisać: **$IntJ_2$** (a_i) = u_i, gdzie i ∈ {1, 2,..., k}.
(b) **$IntJ_2$** przyporządkowuje każdej n-argumentowej stałej predykatowej, n-argumentową wyróżnioną relację, a predykatowi identyczności – relację identyczności. Oznaczając przez R_i relację przyporządkowaną stałej: P_i, przez funkcję **$IntJ_2$**, zapiszemy to symbolicznie: **$IntJ_2$** (P_i) = R_i, gdzie **$ArgJ_2$** (P_i) = **$ArgJ_2$** (R_i) oraz i ∈ {1, 2,..., l}.

Definicja 3
Funkcja **v** jest **wartościowaniem (funkcją wartościowania)** wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia warunki:
(1) każdej zmiennej nazwowej, x_i, przyporządkowuje pewien element uniwersum **U_0**, a n-argumentowej zmiennej predykatowej X_i, n– argumentową relację R_i ze zbioru **U_n**. Symboliczny zapis: **v** (x_i) = u_j oraz **v** (X_i) = R_i
(2) każdej stałej nazwowej lub predykatowej przyporządkowuje wartość funkcji **$IntJ_2$**, czyli **v** (a_i) = **$IntJ_2$** (a_i) oraz **v** (P_i) = **$IntJ_2$** (P_i).

Pojęcie *spełniania* zdefiniujemy natomiast następująco:
Definicja 4
Niech dana będzie interpretacja **M_2** języka **J_2** oraz wartościowanie **v**. Wówczas:

[12] Symboliczny zapis zbiorów potęgowych branych tu pod uwagę: $P(U_o^n)$.

(1) formuła atomowa o postaci: $P_i(t_1, t_2,..., t_n)$ lub $X_i(t_1, t_2,..., t_n)$ jest spełniona przez wartościowanie **v**, wtedy i tylko wtedy, gdy $(v(t_1), \mathbf{v}(t_2),..., \mathbf{v}(t_n)) \in R_i$, gdzie R_i jest relacją przyporządkowaną stałej lub zmiennej predykatowej, występującej w danej formule, przez funkcję **v**. Zapisujemy wtedy symbolicznie: $\ulcorner P_i(t_1, t_2,..., t_n)\urcorner \in Sat(\mathbf{v}, \mathbf{M}_2)$, względnie $\ulcorner X_i(t_1, t_2,.., t_n)\urcorner \in Sat(\mathbf{v}, \mathbf{M}_2)$;

(2a) formuła: $\varphi \rightarrow \psi$, jest spełniona przez wartościowanie **v** wtedy i tylko wtedy, gdy φ nie jest spełniona przez **v** lub ψ jest spełniona przez **v**.

Można to inaczej zapisać następująco:
$[\ulcorner \varphi \rightarrow \psi\urcorner \in Sat(\mathbf{v}, \mathbf{M}_2)] \leftrightarrow [\varphi \notin Sat(\mathbf{v}, \mathbf{M}_2)$ lub $\psi \in Sat(\mathbf{v}, \mathbf{M}_2)]$;
(2b) $[\ulcorner \varphi \vee \psi\urcorner \in Sat(\mathbf{v}, \mathbf{M}_2)] \leftrightarrow [\varphi \in Sat(\mathbf{v}, \mathbf{M}_2)$ lub $\psi \in Sat(\mathbf{v}, \mathbf{M}_2)]$;
(2c) $[\ulcorner \varphi \wedge \psi\urcorner \in Sat(\mathbf{v}, \mathbf{M}_2)] \leftrightarrow [\varphi \in Sat(\mathbf{v}, \mathbf{M}_2)$ i $\psi \in Sat(\mathbf{v}, \mathbf{M}_2)]$;
(2d) $[\ulcorner \varphi \leftrightarrow \psi\urcorner \in Sat(\mathbf{v}, \mathbf{M}_2)] \leftrightarrow [\varphi \in Sat(\mathbf{v}, \mathbf{M}_2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\psi \in Sat(\mathbf{v}, \mathbf{M}_2)]$;

(3a) formuła: $\exists x_i\, \varphi$, (lub $\exists X_i\, \varphi$, gdzie $\mathbf{ArgJ}_2(X_i) = n$), jest spełniona przez wartościowanie **v** wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje wartościowanie **w** różniące się co najwyżej przypisaniem elementu uniwersum $\mathbf{U}_0$ (lub $\mathbf{U}_n$) dla zmiennej x_i (lub X_i) takie, że formuła φ jest spełniona przez wartościowanie **w**.

Zapisujemy to również inaczej:
$\ulcorner \exists x_i\, \varphi\urcorner \in Sat(\mathbf{v}, \mathbf{M}_2) \leftrightarrow \varphi \in Sat(\mathbf{w}, \mathbf{M}_2)$ dla pewnego $\mathbf{w}/x_i$
lub, w przypadku kwantyfikowanej zmiennej predykatowej:
$\ulcorner \exists X_i\, \varphi\urcorner \in Sat(\mathbf{v}, \mathbf{M}_2) \leftrightarrow \varphi \in Sat(\mathbf{w}, \mathbf{M}_2)$ dla pewnego $\mathbf{w}/X_i$

(3b) formuła: $\forall x_k\, \varphi$ (lub: $\forall X_i\, \varphi$, gdzie $\mathbf{ArgJ}_2(X_i) = n$), jest spełniona przez wartościowanie **v** wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego wartościowania **w** różniącego się co najwyżej przypisaniem elementu uniwersum $\mathbf{U}_0$ (lub $\mathbf{U}_n$) dla zmiennej: x_i (lub X_i), formuła φ jest spełniona przez wartościowanie **w**.

Zapisujemy to również jak następuje:
$\ulcorner \forall x_i\, \varphi\urcorner \in Sat(\mathbf{v}, \mathbf{M}_2) \leftrightarrow \varphi \in Sat(\mathbf{w}, \mathbf{M}_2)$ dla każdego $\mathbf{w}/x_i$
lub, w drugim przypadku:
$\ulcorner \forall X_i\, \varphi\urcorner \in Sat(\mathbf{v}, \mathbf{M}_2) \leftrightarrow \varphi \in Sat(\mathbf{w}, \mathbf{M}_2)$ dla każdego $\mathbf{w}/X_i$

Wprowadzony termin *spełniania* jest podstawą dla pojęć posiadających zasadnicze znaczenie dla porównywania treści zdań z rzeczywistością, o której mówią. Chodzi tu o *prawdę przy danej interpretacji*, *model zdania*, *model zbioru zdań* itd.

Definicja 5

Formuła φ jest prawdziwa przy danej interpretacji $\mathbf{M}_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy φ jest spełniona przez każde wartościowanie **v** określone na zbiorze termów języka $\mathbf{J}_2$ oraz o zbiorze $\mathbf{U}_0$ jako zbiorze wartości. O interpretacji $\mathbf{M}_2$ mówimy wtedy, że jest **modelem formuły** φ.

Nie trudno zauważyć, że jeśli φ jest zdaniem, to jest ono prawdziwe w $\mathbf{M}_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje wartościowanie **v** takie, że: $\varphi \in$ Sat (**v**, $\mathbf{M}_2$). Zbiór wszystkich zdań prawdziwych w $\mathbf{M}_2$ będziemy oznaczać jako: **E** ($\mathbf{M}_2$).

Podobnie jak *model zdania*, określa się pojęcie *modelu zbioru zdań*:

Definicja 6

Dana interpretacja $\mathbf{M}_2$ jest **modelem zbioru zdań Φ** wtedy i tylko wtedy, gdy każde zdanie z tego zbioru jest prawdziwe przy interpretacji $\mathbf{M}_2$.

Równoważnie można, wobec podanych definicji, powiedzieć, że dana interpretacja $\mathbf{M}_2$ jest modelem zbioru zdań Φ wtedy i tylko wtedy, gdy jest modelem każdego zdania będącego elementem zbioru Φ.

Zwróćmy uwagę na to, że do tej pory przedstawiliśmy odniesienie semantyczne nie dla logiki drugiego rzędu $\mathbf{L}_2$ (wprowadzonej wcześniej aksjomatycznie), lecz dla jej języka. Nie przy wszystkich bowiem interpretacjach języka $\mathbf{J}_2$ są prawdziwe wszystkie aksjomaty logiki drugiego rzędu. Natomiast na to, żeby dana interpretacja $\mathbf{M}_2$ była modelem logiki $\mathbf{L}_2$ muszą być spełnione dwa warunki:

(1) wszystkie aksjomaty tej logiki są formułami prawdziwymi w $\mathbf{M}_2$,

(2) reguły dedukcji nie wyprowadzają poza zbiór zdań prawdziwych w $\mathbf{M}_2$, czyli po zastosowaniu dowolnej reguły dowodzenia do dowolnego zdania prawdziwego w $\mathbf{M}_2$ otrzymane zdanie również należy do zbioru zdań prawdziwych w $\mathbf{M}_2$.

