Jerzy Dadaczyński

Ontologiczne i poznawcze założenia teorii mnogości Georga Cantora Cz. 2

Studia Philosophiae Christianae 39/2, 273-302

2003

Artykuł został zdigitalizowany i opracowany do udostępnienia w internecie przez Muzeum Historii Polski w ramach prac podejmowanych na rzecz zapewnienia otwartego, powszechnego i trwałego dostępu do polskiego dorobku naukowego i kulturalnego. Artykuł jest umieszczony w kolekcji cyfrowej bazhum.muzhp.pl, gromadzącej zawartość polskich czasopism humanistycznych i społecznych.

Tekst jest udostępniony do wykorzystania w ramach dozwolonego użytku.

MUZEUM HISTORII POLSKI

Studia Philosophiae Christianae
UKSW
39(2003)2

JERZY DADACZYŃSKI

ONTOLOGICZNE I POZNAWCZE ZAŁOŻENIA TEORII MNOGOŚCI GEORGA CANTORA (II*)

1. ZAŁOŻENIA TEORIOPOZNAWCZE

Jak podkreślano, Cantor odwołał się do ontologii między innymi w celu stworzenia zaplecza dla sformułowania swojej teorii poznania. Rzecz oczywista, chodziło o poznanie naukowe, a konkretniej: o skonstruowanie takiej teorii poznania, która sankcjonowałaby sposób uprawiania przez niego matematyki i dawała legitymację naukowego i matematycznego charakteru tworzonej teorii mnogości (teorii liczb pozaskończonych).

Prezentacja epistemologii[1] pozwoli ujawnić, jakie czynniki filozoficzne tworzyły tło dla powstania, a przynajmniej apologii teorii liczb pozaskończonych. Poza tym przedstawienie epistemologii da pełniejszy obraz filozofii Cantora. Pozwoli to określić jego wpływ na powstanie kierunku formalistycznego w filozofii matematyki.

---

[*] Część pierwsza ukazała się w Studia Philosophiae Christianae 38(2003)1, 7-42.

[1] Teorii poznania naukowego, a ściśle, w wypadku Cantora: teorii poznania matematycznego.

1.1. ŹRÓDŁA POZNANIA

Wśród zagadnień teoriopoznawczych istotną kwestią jest sprawa źródeł poznania. Cantor podjął owo zagadnienie w tej samej pracy, w której określił główne zarysy swej ontologii. Wypada wyjaśnić, że nie do końca wiadomo, czy w omawianym tekście chodziło mu o źródła wiedzy naukowej w ogóle, czy też tylko o źródła poznania w matematyce.

Za pierwszą możliwością przemawia fakt, że Cantor, dokonując ocen wartości źródeł wiedzy, nie precyzował, iż chodzi mu o jakąś wiedzę związaną z jedną dyscypliną naukową. Wypowiadał się o źródłach „wiedzy jako takiej" (*die Quelle des Wissens*). Natomiast z szerszego kontekstu wynikałoby, że chodziło raczej o źródła poznania w matematyce. Ponieważ jednak niniejsze rozważania dotyczą właśnie poznania w matematyce, dlatego rozstrzyganie tej kwestii nie ma istotnego znaczenia.

1.1.1. Aprioryzm

Wypowiedzi Cantora pozwalają jednoznacznie określić jego stanowisko na planie opozycji: aprioryzm – aposterioryzm. Dopuszczał on wprawdzie obydwa rodzaje poznania, ale poznaniu opartemu na doświadczeniu odmawiał pewności (*Gewißheit*). Pewność była, według niego – jak można sądzić – pożądaną cechą poznania matematycznego (i ogólnie: naukowego?). Dlatego w matematyce (nauce) należało zrezygnować z jakiegokolwiek poznania opartego na doświadczeniu. O zanegowaniu wartości jakiegokolwiek rodzaju doświadczenia jako źródła poznania w matematyce (nauce?) świadczy wyraźne odcięcie się Cantora od epistemologii Kantowskiej. Ta ostatnia, preferując aprioryzm, dopuszczała jednak jako uprawnione poznawczo twierdzenia, których źródłem było doświadczenie. Natomiast źródłem „pewnego poznania" (*sichere Erkenntnis*) – według twórcy teorii mnogości – były wyłącznie (*nur*) pojęcia i idee[2]. Pojęcia zaś istniały, jak wiadomo, w sferze intrasu-

[2] „Erst seit dem neueren Empirismus, Sensualismus und Skeptizismus, sowie dem daraus hervorgegangenen Kantischen Kritizismus glaubt man die Quelle des Wissens und der Gewißheit in die Sinne oder doch in die sogenannten reinen Anschauungsformen der Vorstellungswelt verlegen und auf sie beschranken zu müssen; meiner Überzeugung nach liefern diese Elemente durchaus keine sichere Erkenntnis, weil letztere nur durch Begriffe und Ideen erhalten werden kann, (...)". G. Cantor, *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten. Nr 5. Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeits-*

biektywnej, utożsamianej z intelektem lub rozumem poznającego podmiotu.

Cantor nie uzasadniał szerzej swojego – jak sam to określił – przekonania (*Überzeugung*), mającego raczej cechy deklaracji o bezwartościowym charakterze doświadczenia jako źródła poznania. W każdym razie skrajny aprioryzm, nazywany też czasem skrajnym „racjonalizmem metodologicznym", był z pewnością konsekwencją przyjęcia ontologii typu platońskiego.