Nietrudno, co prawda, wykazać, że wszystkie podstawienia metajęzykowych formuł występujących jako aksjomaty logiki pierwszego rzędu są prawdziwe przy każdej interpretacji języka $\mathbf{J}_2$. Podobnie jest również z aksjomatem ekstensjonalności oraz aksjomatami (RP5) – (RP8), które wyrażają własności kwantyfikatorów określonych na zmiennych predykatywnych. Reguła odrywania oraz reguły generalizacji nie wyprowadzają poza zbiór zdań prawdziwych przy danej interpretacji. Zatem obydwa podane warunki byłyby spełnione dla rachunku predykatów drugiego rzędu z identycznością, gdyby każda interpretacja języka drugiego rzędu była modelem dla wszystkich postulatów definicyjnych (RP9). I tego właśnie nie można powiedzieć o dowolnej interpretacji języka J_2. Rozważmy następujące postulaty definicyjne:

(1) $\exists X\, \forall x\, [X(x) \leftrightarrow (x = x)]$;
(2) $\exists X\, \forall x\, [X(x) \leftrightarrow \sim(x = x)]$;
(3) $\exists X\, [X(x) \leftrightarrow \sim\varphi(x)]$;
(4) $\exists X\, \forall x\, [X(x) \leftrightarrow (\varphi(x) \vee \psi(x))]$;
(5) $\exists X\, \forall x\, [X(x) \leftrightarrow (\varphi(x) \wedge \psi(x))]$.

Ze względu na to, że każdy element uniwersum indywiduowego jest identyczny sam ze sobą należy wnioskować, że prawdziwość zdań (1) oraz (2) przy danej interpretacji wyznacza istnienie zbioru pełnego $\mathbf{U}_0$ oraz zbioru pustego, w uniwersum $\mathbf{U}_1$ odpowiadającej jej struktury relacyjnej. Podobnie, na mocy prawdziwości (3) – (5), wraz ze zbiorami wyznaczonymi przez formuły: φ, ψ do uniwersum $\mathbf{U}_1$ muszą należeć ich dopełnienia do zbioru pełnego $\mathbf{U}_0$, a także teorio-mnogościowe sumy i iloczyny zbiorów wyznaczonych przez φ oraz ψ.

Oznacza to, że postulaty definicyjne wyznaczają ciało zbiorów, a także, że uniwersum relacji jednoargumentowych (zbiorów) musi zawierać w sobie to ciało[13]. Podobnie, prawdziwość (przy interpretacji $\mathbf{M}_2$) zdań:

(6) $\exists X\, \forall x\, \forall y[X(x, y) \leftrightarrow \forall Y\, (Y(x, y) \wedge \sim Y(x, y))]$;
(7) $\exists X\, \forall x\, \forall y[X(x, y) \leftrightarrow \forall Y\, (Y(x, y) \vee \sim Y(x, y))]$;
(8) $\exists X\, [X(x, y) \leftrightarrow \sim\varphi(x, y)]$;
(9) $\exists X\, \forall x\, \forall y\, [X(x, y) \leftrightarrow (\varphi(x, y) \vee \psi(x, y))]$;
(10) $\exists X\, \forall x\, \forall y\, [X(x, y) \leftrightarrow (\varphi(x, y) \wedge \psi(x, y))]$

stanowi o tym, że uniwersum relacji dwuargumentowych również musi zawierać ciało zbiorów wyznaczone przez postulaty definicyjne. Jak nie trudno zauważyć, taki sam warunek trzeba nałożyć na dowolne uniwersum $\mathbf{U}_n$.

Zastanówmy się teraz nad następującym zagadnieniem: czy prawdziwość wszystkich postulatów definicyjnych przy danej interpretacji jest równoważna temu, aby każdy model tej logiki miał jednoznacznie wyznaczone uniwersa $\mathbf{U}_n$ przez zbiór indywiduów?

---

[13] Zob. J. Słupecki, K. Hałkowska, K. Piróg-Rzepecka, *Logika i teoria mnogości*, Warszawa 1978.

Czyli, czy jest zawsze tak, że $\mathbf{U}_n$ jest zbiorem potęgowym iloczynu kartezjańskiego $\mathbf{U}_0^n$ dla $n \in \mathbf{N}$? Okazuje się, że odpowiedź na to pytanie jest na ogół negatywna. Dotyczy to nawet takich przypadków, gdy aksjomaty logiki drugiego rzędu wyznaczają bardzo szeroką klasę rodzin zbiorów lub, mówiąc ogólnie, rodzin relacji o dowolnej ilości argumentów. Załóżmy, że w języku logiki drugiego rzędu dysponujemy nazwami (a_{ij}, gdzie $i, j \in \mathbf{N}$) dla wszystkich indywiduów pewnego jej modelu. Wówczas tezami są zdania o postaci:

$\exists X\ \forall x\ [X(x) \leftrightarrow (x = a_{i1} \vee x = a_{i2} \vee ... \vee x = a_{ik})]$, gdzie $k \in \mathbf{N}$.

Zdania te zapewniają istnienie, w $\mathbf{U}_1$, wszystkich skończonych podzbiorów uniwersum indywiduowego tego modelu, klasa zbiorów definiowalnych w modelu (wyznaczonych przez postulaty definicyjne) jest więc bardzo szeroka. Gdyby ów model miał skończone uniwersum indywiduowe, wówczas każda rodzina podzbiorów $\mathbf{U}_0^n$ miałaby skończoną moc. To z kolei oznacza, że wówczas wszystkie elementy $\mathbf{P}(\mathbf{U}_0^n)$ byłyby definiowalne **w** modelu. Jednak w przypadku, gdy $\mathbf{U}_0$ jest przeliczalne nieskończone, nie zachodzi równość między żadnym ze zbiorów $\mathbf{U}_n$ oraz $\mathbf{P}(\mathbf{U}_0^n)$. Równość każdej z takich par rodzin zbiorów stanowi co prawda warunek wystarczający, ale nie jest on warunkiem koniecznym bycia modelem postulatów definicyjnych, a co za tym idzie – logiki drugiego rzędu.

Analizując pojęcie *modelu logiki* L_2, doszliśmy więc do tego, że najmniejszym ograniczeniem, jakie możemy nałożyć na struktury ogólne jest warunek prawdziwości postulatów definicyjnych. W ten sposób otrzymujemy pojęcie *interpretacji ogólnej* oraz *struktury ogólnej*:

Definicja 7

Interpretacją ogólną logiki drugiego rzędu, $\mathbf{M}_O$, nazwiemy taką interpretację $\mathbf{M}_2$ języka drugiego rzędu, przy której prawdziwe są wszystkie postulaty definicyjne, czyli zdania postaci:

$\exists X\ \forall x_1 ... \forall x_n\ [X_i(x_1, x_2 ... x_n) \leftrightarrow \varphi(x_1 ... x_n)]$.

Strukturę relacyjną odpowiadającą intepretacji ogólnej nazwiemy wówczas **strukturą ogólną i** oznaczać będziemy symbolem $\mathbf{S}_O$. Możemy zatem również napisać: $\mathbf{M}_O = (\mathbf{S}_O, \mathbf{IntJ}_2)$

Na podstawie dotychczasowej analizy wiemy, że klasę interpretacji dla języka $\mathbf{J}_2$ można ograniczyć jeszcze bardziej niż tylko do interpretacji ogólnych, otrzymując również interpretacje logiki drugiego rzędu. Interpretacje należące do tej nowej klasy nazwiemy **interpretacjami głównymi**, a struktury relacyjne im odpowiadające – **strukturami głównymi**. Klasa interpretacji ogólnych jest nadzbiorem klasy interpretacji głównych.

Definicja 8
Strukturą główną nazwiemy taką strukturę S_2, w której wszystkie uniwersa U_n, dla $n \in \mathbf{N}$, są zbiorami potęgowymi o postaci $\mathbf{P}(U_0{}^n)$.

Oznaczając strukturę główną jako S_G, otrzymujemy wówczas definicję interpretacji głównej:
Definicja 9:
Interpretacją główną logiki drugiego rzędu jest uporządkowana para: $\mathbf{M}_G = (S_G, \mathbf{IntJ}_2)$, w której S_G jest strukturą główną, a $\mathbf{IntJ}_2$ jest funkcją interpretującą język drugiego rzędu, $\mathbf{J}_2$.