1.1.2. Poznanie pojęciowe – definiowanie

Na czym polegało zatem, według Cantora, poznanie matematyczne oparte na pojęciach? Przede wszystkim należy podkreślić, że zakładało ono już pewną wiedzę bazową, zawartą w znanych wcześniej (uświadomionych) pojęciach. Owe pojęcia, które konstytuowały wiedzę bazową, określał Cantor jako „wcześniej utworzone", „już istniejące" („będące do dyspozycji", „gotowe") i „wypróbowane". Wiedza bazowa, „zgromadzona w pojęciach", nie miała charakteru absolutnego w tym znaczeniu, że była stałym, niezmiennym zbiorem pojęć bazowych. W jej zakres wchodziły wszystkie wcześniej, w stosunku do danego, wprowadzone pojęcia. Wprowadzenie nowego pojęcia (a zatem matematyczne poznanie) polegało na wykonaniu następujących operacji:

1. „Stawia się" (*man setzt*) na początku jakiś przedmiot bez własności (*ein eigenschaftloses Ding*), który jest niczym innym, jak nazwą albo znakiem „A";
2. Określa się relacje owej nazwy w stosunku do innych predykatów, tych i tylko tych, których sens (*Bedeutung*) określony jest na podstawie istniejących już w sferze intrasubiektywnej pojęć. Orzekając o nazwie „A" $P_1(A)$, $P_2(A)$,..., „powołuje się do istnienia" odpowiadające nazwie „A" pojęcie przez wyliczenie jego cech (własności);
3. Dobór stosownych predykatów musi być taki, by nie były one wzajemnie sprzeczne;
4. Nowe pojęcie winno być dobrze odróżnialne od pojęć należących do wiedzy bazowej w stosunku do niego.

---

lehre, 1883, w: G. Cantor, *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, hrsg. E. Zermelo, Berlin 1932, reprint Berlin, Heidelberg, New York 1980 [w dalszym ciągu cytowane jako GA], 207 (przypis do s. 181).

Po wykonaniu owych operacji spełnione są wszystkie warunki konieczne i wystarczające do „obudzenia" pojęcia A, które „gotowe wkracza w istnienie" (*tritt fertig ins Dasein*) w sferze intrasubiektywnej. Takie pojęcie może i musi (*kann und muß*) być uznane jako istniejące i realne w matematyce. Wypada zauważyć, że tak pojmowane poznanie było dla Cantora tworzeniem pojęć (*Begriffsbildung*), czyli poprawnym definiowaniem. Poprawnym, a więc takim, by nowo wprowadzane pojęcie nie było sprzeczne i było dobrze odróżnialne od wcześniej wprowadzonych[3].

Pierwszy postulat poznawania (poprawnego definiowania), czyli niesprzeczność pojęć, wydaje się klarowny. Drugi, domagający się dobrej odróżnialności nowego pojęcia od pojęć z zakresu wiedzy bazowej, wymaga pewnego wyjaśnienia. Najbardziej sensowna wydaje się interpretacja, która odwołuje się do semantycznej relacji pomiędzy językiem a pojęciami w sferze intrasubiektywnej. Cantor w swym postulacie chciał najprawdopodobniej wyrazić myśl, że w procesie definiowania (poznawania) nie wolno nazwie „A" przyporządkowywać pojęcia A takiego, że A = P, przy czym pojęciu P, w sferze języka, na mocy wcześniejszej definicji, przypisana już została nazwa „P" (predykat P (x)). Inaczej: wprowadzona wcześniej funkcja F – przekształcająca dziedzinę predykatów (nazw ogólnych) na dziedzinę pojęć w sferze intrasubiektywnej – powinna, zgodnie z postulatem Cantora, być funkcją wzajemnie jednoznaczną.

---

[3] „Die Mathematik ist in ihrer Entwickelung völlig frei und nur an die selbstredende Rücksicht gebunden, daß ihre Begriffe sowohl in sich widerspruchslos sind, als auch in festen durch Definitionen geordneten Beziehungen zu den vorher gebildeten, bereits vorhandenen und bewährten Begriffen stehen. Im besondern ist sie bei der Einführung neuer Zahlen nur verpflichtet, Definitionen von ihnen zu geben, durch welche ihnen eine solche Bestimmtheit und unter Umständen eine solche Beziehung zu den älteren Zahlen verliehen wird, daß sie sich in gegebenen Fallen unter einander bestimmt unterscheiden lassen. Sobald eine Zahl allen diesen Bedingungen genügt, kann und muß sie als existent und real in der Mathematik betrachtet werden". Tamże, 182.

„Der Vorgang bei der korrekten Bildung von Begriffen ist m. E. derselbe; man setzt ein eigenschaftsloses Ding daß zuerst nichts anderes ist als ein Name oder ein Zeichen A, und gibt demselben ordnungsmäßig verschiedene, selbst unendlich viele Prädikate, deren Bedeutung an bereits vorhandenen Ideen bekannt ist, und die einander nicht widersprechen dürfen; dadurch werden die Beziehungen von A zu den bereits vorhandenen Begriffen und namentlich zu den verwandten bestimmt; ist man hiermit vollständig zu Ende, so sind alle Bedingungen zur Weckung des Begriffes A, (...), vorhanden und er tritt fertig in Dasein, versehen mit der intrasubjektiven Realität, welche überall von Begriffen nur verlangt werden kann; seine transiente Bedeutung zu konstatieren ist alsdann Sache der Metaphysik". Tamże, 207 (przypis do s. 182, 187).

Zatem język matematyki (nauki?) winien być językiem sztucznie zbudowanym, różniącym się od potocznego jednoznacznością nazw. Nazwom (predykatom) różnokształtnym (różnobrzmiącym) winny w tym języku odpowiadać różne pojęcia.

Ujęcie poznania matematycznego jako poprawnego definiowania pojęć nie tylko harmonizowało z platońskim charakterem filozofii matematyki Cantora, ale jednocześnie odpowiadało jego umysłowości i znajdowało konsekwentne potwierdzenie w matematycznej *praxis*.