Wprowadziliśmy w ten sposób podwaliny dwóch różnych semantyk dla logiki drugiego rzędu. Pierwszą z nich nazwiemy **semantyką ogólną**, drugą zaś – **semantyką główną**. W dalszej części pracy pokażemy, że zachodzą zasadnicze różnice pomiędzy logiką $\mathbf{L}_2$ z semantyką ogólną, a logiką $\mathbf{L}_2$ wyznaczoną przez semantykę główną. W tym rozdziale ograniczymy się jednak do wprowadzenia aparatury pojęciowej przydatnej w dalszej części.

Oczywiście pojęcia *spełniania, formuły prawdziwej przy danej interpretacji* i inne wprowadzone wcześniej w odniesieniu do języka, zachowują swe znaczenie. Możemy jednak teraz wprowadzić nowe pojęcia, związane bezpośrednio z daną logiką, a tylko pośrednio z jej językiem. Możemy, na przykład, mówić o logicznej prawdziwości formuły, a w szczególności – zdania. Zbiory wszystkich formuł posiadających cechę logicznej prawdziwości są różne w zależności od tego, czy bierzemy pod uwagę interpretacje ogólne, czy główne. Dlatego też należy odróżnić *logiczną prawdziwość na gruncie interpretacji ogólnych* od *logicznej prawdziwości na gruncie interpretacji głównych*.

Definicja 10
Dana formuła jest **logicznie prawdziwa na gruncie interpretacji ogólnych** wtedy i tylko wtedy, gdy jest prawdziwa przy każdej interpretacji ogólnej $\mathbf{M}_O$.

Definicja 11

Dana formuła jest **logicznie prawdziwa na gruncie interpretacji głównych** wtedy i tylko wtedy, gdy jest prawdziwa przy każdej interpretacji głównej $\mathbf{M}_G$.

Podobnie ma się rzecz również z innymi terminami dotyczącymi nie jednej struktury czy interpretacji, lecz pewnych ich klas. Należy zatem wprowadzić po dwie definicje dla pojęć semantycznej konsekwencji zbioru formuł (zdań) oraz semantycznego wynikania danej formuły (zdania) ze zbioru zdań itd., w zależności od rodzaju interpretacji, który bierzemy pod uwagę. I tak mamy:

Definicja 12

Formuła (zdanie) φ **wynika semantycznie** ze zbioru zdań Φ **na gruncie interpretacji ogólnych** wtedy i tylko wtedy, gdy każdy model M_O zbioru Φ jest również modelem zdania φ.

Wymiennie będziemy wówczas mówić, że φ jest **konsekwencją semantyczną zbioru Φ na gruncie interpretacji ogólnych**, i zapisywać symbolicznie: $\Phi \models_O \varphi$.

Zbiór wszystkich formuł o podanej w definicji 12 własności nazwiemy zbiorem **konsekwencji semantycznych zbioru Φ na gruncie interpretacji ogólnych.**

Definicja 13

Formuła (zdanie) φ **wynika semantycznie** ze zbioru zdań Φ **na gruncie interpretacji głównych** wtedy i tylko wtedy, gdy każdy model $\mathbf{M}_G$ zbioru Φ jest również modelem zdania φ.

Mówimy również wtedy, że φ jest **konsekwencją semantyczną zbioru Φ na gruncie interpretacji głównych**, i zapisujemy: $\Phi \models_G \varphi$.

Zbiór wszystkich formuł o podanej w definicji 13 własności nazywamy **zbiorem konsekwencji semantycznych zbioru Φ na gruncie interpretacji głównych.**

3. SPROWADZENIE LOGIKI L_2 Z SEMANTYKĄ OGÓLNĄ DO LOGIKI PIERWSZEGO RZĘDU

Enderton podaje pewne przekształcenie logiki drugiego rzędu w teorię opartą na logice predykatów pierwszego rzędu[14]. Naszki-

[14] Zob. H. B. Enderton, art. cyt., 277-281.

cujemy to przekształcenie. Dany jest język pierwszego rzędu, który zawiera:

• zmienne i stałe indywiduowe występujące w języku drugiego rzędu,

• kwantyfikatory ogólne i szczegółowe dla zmiennych indywiduowych,

• w miejsce stałych pozalogicznych P_i w języku pierwszego rzędu mamy stałe indywiduowe: b_i;

• $i+1$ – argumentowe stałe predykatywne ε_i;

• dla każdego rodzaju zmiennych, w języku pierwszego rzędu niech istnieje nowa, jednoargumentowa stała predykatywna Q_i: dla zmiennych indywiduowych – Q_0, dla jednoargumentowych zmiennych predykatowych– Q_1, dla dwuargumentowych zmiennych predykatowych – Q_2 itd.

Wówczas można przyporządkować formułom poprawnym języka drugiego rzędu, formuły poprawne języka pierwszego rzędu oraz modelom ogólnym teorii $\mathbf{T}_2$ modele pewnej teorii nadbudowanej nad logiką pierwszego rzędu w ten sposób, aby istniała wzajemna odpowiedniość zdań prawdziwych w modelach.

Oznaczmy funkcję przyporządkowującą formuły jako: **f**. Funkcję tę określamy tak, żeby formułom atomowym języka odpowiadały formuły o możliwie jak najmniej zmienionej postaci. Pewne różnice dotyczą braku stałych P_i, oraz zmiennych X_i, w rozpatrywanym języku pierwszego rzędu. W miejsce stałych P_i wstawiamy symbole: b_i, zaś w miejsce zmiennej pisanej dużą literą X_i wstawiamy zmienną indywiduową, ale taką, która w formule wyjściowej nie występowała.

Aby móc wyróżniać odpowiedniki formuł atomowych języka drugiego rzędu, wprowadza się stałe predykatywne ε_i. Mamy na przykład:

$\mathbf{f}(P_1(x_1, x_2)) = \varepsilon_2(b_1, x_1, x_2)$ oraz

$\mathbf{f}(X_1(x_1)) = \varepsilon_1(x, x_1)$.

Formuły złożone zachowują stałe logiczne. Dla przykładu, jeżeli φ oraz ψ są formułami poprawnymi, to: $\mathbf{f}(\sim\varphi) = \sim\mathbf{f}(\varphi)$, natomiast: $\mathbf{f}(\varphi \wedge \psi) = \mathbf{f}(\varphi) \wedge \mathbf{f}(\psi)$. Zasadnicza różnica występuje tylko w formułach z kwantyfikacją zmiennych. Jako, że stałe Q_i chcemy rozumieć jako odpowiedniki określenia rodzaju zmiennych, muszą one występować w formułach z kwantyfikatorami. Jeśli zmienna X_j jest dwuargumentowa, mamy:

$\mathbf{f}(\forall X_j\, \varphi) = \forall x\, (Q_2(x) \to \mathbf{f}(\varphi))$;

$\mathbf{f}(\exists X_j\, \varphi) = \exists x\, (Q_2(x) \wedge \mathbf{f}(\varphi))$, przy czym w formule: **f** (φ) występuje x wszędzie i tylko w tych miejscach, w których w φ była zmienna X_j.

Oczywiście dla dowolnych stałych rodzaju Q_i postępujemy podobnie.

Podane przekształcenie posiada własności wyrażone w następujących twierdzeniach:

Twierdzenie 1

Dla każdego modelu M_0 teorii T_2 istnieje model M_1 teorii pierwszego rzędu, wyznaczonej przez obrazy aksjomatów względem funkcji f. W modelu tym dowolne zdanie f (φ) jest prawdziwe, wtedy i tylko wtedy gdy odpowiadające mu zdanie φ jest prawdziwe w modelu M_0. W modelu tym zawsze prawdziwe są zdania o istnieniu dla każdej stałej Q_i elementu posiadającego tę własność.

Twierdzenie 2

Istnienie modelu ogólnego teorii T_2 wynika z istnienia modelu M_1 teorii wyznaczonej przez obrazy aksjomatów względem funkcji f, o ile prawdziwe są w nim obrazy (względem funkcji f) wszystkich postulatów definicyjnych.

Powyższe cechy przekształcenia **f** są bardzo przydatne do badania niektórych własności formalnych teorii drugiego rzędu z semantyką ogólną. Pozwalają one, co zobaczymy w następnych rozdziałach, przerzucić ciężar badania istnienia modeli na teorie pierwszego rzędu. Własności tych teorii były gruntownie przeanalizowane i zostały bardzo dobrze poznane w ramach badań metalogicznych oraz matematycznych.

4. KATEGORYCZNOŚĆ NIEKTÓRYCH TEORII NADBUDOWANYCH NAD LOGIKĄ L_2

Pojęcie kategoryczności danej teorii, jak wszystkie, które omawiane będą w niniejszym paragrafie, związane jest z jej modelami. Bez względu na to nad jaką logiką teoria jest nadbudowana, można kategoryczność określić, odwołując się do izomorficzności pewnych struktur relacyjnych, następująco:

Definicja 14

Dana teoria jest **kategoryczna**, gdy wszystkie jej modele są izomorficzne.