Zbiór wybitnych matematyków można próbować podzielić na dwie – niekoniecznie rozłączne – grupy. Do pierwszej należeliby matematycy wprowadzający nowe pojęcia i mający tym samym szczególny wpływ na dalszy rozwój matematyki. Drugą stanowiliby ci, którzy rozwiązali istotne problemy teoretyczne i tym sposobem przyczynili się do postępu.

Cantora z pewnością nie można zaliczyć do drugiej grupy. Nie udało mu się nigdy udowodnić podstawowych twierdzeń z zakresu teorii liczb kardynalnych. Oczywiste jest natomiast zaklasyfikowanie go do grupy pierwszej[4]. Wystarczy tu wskazać na jego definicję liczb rzeczywistych czy historyczną definicję *continuum* liniowego, które to definicje stanowią jednocześnie dobrą ilustrację teoretycznego opisu procesu poznania[5].

---

[4] Por. K. Schröter, *Die Mengenlehre als inhaltliches Fundament der Mathematik*, NTM. Schriftenreihe für Geschichte der Naturwissenschaften, Technik und Medizin 6 (1969), Heft l, 8-9. Cantor potwierdził, iż wielką wagę przywiązywał nie tyle do rozwiązywania problemów, ile do „sztuki" ich stawiania: „In re mathematica ars proponendi queastionem pluris facienda est quam solvendi". Jest to trzecia teza rozprawy doktorskiej Cantora. Por. G. Cantor, *De aequationibus secundi gradus indeterminatis*, Berlin 1867, w: GA, 31. Niewątpliwie zaś do zakresu owej „sztuki" należała umiejętność wprowadzania użytecznych pojęć do języka matematyki, czyli definiowania.

[5] Przy założeniu, że znany jest sens następujących predykatów (to znaczy odpowiadające im pojęcia należą do wiedzy bazowej): $P_1(x)$ = „x jest liczbą wymierną", $P_2(x)$ = „x jest ciągiem podstawowym", $P_3(x)$ = „x jest ciągiem współzbieżnym", $P_4(x)$ = „x jest zbiorem", można określić predykat R (x) = „x jest liczbą rzeczywistą" (czyli zdefiniować odpowiadające temu predykatowi pojęcie: R – liczba rzeczywista, które przed zdefiniowaniem jest, według niemieckiego matematyka, „przedmiotem bez własności", niczym innym, jak znakiem „R" lub samą nazwą „liczba rzeczywista") następująco:

$R(x) =_{df} P_1(x)$ i $P_2(x)$ i $P_3(x)$ i $P_4(x)$.

Zdefiniowanie pojęcia liczby rzeczywistej jest – według Cantora – równoznaczne z poznaniem tego, czym jest liczba rzeczywista, i z jego zaistnieniem w sferze intrasubiektywnej (podana definicja nie do końca odpowiada sposobowi wprowadzenia liczb rzeczywistych przez Cantora. Nie dysponował on bowiem wyraźnym pojęciem współ-

1.1.3. *Anamnesis źródłem poznania?*

Cantorowska teoria poznania zawierała pewien dodatkowy szczegół, który jeszcze bardziej upodabniał ją do epistemologii Platona. Poznanie, polegające na poprawnym definiowaniu, powiększało zasób wiedzy matematycznej przez wprowadzanie do sfery istnienia intrasubiektywnego coraz to nowych pojęć. Pojęcia owe nie były jednak kreowane *ex nihilo*. Wcześniej, przed ich zdefiniowaniem (poznaniem) były „uśpione" w poznającym podmiocie (*in uns geschlummert*), „spoczywały już do pewnego stopnia w nas" (*was in uns gewissermaßen schon lag*). Poprawne zdefiniowanie tych pojęć powodowało ich obudzenie i wprowadzenie do świadomości (*Bewußtsein*). Jako gotowe wkraczały w istnienie (*er* [*der Begriff* – J. D.] *tritt fertig ins Dasein*) w sferze intrasubiektywnej[6].

---

zbieżności ciągów. Z kolei predykat $P_3(x)$ jest funkcją zdaniową z dwiema zmiennymi nazwowymi, co nie odpowiadało, jak wiadomo, Cantorowskiej koncepcji języka matematyki. Niemniej przykład ten dobrze, jak się wydaje, obrazuje koncepcję poznania twórcy teorii mnogości). W tym przypadku wprost określone zostały relacje pojęcia R w stosunku do czterech pojęć wiedzy bazowej. Ponieważ te ostatnie powiązane są siecią relacji z innymi pojęciami wiedzy bazowej, dlatego pośrednio określone zostały relacje pojęcia R z innymi pojęciami sfery intrasubiektywnej. Tylko tak, jak się wydaje, można zrozumieć tezę Cantora, że nowo wprowadzane pojęcie może być w relacjach z nieskończoną liczbą pojęć. Gdyby rozumieć ją jako możliwość podania, w definicji nazwy nowego predykatu, nieskończonej liczby predykatów, powstałby od razu problem poprawności definicji. Podniesiony on został najwcześniej przez H. Poincarégo i sprowadzał się do pytania: czy przyznać istnienie przedmiotom, które byłyby tak definiowane? Odpowiedź francuskiego matematyka była negatywna. Ilustrację procesu poznania stanowi również Cantorowska definicja *continuum* jako takiego zbioru punktów, który jest zbiorem doskonałym i spójnym (*zusammenhangend* – autor daje przydługawą definicję spójności, różną od definicji współczesnej: zbiór doskonały to taki, który równy jest swej pierwszej pochodnej). Ta definicja *continuum* różni się od współczesnej, bowiem nie wymaga, aby taki zbiór był zwarty (każdy podzbiór nieskończony posiada przynajmniej jeden punkt skupienia). Zatem, według Cantora, prosta euklidesowa stanowiła *continuum*, co wyklucza definicja współczesnej topologii. Komentarz twórcy teorii mnogości, którym opatrzył definicję *continuum*, był pełen zachwytu dla tego narzędzia poznania, jakim okazała się stworzona przez niego topologia zbiorów punktowych. Pozwoliła ona po raz pierwszy zdefiniować w sposób ścisły pojęcie *continuum*, o rozumienie którego filozofowie toczyli boje od czasów antycznych. Wydaje się, że w tym kontekście można lepiej zrozumieć, dlaczego Cantor utożsamiał poznanie z poprawnym definiowaniem. Dopiero jego definicja pozwoliła ustalić sens terminu „*continuum*", a więc uczynić własności *continuum* przedmiotem badań matematyki, „poznać jego istotę", która dotąd stanowiła niemalże religijne misterium. Por. G. Cantor, *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten. Nr 5. Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*, 190-194.