Rachunek predykatów pierwszego rzędu był wnikliwie badany i sformułowano w związku z tym wiele twierdzeń opisujących własności tej logiki. Wiemy, na przykład, że każda niesprzeczna teoria pierwszego rzędu ma model oraz że zbiór wszystkich zdań prawdziwych przy danej interpretacji pierwszego rzędu jest niesprzeczny i semantycznie zupełny. Znana jest również własność niekategoryczności teorii pierwszego rzędu (o przeliczalnym zbiorze aksjomatów) posiadających model nieskończony (czyli o nieskończonej liczbie indywiduów w uniwersum). Wynika to z następującego twierdzenia:

Twierdzenie 3

Jeśli dana teoria, oparta na logice pierwszego rzędu z identycznością, ma model nieskończony, to ma też modele o uniwersach dowolnie wysokiej mocy.

Wiedząc zatem, że warunkiem koniecznym izomorficzności modeli jest równoliczność ich uniwersów wnioskujemy od razu, że zawsze w takiej sytuacji istnieją modele nieizomorficzne. Zatem żadna teoria podanego typu nie jest kategoryczna.

Logika pierwszego rzędu posiada też własność wyrażoną w twierdzeniu 4:

Twierdzenie 4 (Löwenheima – Skolema dla $\mathbf{L}_1$ z identycznością):

Jeśli dana teoria oparta na logice pierwszego rzędu z identycznością ma model, to ma też model przeliczalny.

Dla logiki drugiego rzędu z semantyką ogólną formułuje się odpowiednik twierdzenia Löwenheima – Skolema:

Twierdzenie 5

Jeśli dana teoria drugiego rzędu $\mathbf{T}_2$ ma model ogólny, to ma też przeliczalny model ogólny.

Dowód

W dowodzie twierdzenia 5 sformułowanym przez Endertona wykorzystuje się wspomniane wcześniej przekształcenie logiki drugiego rzędu:

Załóżmy że dana teoria $\mathbf{T}_2$ ma model ogólny. Wówczas można go przekształcić w model odpowiadającej jej teorii pierwszego rzędu z identycznością $\mathbf{T}_1$. Ponieważ teoria $\mathbf{T}_1$ ma model, to na podstawie twierdzenia 4, $\mathbf{T}_1$ ma przeliczalny model. Jako, że teoria $\mathbf{T}_1$ posiada jako aksjomaty odpowiedniki aksjomatów logiki drugiego rzędu, ten przeliczalny model można przekształcić w model ogólny teorii T_2. Pozostaje jedynie wykazać, że uniwersum indywiduowe tego modelu jest zbiorem przeliczalnym. Należy odnotować, że zbiór ten składa się z tych elementów, którym przysługuje własność Q_1. Stanowią one jednak podzbiór przeliczalnego zbioru będącego uniwersum modelu teorii T_1, zatem tworzą zbiór przeliczalny. Wykazaliśmy więc, że otrzymany model ogólny jest modelem przeliczalnym teorii T_2.

Twierdzenie 5 można wykorzystać do wykazania niekategoryczności na gruncie semantyki ogólnej pewnych teorii drugiego rzędu. Niech bowiem dana teoria ma model ogólny nieprzeliczalny. Znaczy to między innymi tyle, że ma ona jakiś model ogólny. Na podstawie twierdzenia Löwenheima-Skolema ma więc ona również przeliczalny model ogólny. Zatem istnieją modele ogólne tej teorii, które mają różne moce, a więc nie są izomorficzne. Z definicji teorii kategorycznych wiemy natomiast, że teoria posiadająca model nieprzeliczalny, nie jest kategoryczna. Nie można jednak na podstawie tego samego twierdzenia stwierdzić nie-kategoryczności teorii, o których wiemy jedynie, że mają ogólny model nieskończony przeliczalny. Można co prawda odwołać się do odpowiedniej teorii pierwszego rzędu. Wówczas ze względu na istnienie jej modelu nieskończonego wiemy na podstawie twierdzenia 3 o tym, że ma ona modele dowolnej nieskończonej mocy. Dla każdego z nich istnieje model wyjściowej teorii drugiego rzędu, jednak o mocy tego modelu wiemy tylko tyle, że jest ona nie większa od mocy modelu teorii pierwszego rzędu. Może się zatem zdarzyć tak, że wszystkie modele teorii drugiego rzędu będą miały wszystkie uniwersa przeliczalne, i wówczas nie możemy jeszcze powiedzieć, że wyjściowa teoria ma modele nie-izomorficzne. Nie znaczy to, co prawda, że muszą one być izomorficzne tylko, że nie możemy, na tej podstawie co poprzednio, wykazać braku przekształcenia będącego izomorfizmem.

Przykładem nie-kategorycznej teorii drugiego rzędu posiadającej nieizomorficzne przeliczalne modele ogólne jest nieelementarna Peanowska arytmetyka liczb naturalnych z aksjomatem indukcji wyrażonym w języku drugiego rzędu. Teoria ta nadbudowana jest nad logiką T_2 z identycznością, a jej aksjomatami specyficznymi są następujące zdania:

(N1) $\forall x \sim (0 = S(x))$,

(N2) $\forall x \forall y (S(x) = S(y) \rightarrow x = y)$,

(N3) $\forall X [X(0) \wedge \forall x (X(x) \rightarrow X(S(x)) \rightarrow \forall x X(x)]$.

Modelem teorii Peano jest oczywiście interpretacja, w której uniwersum indywiduów jest zbiorem liczb naturalnych **N**, symbolowi „0" przyporządkowujemy liczbę zero, a symbolowi „S"– relację R= {(k, k+1): k∈**N** ∪ {0}}, czyli relację następnika liczb naturalnych. Zakładamy również, że wszystkie uniwersa poza idywiduowym są takie, aby interpretacja była interpretacją ogólną, a przy tym żeby nie była główną. Aby dowieść, że taka interpretacja istnieje, wystarczy za uniwersa $\mathbf{U}_n$ przyjąć najmniejsze rodziny relacji n-argumentowych istniejących na mocy postulatów definicyjnych. Jak już wcześniej mówiliśmy, uniwersa takie są zbiorami przeliczalnymi, ponieważ formuł wyznaczających relacje jest przeliczalnie wiele.

Bardzo łatwo jest w takiej sytuacji znaleźć model, który nie jest izomorficzny z wyżej określonym. Aby go otrzymać wystarczy przekształcić model już podany w model główny, czyli poszerzyć uniwersa relacyjne do zbiorów potęgowych postaci **P** ($\mathbf{N}^n$) (gdzie n ∈ N). Obydwa modele są nie-izomorficzne, ponieważ ich izomorficzność pociągałaby równoliczność odpowiednich uniwersów. Wiadomo jednak, że w tej sytuacji uniwersa relacyjne drugiego modelu są nieprzeliczalne jako rodziny wszystkich podzbiorów zbiorów $\mathbf{N}^n$. Odpowiadające im uniwersa modelu pierwszego są natomiast zbiorami przeliczalnymi. Wiemy zatem, że nieelementarna Peanowska arytmetyka liczb naturalnych nie jest teorią kategoryczną, jeśli bierzemy pod uwagę semantykę ogólną.

Zastanówmy się teraz nad modelami głównymi tej teorii. Wiele podręczników podaje dowód twierdzenia, że wszystkie interpretacje główne, przy których prawdziwe są aksjomaty (N1) – (N3), są izomorficzne z modelem podanym przez nas jako drugi. Polega on na tym, że wskazuje się funkcję przekształcającą elementy jednej struktury relacyjnej w drugą w taki sposób, aby zachowywała ona odpowiednie elementy wyróżnione. Następnie dowodzi się, że funkcja ta jest izomorfizmem obydwu struktur (interpretacji). Oznaczmy opisany już model jako $\mathbf{M}_G = (\mathbf{S}_G, \mathbf{IntJ}_2)$, a dowolny inny jako $\mathbf{M'}_G = (\mathbf{S'}_G, \mathbf{Int'J}_2)$. W strukturze $\mathbf{S}_G$ uniwersum indywiduowym jest zbiór liczb naturalnych **N**, zaś elementami wyróżnionymi – liczba 0 oraz relacja R. W $\mathbf{S'}_G$ niech to będą odpowiednio: uniwersum $\mathbf{U}_0$, dowolny element tego zbioru – u_0, a także relacja dwuargumentowa R' zawarta w $\mathbf{U}_0^2$. Przekształcenie f struktur określa się na uniwersum liczb naturalnych. Co prawda, powinno być ono określone również na wszystkich uniwersach typu **P** ($\mathbf{N}^n$), można się jednak ograniczyć do rozpatrywania funkcji na tym jednym zbiorze ze względu na łatwość i oczywistość rozszerzenia jej na pozostałe uniwersa. Przekształcenie f ma zatem następującą postać: f (0) = u_0, f (R (k)) = R' (f (k)) dla dowolnej liczby naturalnej k. W ten sposób funkcja ta przekształca liczbę 1 w następnik elementu u_0, liczbę 2 w następnik następnika u_0 itd. Aby pokazać, że jest ono izomorfizmem potrzeba i wystarczy wykazać trzy cechy: homomorfizm, różnowartościowość oraz wypełnienie całego zbioru $\mathbf{U}_0$ przez obrazy elementów uniwersum **N** względem funkcji f. To, że f jest homomorfizmem, wynika ze sposobu jej zdefiniowania. Natomiast wykazanie pozostałych dwóch cech jest nietrywialne i podstawową rolę odgrywa tu aksjomat indukcji (N3) oraz fakt, że dysponujemy w modelu $\mathbf{M'}_G = (\mathbf{S'}_G, \mathbf{Int'J}_2)$ rodziną wszystkich podzbiorów $\mathbf{U}_0$.