[6] „(...), weil letztere (sichere Erkenntnis – J. D.) nur durch Begriffe und Ideen erhalten werden kann, die von äußerer Erfahrung höchstens angeregt, der Hauptsache nach durch innere Induktion und Deduktion gebildet werden als etwas, was in uns ge-

Teoria pojęć wrodzonych (a zatem i wrodzonej wiedzy), ale nie uświadomionych do momentu ich poprawnego zdefiniowania[7], do złudzenia przypomina teorię Platona o *anamnesis*. Z tym że myśliciel grecki wskazał genezę wiedzy wrodzonej. Odwoływała się ona do irracjonalnych, orficko-pitagorejskich wierzeń w wędrówkę dusz. Tym samym aprioryzm Platona okazywał się utajonym empiryzmem.

Cantor nie ujawnił, jakie – jego zdaniem – były źródła pojęć (wiedzy) wrodzonych. Być może, dla uzasadnienia istnienia wiedzy wrodzonej należałoby się odwołać do akceptowanego przez Cantora, z pewnymi modyfikacjami, dualizmu Spinozjańskiego[8].

1.1.4. Sfera intrasubiektywna jako źródło poznania

W każdym razie przyjęcie istnienia pojęć wrodzonych wyjaśnia w pewnym stopniu charakter poznawczej sfery intrasubiektywnej, utożsamianej przez Cantora z intelektem lub rozumem poznającego podmiotu, oraz relację tej sfery do dziedziny transsubiektywnej.

---

wissermaßen schon lag und nur geweckt und zum Bewußtsein gebracht wird". Tamże, 207 (przypis do s. 181). „(...), so sind alle Bedingungen zur Weckung des Begriffes A, welcher in uns geschlummert, vorhanden und er tritt fertig ins Dasein, versehen mit der intrasubjektiven Realität, welche überall von Begriffen nur verlangt werden kann; seine transiente Bedeutung zu konstatieren ist alsdann Sache der Metaphysik". Tamże (przypis do s. 182, 187).

[7] Definiowanie to jest poznaniem, które – jak widać – można też określić jako uświadamianie.

[8] Można by też próbować tłumaczyć istnienie wiedzy „w stanie nie uświadomionym" za pomocą teorii archetypów C. G. Junga. Archetypy, czyli symbole nieświadomości zbiorowej, są w jego ujęciu syntetycznym wytworem doświadczeń ludzkości (w ramach pewnego kręgu kulturowego), przejawiającymi się w snach, sztuce, mitach, religiach. Teoria C. G. Junga jest ukrytą formą platonizmu. Jest interesujące, że H. Meschkowski, usiłujący bronić platonizmu we współczesnej filozofii matematyki, powoływał się na fragmenty korespondencji Cantora, w których powiadał on, że miał wizje liczb pozaskończonych, zanim był w stanie poprawnie je zdefiniować. H. Meschkowski, interpretując te teksty w duchu jungowskim, starał się uzasadnić istnienie archetypów matematycznych pojęć w zbiorowej nieświadomości. Por. H. Meschkowski, *Mathematik und Realität bei Georg Cantor*, Dialectica 29(1975)l, 55-70. Wydaje się jednak, że takie próby są dosyć ryzykowne. Teksty, które analizował H. Meschkowski, powstawały w okresie głębokiego kryzysu psychicznego Cantora, wymagającego wielokrotnego leczenia klinicznego. Por. J. W. Dauben, *Georg Cantor. The personal matrix of his mathematics*, ISIS 69(1978), 534-550; I. Grattan-Guiness, *Psychology in the foundations of logic and mathematics: the cases of Boole, Cantor and Brouwer*, History and Philosophy of Logic 3 (1982), 33-53. Opierając się na listach z tego samego okresu, można by wykazywać, że źródłem wiedzy o liczbach pozaskończonych było dla Cantora objawienie dokonane przez Boga albo inny rodzaj iluminacji.

Sferę intrasubiektywną należałoby podzielić na dwie rozłączne części lub na dwie nie przecinające się płaszczyzny. Podział ten nie miałby charakteru absolutnego, byłby zrelatywizowany do danej chwili t. Do jednej części można by zaliczyć te pojęcia, które do danego momentu byłyby już poznane (zdefiniowane = znajdujące się w płaszczyźnie świadomości). Druga zawierałaby wszystkie pojęcia nieuświadomione, jeszcze niepoznane (niezdefiniowane = zawarte w płaszczyźnie podświadomości lub nieświadomości). Suma obydwu części dawałaby wtedy całą sferę intrasubiektywną, o której należałoby orzec, zgodnie z tezą Cantorowskiej ontologii, że jest izomorficzna z rzeczywistością transsubiektywną[9].

Takie widzenie sfery intrasubiektywnej i jej relacji do rzeczywistości transsubiektywnej znajduje potwierdzenie w tezie Cantora, że to, co poznawalne, istnieje, zaś to, co nie daje się poznać, nie istnieje[10].

Sformułowane tutaj uwagi odnoszą się do całej, aktualnej i potencjalnej, wiedzy, a nie tylko do wiedzy matematycznej, bowiem, jak należy przypuszczać, pojęcia matematyczne stanowiły jedynie podzbiór obu płaszczyzn sfery intrasubiektywnej (świadomej, jak i nie uświadomionej).

1.2. PRZEDMIOT POZNANIA

Powyżej zaprezentowano stanowiska Cantora w kwestii źródeł poznania. Pokazano, że jest ono, przynajmniej w zakresie epistemologii matematyki, skrajnym aprioryzmem, odrzucającym jakąkolwiek formę doświadczenia. Można tak twierdzić, gdy wyłączy się problem: skąd biorą się pojęcia wrodzone, którego twórca teorii mnogości nie

---

[9] Takie określenie rzeczywistości intrasubiektywnej likwiduje ostatecznie podejrzenie, że ontologia Cantora jest idealizmem typu berkeleyowskiego lub idealizmem typu dziewiętnastowiecznego, niemieckiego. Przyjmując bowiem, że wiedza się rozwija (na przykład przez dodawanie nowych pojęć, jak chciał tego Cantor), można by pytać, jak rozumieć, że obie sfery rzeczywistości: poznawcza i transsubiektywna, mogą być izomorficzne. Poznanie kreowałoby wówczas rzeczywistość transsubiektywną. Jeśli zaś przyjąć istnienie pojęć wrodzonych, a w danej chwili t nie uświadomionych i wchodzących w zakres sfery intrasubiektywnej (wiedza potencjalna), to można stwierdzić, że rzeczywistość ta, a więc cała wiedza, to znaczy aktualna plus potencjalna (płaszczyzna świadomości plus płaszczyzna nieświadomości), jest izomorficzna z rzeczywistością transsubiektywną.

[10] „Was sich erkennen läßt, ist, was sich nicht erkennen läßt, ist nicht, und in demselben Maße, in dem etwas ist, ist es auch erkennbar"., G. Cantor, *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten. Nr 5. Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*, 207 (przypis do s. 181). Niemiecki matematyk posłużył się tutaj cytatem z pracy E. Zellera. Por. E. Zeller, *Die Philosophie der Griechen*, Leipzig 1875[3], 541.

rozstrzygnął. Nie jest wykluczone, że w tej kwestii zgodziłby się na jakąś formą aposterioryzmu. Obecnie wypada postawić pytanie, co według niego stanowiło przedmiot poznania matematyki.

1.2.1. Redukcja przedmiotu poznania do sfery intrasubiektywnej

Podstawą do określenia zakresu poznania matematyki była ontologiczna teza o izomorfizmie obydwu rzeczywistości intrasubiektywnej oraz transsubiektywnej. Skoro tak, to można i wystarczy zawęzić zakres poznania do rzeczywistości intrasubiektywnej (aktualnej plus potencjalnej). Cantor wcale nie twierdził, że matematyce nie można by przyporządkować, jako przedmiotu poznania, jakiegoś „wycinka" lub aspektu rzeczywistości transsubiektywnej. Chodziło mu raczej o to, że skoro istnieje izomorfizm obydwu sfer, to zdecydowanie lepiej jest ograniczyć przedmiot poznania do rzeczywistości intrasubiektywnej.

Twórca teorii mnogości nie sformułował tym samym tezy, że przedmioty „interesujące" dla matematyki (poznawalne za pomocą metod matematycznych) nie istnieją w sferze transsubiektywnej. Wręcz przeciwnie, izomorfizm obydwu rzeczywistości gwarantował matematyczność rzeczywistości transsubiektywnej. Jednocześnie jednak, ze względu na ten sam izomorfizm, Cantor sformułował metodologiczną w gruncie rzeczy tezę, której istotę można ująć najkrócej w zdaniu: wystarczy, by przedmiotem matematyki były pojęcia istniejące w rzeczywistości intrasubiektywnej[11].

1.2.2. Poznanie w matematyce: odkrywanie

W kontekście rozważań nad przedmiotem poznania matematyki można też rozstrzygnąć kwestię, czy według Cantora praca matematyka polegała na tworzeniu, czy też na odkrywaniu nieznanej dotąd rzeczywistości.

Zakres poznania matematyki stanowiła rzeczywistość intrasubiektywna. Zawierała ona wszystkie pojęcia matematyki jako swój podzbiór. Z tym że część owych pojęć należała do płaszczyzny świadomości, a część zawarta była w warstwie nieuświadomionej tejże sfe-

[11] „Dieser Zusammenhang beider Realitäten hat seinen eigentlichen Grund in der Einheit des *Alls, zu welchen wir selbst mitgehören.* Der Hinweis auf diesen Zusammenhang hat nun hier den Zweck, eine mir sehr wichtig scheinende Konsequenz für die Mathematik daraus herzuleiten, daß nämlich letztere bei der Ausbildung ihres Ideenmaterials einzig und allein auf die immanente Realität ihrer Begriffe Rücksicht zu nehmen und daher keinerlei Verbindlichkeit hat, sie auch nach ihrer transienten Realität zu prüfen". Tamże, 182.

ry. Pojęcia w warstwie nieuświadomionej istniały. Poznanie ich (zdefiniowanie) rozszerzało jedynie zakres jednej przestrzeni i zawężało drugą. Zatem matematyk definiujący jakieś nowe pojęcie nie tworzył go, a jedynie je odkrywał, nazywał i przenosił do sfery świadomości.

Jednocześnie można jednak twierdzić, że działalność matematyka miała również pewne cechy kreacji. Poznanie bowiem powodowało, że pojęcie, istniejące dotąd w formie „uśpionej", dzięki poprawnej definicji powoływane było do pełnego (uświadomionego) istnienia w rzeczywistości intrasubiektywnej.