Chcąc np. udowodnić, że f ma trzecią z wymienionych cech (czyli że jest na $\mathbf{U}_0$), konstruujemy zbiór V: V = {u: ∃k (u = f (k))}. Jest to podzbiór uniwersum $\mathbf{U}_0$, zatem jest elementem rodziny **P** ($\mathbf{U}_0$). Można więc zastosować do niego aksjomat indukcji (N3). Prawdziwy jest dla V poprzednik implikacji występującej w aksjomacie (N3), ponieważ 0 jest elementem V oraz wraz z przynależnością do zbioru V jakiegoś elementu, należy też do niego następnik tego elementu. Prawdziwy jest zatem następnik tej implikacji, a to znaczy, że każdy element $\mathbf{U}_0$ jest elementem zbioru V.

Analogicznie udowadnia się różnowartościowość przekształcenia funkcji f. W tym przypadku bierzemy pod uwagę inny podzbiór uniwersum indywiduowego, podzbiór złożony ze wszystkich indywiduów, na którym funkcja f jest różnowartościowa.

Podany przykład teorii Peano uwidacznia, jak bardzo ważne jest założenie, aby zakresem zmienności zmiennych predykatywnych były rodziny wszystkich podzbiorów, czy relacji określonych na uniwersum indywiduowym. Założenie to w istotny sposób zmienia omawianą własność teorii nadbudowanych nad logiką drugiego rzędu. Widzimy też, że można w ten sposób na gruncie logiki drugiego rzędu definiować zbiory przeliczalne nieskończone. Daje to nawet większą możliwość, ponieważ w powyższy sposób określiliśmy zbiór liczb naturalnych (oczywiście z dokładnością do izomorfizmu). Zbiór liczb wymiernych nie może być uniwersum indywiduów modelu aksjomatów (N1) – (N3), ponieważ nie jest wówczas prawdziwy aksjomat indukcji. Biorąc natomiast pod uwagę semantykę ogólną, na gruncie powyższej teorii nie można odróżnić zbioru liczb naturalnych od np. zbioru liczb wymiernych bez ujemnych liczb całkowitych. Podobnie, co demonstruje twierdzenie Löwenheima-Skolema, nie ma teorii drugiego rzędu, która poprzez interpretacje ogólne wyznaczałaby tylko te zbiory indywiduów, które mają moc nieprzeliczalną. Jest to możliwe natomiast w przypadku semantyki głównej. I tak jak poprzednio definiuje się w ten sposób zbiory konkretnego typu. Za przykład może posłużyć teoria, której aksjomaty specyficzne wyznaczają twory algebraiczne izomorficzne z ciałem liczb rzeczywistych. Tworzymy ją, dodając do aksjomatów logiki drugiego rzędu z identycznością zdania określające **ciała algebraiczne** (ciała) oraz jedno zdanie sformułowane w języku drugiego rzędu – zwane aksjomatem ciągłości. Na grupę aksjomatów definiujących ciało składają się takie zdania, które określają znaczenie działań dodawania (+) i mnożenia (·) oraz określają własności liczb 0 oraz 1 jako elementów neutralnych względem, odpowiednio, działania dodawania oraz mnożenia. Tak więc dla dodawania i mnożenia mamy aksjomaty stwierdzające cechy przemienności, łączności, rozdzielności mnożenia względem dodawania i istnienia, dla dowolnego elementu uniwersum indywiduów, elementu do niego przeciwnego oraz odwrotnego (gdy jest on różny od 0). O elementach oznaczanych jako „0" oraz „1" wiemy jeszcze, że w wyniku dodawania 0 do dowolnej liczby otrzymujemy tę liczbę, i że tak samo jest z mnożeniem dowolnej liczby przez 1. Własności te, jak powiedzieliśmy, definiują ciało algebraiczne. Jednak struktury relacyjne wyznaczone w ten sposób mogą się bardzo różnić. Wystarczy powiedzieć, że ich uniwersa indywiduowe mogą być zbiorami skończonymi, nieskończonymi przeliczalnymi, a także nieprzeliczalnie nieskończonymi. Możemy jednak dołożyć do opisanych aksjomatów pewne zdanie drugiego rzędu, zawężając znacznie klasę modeli głównych otrzymanej teorii. Zdanie to nosi nazwę aksjomatu ciągłości. Wiedząc, że znaczenie predykatu większości, „>", w powyższym systemie można wprowadzić za pomocą definicji, zapiszemy aksjomat ciągłości w sposób następujący[15]:

(AC) $\forall X\ [(\exists x\ X(x)) \wedge \exists y\ \forall x\ X(x) \rightarrow (x > y)) \rightarrow \exists y\ \forall z\ (z>y \leftrightarrow \exists x\ (X(x) \wedge z > x)]$.

[15] Zob. A. Tarski, *Pisma logiczno-filozoficzne*, t. 2: *Metalogika*, Warszawa 2001, 245.

Okazuje się, że każdy model główny takiej teorii jest izomorficzny z interpretacją, której struktura główna ma postać:
$S_G = < \mathbf{R}, \{\mathbf{P}(\mathbf{R}^n): n \in \mathbf{N}\}, \{0, 1\}, \{+, \cdot, >\}>$.
Oczywiste powinno być, w jaki sposób w tej strukturze określamy funkcję interpretującą, na wszelki wypadek podamy jednak, że: $\mathbf{IntJ}_2(0) = 0$, $\mathbf{IntJ}_2(1) = 1$, $\mathbf{IntJ}_2(+) = +$, $\mathbf{IntJ}_2(\cdot) = \cdot$, $\mathbf{IntJ}_2(>) = >$.
Analizą problemu kategoryczności między innymi powyższej teorii zajmowali się matematycy w ramach badań podpadających pod takie działy matematyki, jak *algebra* oraz *analiza matematyczna*. Szerokie omówienie kategoryczności przedstawionego zbioru zdań można znaleźć w pozycji W. Kleinera, a także G. M. Fichtencholza[16]. My ograniczymy się tutaj do paru informacji. W dowodzie, aczkolwiek trudniejszym od poprzedniego, wykorzystuje się ten sam schemat. Wprowadzamy pewną funkcję na zbiorze liczb rzeczywistych tak, aby była homomorfizmem, tzn. aby zachowywała indywidua wyróżnione oraz wyróżnione relacje i działania. Następnie pokazuje się, że jest ona różnowartościowa oraz „na" uniwersum indywiduowe w drugim, dowolnym modelu danej teorii. W wykazaniu tego wagę podstawową ma, podobnie jak w arytmetyce liczb naturalnych, aksjomat sformułowany w języku drugiego rzędu (tutaj: aksjomat ciągłości) oraz fakt, że w strukturach algebraicznych dysponujemy każdym podzbiorem uniwersum indywiduów.

5. TWIERDZENIE O ZWARTOŚCI DLA LOGIKI L_2

Dla logiki pierwszego rzędu formułuje się następujące twierdzenie:

Twierdzenie 6 (o zwartości dla logiki pierwszego rzędu):

Jeśli każdy skończony podzbiór zbioru aksjomatów danej teorii pierwszego rzędu T_1 ma model, to model ma również teoria T_1.

Dla logiki drugiego rzędu można sformułować odpowiednik twierdzenia o zwartości dla $\mathbf{L}_1$:

Twierdzenie 7 (o zwartości dla logiki drugiego rzędu):

Jeśli każdy skończony podzbiór aksjomatów teorii drugiego rzędu T_2 ma model ogólny, to teoria T_2 również ma model ogólny.

---

[16] Zob. W. Kleiner, *Analiza matematyczna*, t. 1, Warszawa 1986, 69-70; G. Fichtenholz, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, t. 1, Warszawa 1985, 16-32.

Dowód

Załóżmy, że mamy daną teorię T_2 spełniającą założenia powyższego twierdzenia o zwartości. Wiemy zatem, że każdy skończony podzbiór jej aksjomatów ma model ogólny. Dla każdego modelu ogólnego teorii drugiego rzędu istnieje model odpowiadającej jej teorii pierwszego rzędu, otrzymanej za pomocą przekształcenia **f**. Wnioskujemy zatem, że teoria pierwszego rzędu T_1 otrzymana poprzez przekształcenie **f** aksjomatów teorii T_2, spełnia założenia twierdzenia o zwartości, sformułowanego dla logiki pierwszego rzędu. Skoro zatem wiemy, że każdy skończony podzbiór aksjomatów teorii T_1 ma model, to wiemy również, że ona sama też ma model. Na mocy twierdzenia 2, istnieje więc model ogólny teorii drugiego rzędu, będącej przeciwobrazem zbioru zdań T_1 przy przekształceniu **f**. Jako, że tym przeciwobrazem jest T_2, zatem teoria ta ma model ogólny.

Twierdzenie to dotyczy semantyki ogólnej, nie obowiązuje natomiast, gdy weźmiemy pod uwagę semantykę główną dla logiki L_2. Można bowiem podać przykłady teorii drugiego rzędu o nieskończonej liczbie aksjomatów specyficznych, których każdy skończony podzbiór ma model główny, podczas gdy wyjściowa teoria nie posiada modelu głównego. Jeden z tego typu przykładów stanowi teoria o nieskończonej liczbie aksjomatów (B_n) oraz dodatkowo aksjomacie (B), gdzie:

(B_n) $\exists x_1 \exists x_2 ... \exists x_n [\sim(x_1 = x_2) \wedge \sim(x_1 = x_3) \wedge ... \wedge \sim(x_1 = x_n) \wedge \sim(x_2 = x_3) \wedge ... \wedge \sim(x_2 = x_n) \wedge ... \wedge \sim(x_{n-1} = x_n)]$, gdzie $n \in \mathbf{N}$

oraz

(B) $\sim\{\exists X \forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 [(X(x_1, x_2) \vee X(x_2, x_1)) \wedge (X(x_1, x_2) \to \sim X(x_2, x_1)) \wedge [X(x_1, x_2) \wedge X(x_2, x_3) \to X(x_1, x_3))] \wedge \sim X(x_1, x_3) \wedge (\exists x_4 X(x_1, x_4)]\}$.

W każdym zdaniu typu (B_n) stwierdza się istnienie w uniwersum indywiduowym co najmniej n różnych elementów. Modele teorii w której znajduje się nieskończenie wiele takich zdań muszą zatem być modelami nieskończonymi (tj. o nieskończonym uniwersum indywiduowym). W zdaniu (B) natomiast mowa jest o nieistnieniu w uniwersum relacji dwuargumentowych relacji porządku liniowego określonego na nieskończenie wielu indywiduach.

Zauważmy, że w modelu głównym o nieskończonym uniwersum indywiduów mamy również relację liniowego porządku określoną na nieskończonej liczbie indywiduów. Dysponujemy bowiem wszystkimi dwuargumentowymi relacjami zawartymi w U_0^2. Modele główne teorii o aksjomatach specyficznych (B_n) $(n \in \mathbf{N})$, są zatem również modelami negacji zdania (B). Żaden model główny logiki drugiego rzędu nie jest więc modelem podanej teorii. Natomiast każda teoria, której aksjomaty specyficzne tworzą skończony podzbiór zdań składających się na $\mathbf{T}_2$, posiada model. W ramach uzasadnienia zauważmy, że są cztery możliwe postaci teorii:

(1) Nie ma w niej żadnych aksjomatów specyficznych.

(2) Dodatkowymi aksjomatami są tylko zdania typu (B_n) i jest ich skończona ilość.

(3) Jedynym aksjomatem specyficznym jest zdanie (B).

(4) Wśród aksjomatów specyficznych znajdują się zdania typu (B_n) (skończona ilość) i zdanie (B).

Ad 1) Teoria taka jest po prostu logiką drugiego rzędu. Zatem ma modele główne.

Ad 2) W takim przypadku, wśród tych aksjomatów istnieje zdanie o największym indeksie n_0. Ma ono oczywiście modele główne, wystarczy bowiem, żeby odpowiadające interpretacjom struktury główne miały w uniwersum co najmniej n_0 różnych elementów. Interpretacje takie są wówczas również modelami głównymi pozostałych zdań tego typu znajdujących się w teorii.

Ad 3) Aby dana interpretacja główna była modelem formuły (B) wystarczy, aby uniwersum odpowiadającej jej struktury miało moc skończoną. Na żadnym bowiem zbiorze skończonym nie można określić relacji dotyczącej nieskończonej ilości różnych elementów. Zatem (B) jest wówczas prawdziwe.

Ad 4) Przypadek ten można uznać za połączenie przypadków (2) oraz (3). Teoria o której mowa ma bowiem postać $\mathbf{T}_2 = \{B, B_{n1}, B_{n2} ... B_{nk}\}$. Wówczas zbiór zdań: $\{B_{n1}, B_{n2}, ..., B_{nk}\}$ należy do drugiego z rozważanych przypadków. Zatem ma on modele główne. Wśród nich znajdują się i takie, których indywiduowe uniwersa mają moc skończoną, jak i te o nieskończonej mocy zbioru. Modele skończone tej teorii są również modelami głównymi zdania (B) na mocy przypadku trzeciego.

Okazuje się zatem, że powyższa teoria nie ma modelu głównego, ale każdy z jej skończonych podzbiorów ma tego typu modele. Oznacza to, że na gruncie semantyki głównej nie obowiązuje twierdzenie o zwartości.

Wartość powyższego twierdzenia wydaje się mieć źródło w charakterze pomocniczym względem dwóch innych problemów:

- istnienia modelu niesprzecznej teorii nadbudowanej nad danym systemem;
- definiowalności zbiorów i relacji wewnątrz struktury relacyjnej.

Pierwsze z tych zagadnień można powiązać z ogólnymi założeniami i poglądami na temat tego, co nas otacza. Otóż, mówiąc obrazowo, zakłada się, że rzeczywistość nas otaczająca jest niesprzeczna. Na rzeczywistość, o której mówią systemy formalne przedstawiane w pracy, składają się pewne typy struktur relacyjnych. Dodając do aksjomatów danej logiki dodatkowe zdania, ograniczamy tym samym rzeczywistość do takich interpretacji, w jakich prawdziwe są dodatkowe wyróżnione zdania. Na podstawie twierdzeń wiemy, że zbiór zdań prawdziwych w danym modelu jest niesprzeczny[17]. Ponieważ zbiór jej twierdzeń zawiera się w niesprzecznym zbiorze zdań prawdziwych w tym modelu, zatem wiemy również, że teoria posiadająca model jest niesprzeczna. Ujmując to inaczej, jeśli danej wypowiedzi odpowiada pewna rzeczywistość, to wypowiedź ta nie zawiera sprzeczności. Czy zawsze zachodzi jednak relacja w przeciwnym kierunku? Czy jest zawsze tak, iż każda niesprzeczna wypowiedź dotyczy pewnej rzeczywistości? Przenosząc ten problem na język potoczny i to co można w nim wyrazić, odpowiedź na powyższe pytanie jest różna w zależności od tego, co uważamy za rzeczywiste. Możemy bowiem wyrazić własne odczucia, pewne swoje wyobrażenia, poglądy na jakiś temat itd. Ale czy należą one do rzeczywistości?