Niemniej istotny akcent w epistemologii matematyki Cantora położony został na odkrywanie. Jego określenia opisujące rzeczywistość intrasubiektywną jako „nasz rozum", „nasz intelekt" wypada interpretować w ten sposób, że każdy podmiot poznający, dzięki ontologicznej zasadzie izomorfizmu obydwu rzeczywistości, dysponuje tym samym zasobem wiedzy, aczkolwiek zakresy wiedzy uświadomionej i nieświadomej mogą i z reguły dla różnych podmiotów są różne. Dzięki informacji naukowej każdy z matematyków może zapoznać się z definicją nowego pojęcia, czyli poznać je, odkryć to samo pojęcie, które wcześniej odkrył inny matematyk. Ponieważ poznawanie w matematyce jest odkrywaniem pewnej rzeczywistości o tyle subiektywnej, że istniejącej w poznającym podmiocie, ale jednocześnie obiektywnej, bo dzięki własnościom izomorfizmu potencjalnie identycznej dla każdego podmiotu, wiedza matematyczna jest intersubiektywna – albo precyzyjniej – obiektywna i równocześnie komunikowalna.

Wypada też zaznaczyć, że według Cantora, kładącego tak wielki nacisk na poprawne definiowanie pojęć (= poznanie), poznanie nie polegało na „mechanicznym" ich wprowadzaniu. Nie chodziło o zupełnie przypadkowe przyporządkowanie nowym nazwom koniunkcji predykatów odpowiadających pojęciom już należącym do wiedzy bazowej. Oczywiście, coś takiego było możliwe, ale według Cantora cel działalności poznawczej stanowiło wprowadzanie takich pojęć, które okazałyby się „owocne" (opozycja: *fruchtbar* - *unfruchtbar*). Jako „owocne" klasyfikowane były dość enigmatycznie te pojęcia, które prowadziły do sukcesów (*Erfolg*)[12].

[12] „(...) dann aber trägt auch jeder mathematische Begriff das nötige Korrektiv in sich selbst einher; ist er unfruchtbar oder unzweckmäßig, so zeigt er es sehr bald durch seine Unbrauchbarkeit und er wird alsdann wegen mangelnden Erfolgs fallen gelassen". Tamże, 182.

Można jedynie domyślać się, że w tym znaczeniu „owocne" było na przykład pojęcie równoliczności, pozwalające definiować skończone i pozaskończone liczby całkowite, lub pojęcie punktu skupienia i pochodnej zbioru, które okazały się pożyteczne w zdefiniowaniu *continuum* liniowego, co Cantor rzeczywiście uznał za wielki sukces. Zatem jedyne uchwytne kryterium „owocności" pojęcia stanowiła dalsza matematyczna *praxis*, w której ujawniał się stopień „owocności" danego pojęcia. W tym ujęciu praca matematyka była po części sztuką, w której dość istotną rolę odgrywała intuicja tego, kto wprowadzał (definiował) w taki a nie inny sposób takie a nie inne pojęcie.

1.3. PRAWDA

Do doniosłych elementów każdej epistemologii należy zagadnienie prawdy. Wiąże się ono zazwyczaj z niesprzecznością wiedzy. W wypadku epistemologii formułowanej przez twórcę teorii mnogości w zagadnienia te dodatkowo uwikłany jest jeszcze problem istnienia, co zostało już kilkakrotnie zaakcentowane w niniejszej pracy. Dla wygody dalszych rozważań, których celem jest zaprezentowanie (rekonstrukcja) rozumienia przez Cantora prawdy, niesprzeczności, istnienia oraz związków pomiędzy nimi, warto jeszcze raz wyraźnie podkreślić ograniczenie zakresu analizy do pojęć (wiedzy) matematycznych.

1.3.1. Niesprzeczność syntaktyczna a istnienie

Punkt wyjścia dla charakterystyki – istotnego w epistemologii (i ontologii) matematyki Cantora – związku pomiędzy niesprzecznością a istnieniem może stanowić dyrektywa stwierdzająca, że przedmiotem matematyki są pojęcia istniejące w rzeczywistości intrasubiektywnej. Jednocześnie Cantor był, jak już wspomniano, zwolennikiem tezy wiążącej istnienie jakiegokolwiek przedmiotu z jego poznawalnością. Istnienie przedmiotu – w tym ujęciu – było równoważne z jego poznawalnością. Ponieważ poznanie w matematyce to nic innego, jak poprawne definiowanie, zatem można przy uwzględnieniu obydwu wyżej sformułowanych przesłanek wnioskować, że możliwość poprawnego zdefiniowania jest równoznaczna z istnieniem pojęcia – przedmiotu w sferze intrasubiektywnej – którym zajmuje się matematyka. Zaś poprawne definiowanie to w istocie taki dobór predykatów w definiensie definicji pojęcia A, który nie dopuszcza, aby to pojęcie okazało się sprzeczne[13]. Zatem istnienie pojęcia jest równoważne z jego niesprzecznością.

Wynika stąd teza o postaci jednostronnej implikacji: jeśli jakieś pojęcie jest niesprzeczne (= można je niesprzecznie zdefiniować), wtedy dane pojęcie istnieje. Jeszcze inaczej: niesprzeczność jest warunkiem wystarczającym istnienia pojęcia.