Przejdźmy jednak do języków formalnych. Podstawowe systemy takie, jak klasyczny rachunek zdań oraz rachunek predykatów pierwszego rzędu mają tę własność, że każda niesprzeczna teoria nadbudowana nad nimi posiada model. To samo można powiedzieć o teoriach drugiego rzędu rozpatrywanych na gruncie semantyki

[17] Niesprzeczność zbioru zdań prawdziwych w modelu danej logiki zagwarantowana jest przez definicje spełniania i prawdziwości. Czyli być może w sposób sztuczny, ale jednak odpowiadający intuicji lub chęci, aby w ogóle rzeczywistość była niesprzeczna. Poza tym, gdyby przy danej interpretacji prawdziwe było jakieś zdanie oraz jego negacja, wówczas (ze względu na prawdziwość dowolnego podstawienia schematu) prawdziwe byłoby przy niej dowolne zdanie danego języka. Nie mielibyśmy więc odróżnienia między prawdą, a fałszem, bo wszystkie zdania byłyby prawdziwe. Przypadek taki, dając pod względem prawdziwości cały zestaw informacji, nie dawałby, z drugiej strony, żadnej.

ogólnej. Wyjaśnienia wymaga ostatni z wymienionych systemów, jako że leży on w centrum naszego zainteresowania. Przeprowadzimy je, posługując się znowu przedstawionym w niniejszej pracy sprowadzeniem logiki drugiego rzędu do logiki pierwszego rzędu. Załóżmy więc, że dana teoria $\mathbf{T}_2$ jest niesprzeczna, czyli dla żadnej formuły φ (w szczególności – zdania) nie jest tak, że: $\mathbf{T}_2 \vdash (\varphi \wedge \sim\varphi)$[18]. Wówczas dzięki przekształceniu **f** języka drugiego rzędu $\mathbf{J}_2$ w język $\mathbf{J}_1$ przekształcamy również teorię $\mathbf{T}_2$ w pewną niesprzeczną teorię $\mathbf{T}_1$. Na mocy twierdzenia Gödla o pełności dla rachunku predykatów pierwszego rzędu sformułowanego i udowodnionego przez tego matematyka, wiadome jest, że każda niesprzeczna teoria pierwszego rzędu ma model. Zatem $\mathbf{T}_1$ ma model $\mathbf{M}_1$. W takim razie, na mocy twierdzenia 1 i twierdzenia 2, istnieje interpretacja $\mathbf{M}_2$ o tych samych zdaniach prawdziwych, z dokładnością do przekształcenia **f**, co w danej interpretacji pierwszego rzędu. Jest ona oczywiście modelem teorii $\mathbf{T}_2$. Pokazaliśmy zatem, że niesprzeczna teoria $\mathbf{T}_2$ ma model. Zatem jako końcowy wniosek otrzymujemy:

Twierdzenie 8

Jeśli dana teoria drugiego rzędu $\mathbf{T}_2$ jest niesprzeczna, to $\mathbf{T}_2$ ma model ogólny.

Powyższej własności nie ma jednak logika rozpatrywana na gruncie semantyki głównej. Wykażemy to, rozpatrując ponownie przykład podany w niniejszym paragrafie. Pokazaliśmy, że teoria określona przez zbiór aksjomatów: $\{B\} \cup \{B_n\colon n \in \mathbf{N}\}$ nie ma modelu głównego. Wiemy również, że posiada ona model ogólny. Istnienie modelu ogólnego dla powyższego zbioru zdań jest zagwarantowane na mocy twierdzenia o zwartości dla semantyki ogólnej. Skoro zatem teoria ma model ogólny, to zbiór jej twierdzeń zawarty jest w zbiorze zdań prawdziwych w tym modelu. Zbiór zdań prawdziwych w modelu jest z kolei niesprzeczny, zatem dowolny jego podzbiór również. Wynika stąd zatem, że zbiór: $\{B\} \cup \{B_n\colon n \in \mathbf{N}\}$ jest niesprzeczny, ale nie ma modelu głównego. Uogólniając wniosek, można powiedzieć, że niesprzeczność teorii drugiego rzędu nie pociąga istnienia dla niej modelu głównego, aczkolwiek model ogólny dla takiej teorii istnieje.

[18] Własność niesprzeczności (syntaktycznej) podana w powyższy sposób jest równoważna zwykłemu rozumieniu tego pojęcia, tzn. że dla żadnej formuły nie jest tak, aby ona oraz jej negacja były dowodliwe na gruncie danego systemu.

Dotychczas podane argumenty można uznać za jednostronną chęć przekonania o bliskości L_2 z semantyką ogólną z logiką pierwszego rzędu. Mógłby o tym świadczyć już sam fakt sprowadzenia języka drugiego rzędu do języka pierwszego rzędu wraz z zachowaniem pewnych zależności między odpowiednimi modelami. Jednak nie znaczy to, że można utożsamiać obydwa systemy. Istnieją bowiem pewne różnice pomiędzy L_2 z semantyką ogólną, a logiką pierwszego rzędu. Jedną z nich, bardzo interesującą podaje G. Boolos[19]. Co prawda, autor formułuje swój argument w ramach rozróżnienia L_2 z semantyką główną od rachunku predykatów pierwszego rzędu, jednak można go przedstawić również w związku z semantyką ogólną logiki drugiego rzędu. Otóż, teorię mnogości można przedstawić jako pewną teorię pierwszego rzędu, nie można jej jednak uznać za teorię drugiego rzędu. Stwierdzenie to, jak się zdaje, należy rozumieć tak, że teoria mnogości traktowana jako teoria nadbudowana nad L_1 ma model, a jako teoria drugiego rzędu – nie. Na gruncie semantyki, ogólnej można to ująć nieco inaczej. Mianowicie: można w sposób niesprzeczny nadbudować teorię mnogości nad logiką pierwszego rzędu, ale nie nad logiką drugiego rzędu. Aksjomatyka Zermelo – Fraenkla jest potwierdzeniem możliwości traktowania teorii mnogości jako jednej z niesprzecznych teorii pierwszego rzędu. Jeśli natomiast chcielibyśmy uznać jakąkolwiek aksjomatykę teorii mnogości sformułowaną w języku drugiego rzędu za nadbudowę nad logiką L_2, to musielibyśmy się również pogodzić z tym, że byłaby to teoria sprzeczna. Wiadomo bowiem, że na gruncie teorii mnogości, prawdziwe jest zdanie stwierdzające nieistnienie zbioru wszystkich zbiorów. Gdyby można było traktować teorię mnogości jako teorię drugiego rzędu, wówczas zbiory, zdaniem Boolosa, musiałyby należeć do uniwersów U_0 modeli tej teorii. Istnienie zbioru pełnego jest natomiast zagwarantowane poprzez postulaty definicyjne. Nie ma zatem znaczenia, którą z rozpatrywanych semantyk obierzemy, i tak dochodzimy do sprzeczności, chcąc mówić na gruncie L_2 o teorii mnogości. Oznacza to, że teoria mnogości traktowana jako teoria drugiego rzędu nie miałaby modelu ogólnego. Wiemy natomiast, że nieistnienie modelu ogólnego danej teorii drugiego rzędu implikuje jej sprzeczność.

---

[19] Zob. G. S. Boolos, *O logice drugiego rzędu*, w: *Filozofia logiki*, tłum. z ang. C. Cieśliński, A. Sierszulska, Warszawa 1997.

Teoria mnogości nie jest zresztą jedyną teorią, która traktowana jako teoria pierwszego rzędu jest niesprzeczna, a jako teoria drugiego rzędu jest teorią sprzeczną na gruncie semantyki ogólnej. Wystarczy, aby któraś z jej tez była sprzeczna z jakimś postulatem definicyjnym. Wniosek ten nie koliduje jednak z przedstawionym przez Endertona sprowadzeniem logiki drugiego rzędu, ponieważ przekształcenie przez nas podane odwzorowywało $\mathbf{L}_2$ w pewną teorię nadbudowaną nad $\mathbf{L}_1$, a nie w samą logikę.

Wspominaliśmy, że na gruncie semantyki głównej również nie można mówić o teorii mnogości. Nie musi jednak chodzić tutaj o to, że jako teoria drugiego rzędu jest ona sprzeczna, a jako teoria pierwszego rzędu – niesprzeczna. Na gruncie semantyki głównej nie mamy takiego związku między teoriami nie posiadającymi modelu, a teoriami sprzecznymi, jak było to poprzednio. Przyczynami takiej różnicy są, według Boolosa, inne założenia logik drugiego i pierwszego rzędu. Otóż, w logice pierwszego rzędu można mówić o obiektach, nie zakładając istnienia zbioru złożonego z nich wszystkich, podczas gdy nie ma takiej możliwości w odniesieniu do logiki drugiego rzędu.

Innym z zagadnień, do których można odnieść twierdzenie o zwartości dla logiki drugiego rzędu z semantyką ogólną, jest problem definiowalności pewnych relacji wewnątrz danej struktury relacyjnej. Przypomnijmy, że pojęcie interpretacji ogólnej dla logiki drugiego rzędu wprowadziliśmy, ograniczając zakres pojęcia interpretacji drugiego rzędu do takich, w jakich prawdziwe są wszystkie postulaty definicyjne, czyli zdania postaci:

$\exists X \forall x_1 ... \forall x_n [X (x_1, x_2 ... x_n) \leftrightarrow \varphi(x_1 ... x_n)]$, gdzie jest dowolną formułą ze zmiennymi wolnymi: $x_1, x_2, ..., x_n$ i bez wolnych wystąpień innych zmiennych.

Powiemy wówczas, że dana relacja n-argumentowa jest definiowalna wewnątrz danej struktury relacyjnej drugiego rzędu, gdy jej istnienie zagwarantowane jest przez pewien postulat definicyjny. W przeciwnym przypadku będziemy mówić, że relacja ta nie jest definiowalna wewnątrz struktury relacyjnej (lub, gdy wiadomo o jakim rodzaju definiowalności mowa, że nie jest definiowalna). Zauważyliśmy wcześniej, że w strukturze o nieskończonej mocy uniwersum indywiduowego, nie wszystkie relacje o jakiejkolwiek ustalonej liczbie argumentów są definiowalne. Wynika to z faktu przeliczalności postulatów definicyjnych i nieprzeliczalności zbiorów potęgowych $\mathbf{P}(U_0^n)$, gdzie $n \in \mathbf{N}$. Natomiast, chcąc uzasadnić niedefiniowalność poprzez postulaty definicyjne konkretnego typu relacji, odwoływaliśmy się do intuicji związanej z wiedzą matematyczną. Uznaliśmy bowiem za pewnik intuicyjnie oczywisty, że relacji liniowego porządku określonej na nieskończonej liczbie elementów nie jesteśmy w stanie zdefiniować za pomocą predykatu identyczności. Dzięki twierdzeniu o zwartości dla semantyki ogólnej możemy podać inne, bardziej formalne, uzasadnienie niedefiniowalności wyżej wymienionej relacji. Otóż, gdyby była ona definiowalna, to w każdym modelu ogólnym logiki drugiego rzędu z identycznością mielibyśmy zagwarantowane jej istnienie. Zatem, przy dowolnej interpretacji ogólnej byłoby prawdziwe zdanie:

$$\exists X\, \forall x_1\, \forall x_2\, \forall x_3\, [(X(x_1, x_2) \vee X(x_2, x_1)) \wedge (X(x_1, x_2) \rightarrow \sim X(x_2, x_1))\ (\wedge\, [X(x_1, x_2) \wedge X(x_2, x_3) \rightarrow X(x_1, x_3))] \wedge \sim X(x_1, x_1) \wedge (\exists x_4\, X(x_1, x_4)].$$

W każdym modelu zbioru $\{B_n : n \in \mathbf{N}\}$ powyższe zdanie również byłoby prawdziwe. Ponieważ jest to negacja formuły (B), a zbiór zdań prawdziwych przy danej interpretacji ogólnej jest niesprzeczny, więc żaden model zbioru $\{B_n : n \in \mathbf{N}\}$ nie byłby modelem ogólnym teorii $\{B\} \cup \{B_n : n \in \mathbf{N}\}$. Teoria ta nie miałaby więc modelu ogólnego. Jednak na podstawie twierdzenia o zwartości wiemy, że model tego typu istnieje. Oznacza to, że założenie definiowalności relacji liniowego porządku o nieskończonej ilości elementów, w modelach teorii określonej w przykładzie jest założeniem błędnym.

Oczywiście, można w podobny sposób wykazywać niedefiniowalność pewnych zbiorów czy relacji w modelach innych teorii, jednak nie mogą być one dowolne. Muszą posiadać chociażby nieskończoną ilość aksjomatów specyficznych.

Podsumujmy informacje tego rozdziału. Wiemy, że logika drugiego rzędu ma własność zwartości na gruncie semantyki ogólnej oraz że każda niesprzeczna teoria drugiego rzędu ma model ogólny. Z niesprzeczności teorii nie wynika jednak istnienie jej modelu głównego. Nie jest też zwarta logika drugiego rzędu na gruncie semantyki głównej. Cecha istnienia modelu danej teorii jakiegokolwiek systemu formalnego wydaje się mieć wartość samą w sobie. Dzięki niej niesprzeczność teorii równoważna jest ze znalezieniem dla niej modelu. W ten właśnie sposób możemy przenieść problem syntaktycznej niesprzeczności lub sprzeczności na semantykę. Konstruowanie dowodu sprzeczności syntaktycznej teorii można zastąpić udowodnieniem nieistnienia jej modeli, podobnie jak niesprzeczność syntaktyczną teorii uzasadnimy, znajdując jej model. Jeśli jednak w danym systemie nie zachodzi ta równoważność, wówczas wiemy tylko, że ze znalezienia modelu wynika niesprzeczność syntaktyczna danej teorii. Zagadnienie zwartości danego systemu formalnego wydaje się mieć charakter pomocniczy względem innych własności. Fakt, że logika drugiego rzędu z semantyką ogólną jest zwarta, pozwala w niektórych przypadkach konkretnych teorii wykazać, chociażby ich niesprzeczność. Pozwala również w sposób formalny uzasadnić niedefiniowalność pewnych relacji na gruncie danej teorii.

Przekształcenie to odsłania pewne zależności nie tylko między formułami języków, na których opierają się te teorie, ale również zależności między zdaniami prawdziwymi w ich modelach ogólnych. Zależności te powodują, że możemy poniekąd uznać, iż w ten sposób logika drugiego rzędu z semantyką ogólną sprowadzona zostaje do teorii pierwszego rzędu. Mówiąc ściślej, badanie niektórych (choć nie wszystkich) własności logiki $\mathbf{L}_2$ można zastąpić badaniem własności pewnej teorii opartej na $\mathbf{L}_1$.

ZAKOŃCZENIE

Logika drugiego rzędu uważana jest za system pośredni pomiędzy logiką pierwszego rzędu, a teorią mnogości. W pewnym sensie można logikę drugiego rzędu z semantyką ogólną uważać za teorię pierwszego rzędu. Dzieje się tak za sprawą istnienia przekładu języka drugiego rzędu na język pierwszego rzędu, niezmienniczego ze względu na istnienie modelu teorii niesprzecznej nadbudowanej nad danym systemem oraz ze względu na zachowanie prawdziwości zdania z dokładnością do przekształcenia będącego przekładem. Niezmienniczość ta jest możliwa jednak wówczas, gdy logikę drugiego rzędu będziemy rozpatrywali na gruncie semantyki ogólnej. O logice drugiego rzędu z semantyką główną nie można tego orzec. Różnica ta implikuje różnice pod względem pewnych innych własności formalnych. W niniejszej pracy omówione były zagadnienia: zwartości oraz kategoryczności pewnych teorii nadbudowanych nad logiką drugiego rzędu.

Przedstawione porównanie pozwala przede wszystkim określić siłę logiki drugiego rzędu z semantyką ogólną jako zbliżoną do logiki pierwszego rzędu, natomiast wyrażalność logiki drugiego rzędu z semantyką główną jako większą. Ma to oddźwięk na przykład w definiowalności pewnych zbiorów nieskończonych, takich jak zbiór liczb naturalnych oraz zbiór liczb rzeczywistych. Nie jest to jednak jedyna cecha $\mathbf{L}_2$ z semantyką główną świadcząca o jej sile i bogactwie. Okazuje się bowiem, że istnieją zdania prawdziwe we wszystkich modelach głównych $\mathbf{L}_2$, które nie są tezami tego systemu. Co więcej – nie można wzbogacić aksjomatyki logiki drugiego rzędu dodając nowe aksjomaty, aby dowodliwe było każde zdanie logicznie prawdziwe na gruncie semantyki głównej. Podobne własności ma nadbudowana nad logiką $\mathbf{L}_1$ teoria mnogości Zermelo-Fraenkla. Podobieństw tych nie uważa się za przypadkowe. Upatruje się ich w dużym zaangażowaniu teoriomnogościowym $\mathbf{L}_2$ z semantyką główną, czyli inaczej mówiąc – w korzystaniu na gruncie tego systemu z założeń o wiele silniejszych niż logiczne. Powszechny jest bowiem pogląd, że założenia nakładane w ujęciu semantyki głównej powodują, że w standardowy sposób rozumiemy na jej gruncie pierwotne pojęcia teorii mnogości – *zbiór* oraz *relacja przynależności do zbioru*.

TWO SEMANTICAL CHARACTERIZATIONS OF SECOND ORDER LOGIC WITH IDENTITY

Summary

In the article, two semantics for the second order logic with identity are distinguished. Bounding the notion of the second order structure we obtained notions of a general structure and a standard structure being the bases of the general and standard semantics for the second order logic with identity. Using the reduction to first order logic, introduced by H. B. Enderton in *Second order logic*, we pointed to some differences between $\mathbf{L}_2$ with general semantic and with standard semantic. In the case of general semantic it can be proved, that some of the second order theories are not categorical in power (like, for example, the number theory with the Peano induction postulate) and they are categorical in power in the case of standard semantic (chapter 4). This way we obtain the result, that some of the infinite sets of numbers are not definable in the first case, but they are definable – in the second one. Similarly, $\mathbf{L}_2$ has a compactness property, on the base of general semantic, but it has not – on the base of standard semantic (chapter 5). This difference is associated, for example, with the problem of the existence of a model for the consistent second order theories.