Przeprowadzona analiza wymaga pewnych dodatkowych wyjaśnień, dotyczących sposobu doboru predykatów w definicji pojęcia wprowadzanego do wiedzy bazowej. Czy Cantor, wypowiadając tezę, że predykaty te nie mogły być wzajemnie sprzeczne, miał na myśli jakiś algorytm, który „mechanicznie" pozwalałby ustalić ową sprzeczność? Oczywiste jest, że nie mogły to być takie predykaty, które przy odwołaniu do definicji pojęć, jakim one odpowiadały, i zastosowaniu prostego wnioskowania dawały sprzeczność. Na przykład, w definiendum pojęcia A nie wolno było podać predykatów „x jest skończoną liczbą parzystą" i „x jest skończoną liczbą nieparzystą". Teoretycznie jednak było możliwe, że takiego prostego wnioskowania ujawniającego sprzeczność nie można było przeprowadzić. Cantor zaś ani nie podał, ani nie myślał o możliwości podania algorytmu gwarantującego niesprzeczność definiowanych pojęć. Co zatem miało rozstrzygnąć o tym, czy nowo zdefiniowane pojęcie jest niesprzeczne, a zatem istnieje?

Jedyna dopuszczalna odpowiedź jest następująca: założyć niesprzeczność i odczekać, czy przy dalszym rozwoju wiedzy matematycznej nie okaże się coś innego. Takie rozwiązanie znajduje poniekąd potwierdzenie w działalności matematycznej samego Cantora, który był przekonany, że wykazał sprzeczność pojęcia wielkości nieskończenie małych. A zatem jako „nie istniejące" „wyeliminował" je z matematyki po kilku wiekach ich funkcjonowania w analizie[14].

---

[13] Założono, że nowo wprowadzone pojęcie jest dobrze odróżnialne od pojęć wiedzy bazowej.

[14] Zasadnicza myśl podanego przez Cantora dowodu nieistnienia wielkości nieskończenie małej jest następująca: niech ξ będzie wielkością różną od zera, mniejszą od każdej wielkości skończonej, zaś ν dowolną porządkową liczbą pozaskończoną. Dalej dowodził on, że nie istnieje taka liczba pozaskończona ν, dla której $\xi\nu > 1$, co było sprzeczne z pojęciem wielkości liniowej. „(...) widerspricht die gemachte Voraussetzung dem Begriff linearer Größen", G. Cantor, *List do K. Weierstrassa z 16.05.1887*, w: *Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten*, 1887-88, w: GA, 408. Z punktu widzenia współczesnej wiedzy matematycznej Cantor popełnił typowy błąd *petitionis principii*. Polegał on na przypisaniu wielkościom nieskończenie małym własności wielkości skoń-

Wypada podkreślić, że brak w koncepcji Cantora algorytmu gwarantującego niesprzeczność definiowanych pojęć podważał w konsekwencji wiarygodność pojęć już należących do wiedzy bazowej[15]. Jako jedyny sposób potwierdzania przekonania o niesprzeczności wiedzy wymieniał on bowiem długotrwałą praktykę matematyczną. Ta zaś mogła co najwyżej uprawdopodobnić przekonanie matematyków, że pojęcia, którymi nawet od dawna operują, są niesprzeczne.

Trzeba też zwrócić uwagę na to, że okazanie sprzeczności pojęć, nawet jeśli było możliwe, to poza banalnymi przypadkami, kiedy w definiensie występowałby predykat i jego negacja, wymagało przeprowadzenia pewnego rozumowania. Operowało się w nim wcześniej przyjętymi definicjami oraz innymi zdaniami nie będącymi definicjami, a więc twierdzeniami matematyki oraz tautologiami logicznymi (na przykład *tertium non datur*). Z dotychczasowego przeglądu epistemologii Cantora, ze względu na zdecydowaną preferencję w jego filozofii matematyki kwestii istnienia pojęć, a także biorąc pod uwagę, że istotny akcent w jego praktyce matematycznej, decydujący o jej doniosłości, spoczywał na wprowadzaniu nowych pojęć, można by wnioskować, że język matematyki był zredukowany jedynie do definicji. Oczywiście, taka sytuacja nie miała

---

czonych, to znaczy na „narzuceniu" im aksjomatu Archimedesa, który we współczesnej matematyce charakteryzuje tylko i wyłącznie wielkości skończone. Por. tamże, 407-409. D. Hilbert pokazał, że jeśli odrzuci się aksjomat Archimedesa, wtedy można zbudować geometrię, w której Cantorowska nierówność $\xi\nu < 1$ nie prowadzi do sprzeczności. D. Hilbert konstruował geometrię niearchimedesową w celu uzasadnienia niezależności aksjomatu Archimedesa od pozostałych aksjomatów geometrii. Powiedziano, że Cantor popełnił błąd *petitionis principii* „z punktu widzenia współczesnej wiedzy matematycznej". Dla Cantora, akceptującego zastaną wiedzę bazową, w której wszystkie obiekty traktowane jako liczby spełniały własność opisaną we wzmiankowanym aksjomacie, było (z tego właśnie powodu) poniekąd naturalne odrzucenie istnienia wielkości nieskończenie małych. Wielkości te znane były już starożytnym Grekom, a ponownie pojawiły się w matematyce wraz z rachunkiem nieskończonościowym I. Newtona i G. W. Leibniza. Rozwój analizy w XIX wieku (A. Cauchy i K. Weierstrass) doprowadził do tego, że całą tę dyscyplinę można było oprzeć na liczbach rzeczywistych. Dlatego matematycy wychowani w szkole Weierstrassa zaczęli negować potrzebę wielkości nieskończenie małych w matematyce. To drugi powód, dla którego Cantor starał się udowodnić sprzeczność wspomnianego pojęcia. Dopiero upowszechnienie metod aksjomatycznych i badania D. Hilberta dały ścisłe podstawy tym wielkościom, na których bazie buduje się między innymi analizę niestandardową. Por. D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, Leipzig 1930, 31n.; H. Jakubanis, *O matematycznych podstawach systemu Platona*, Przegląd Filozoficzny 41(1938)4, 1-7.

[15] Tej konsekwencji swej koncepcji Cantor nie zauważał.

miejsca. Cantor zdawkowo stwierdził, że istotną rolę odgrywały w nauce (ogólnie) rozumowania o charakterze dedukcyjnym[16].

Warto przypomnieć, iż Cantor biegle posługiwał się w swych pracach z zakresu analizy klasycznym rachunkiem zdań oraz rachunkiem kwantyfikatorów. Twierdzenia w nich zawarte dostarczały zbioru reguł poprawnego, to znaczy dedukcyjnego wnioskowania. Nie wykluczało to traktowania praw logiki również jako zdań samego języka przedmiotowego, w których poszczególne człony zastępowano, na podstawie przyjmowanej *implicite* reguły podstawiania, zdaniami matematyki. Ponieważ Cantor kilkakrotnie zdecydowanie postulował, aby w rozumowaniach matematycznych nie korzystać z jakiegokolwiek oglądu lub intuicji (*Anschauung*), dlatego można sądzić, że tezy klasycznej logiki zdań i kwantyfikatorów wyczerpywały – w jego pojęciu – zbiór reguł we wnioskowaniach dedukcyjnych. Zatem wnioskowania, dowody nowych twierdzeń matematycznych byłyby w tym ujęciu ciągiem zdań przekształcanych zgodnie z takimi właśnie, przyjmowanymi *implicite* regułami[17].

Z powyższych rozważań wynika jednoznacznie, że choć Cantor pisał o niesprzeczności pojęć, to niesprzeczność była w jego koncepcji przede wszystkim pożądaną cechą języka matematyki. Przez dopuszczone regułami dedukcji przekształcanie zdań matematyki można było ewentualnie stwierdzić sprzeczność jakiejś pary zdań. Ponieważ z oczywistych względów sprzeczność zdań dyskredytowała wartość wiedzy, należało ową sprzeczność usunąć. Praktyka matematyczna Cantora wskazuje, że trzeba było wówczas ustalić, która z definicji pojęć matematycznych generowała ową sprzeczność, pojęcie uznać za sprzeczne i jako takie za nieistniejące. W konsekwencji należało ze zbioru zdań matematyki usunąć definicję owego pojęcia wraz ze wszystkimi zdaniami, w których dowodzie występowała nazwa pojęcia sprzecznego.

---

[16] Cantor powiada o „wewnętrznej indukcji” w procesie poznania. Nie jest do końca jasne, jak ją rozumiał. Wyrażenie „wewnętrzna” wskazywało, iż w poznaniu nie trzeba odwoływać się do rzeczywistości transsubiektywnej. Termin „wewnętrzna indukcja” odnosił się – jak wynika z kontekstu – do procesu uświadamiania „pojęć uśpionych” w sferze intrasubiektywnej. Z praktyki matematycznej Cantora wynika natomiast, iż w dowodzeniu dopuszczał wyłącznie rozumowania typu dedukcyjnego.

[17] Odnosi się to także do dowodów nie wprost, dla których regułę wnioskowania stanowi prawo: $(p \rightarrow q) \wedge \sim q \rightarrow \sim p$.

Generalnie można stwierdzić, że ostatecznie to własności języka matematyki i jego ewentualna, choć niepożądana sprzeczność pozwalały orzekać o sprzeczności pojęć mających rzekomo istnieć w rzeczywistości intrasubiektywnej. Kiedy zaś język matematyki był niesprzeczny, wówczas „dobrze opisywał" pojęcia i relacje pomiędzy nimi w rzeczywistości intrasubiektywnej.

1.3.2. Klasyczna koncepcja prawdy

Dotychczasowe analizy pozwoliły ustalić Cantorowskie ujęcie relacji pomiędzy istnieniem pojęć w rzeczywistości intrasubiektywnej a ich niesprzecznością i niesprzecznością języka matematyki. W tym kontekście wypada również postawić pytanie o to, jak twórca teorii mnogości ujmował zagadnienie prawdy. Cantor potraktował tę kwestię bardzo skrótowo, odwołując się ponownie do Platona. Jest to ujęcie klasyczne, w którym podstawą prawdy jest relacja pomiędzy intelektem, a więc tym, co Cantor nazywał rzeczywistością intrasubiektywną, a rzeczywistością transsubiektywną. Przy czym sama prawda była, według niego, cechą przysługującą przedstawieniom (*Vorstellungen*), czyli również pojęciom istniejącym w sferze intrasubiektywnej[18]. Przedstawieniom przysługiwała prawda (*unsern Vorstellungen Wahrheit zukommt*) wtedy i tylko wtedy, gdy ich przedmioty były rzeczywiste, czyli gdy posiadały one swe odpowiedniki, wzajemnie jednoznacznie przyporządkowane w rzeczywistości transsubiektywnej[19].

Powstaje pytanie, czy wyniki przeprowadzonych dotychczas analiz dają podstawy do wprowadzenia pojęcia prawdy do epistemologii matematyki twórcy teorii mnogości. Przecież zgodnie z dyrektywą metodologiczną Cantora, zakres poznania matematycznego był ograniczony do rzeczywistości intrasubiektywnej. Według niego,

---

[18] Cantor nie sprecyzował znaczenia terminu „przedstawienie", ale zwykło się traktować pojęcia jako jeden z rodzajów przedstawień, mianowicie jako przedstawienia nieoglądowe.

[19] „Nur das begriffliche Wissen soll (nach Plato) eine wahre Erkenntnis gewahren. So viel aber unsern Vorstellungen Wahrheit zukommt - diese Voraussetzung teilt Plato mit andern (Parmenides) - ebensoviel muß ihrem Gegenstand Wirklichkeit zukommen, und umgekehrt". G. Cantor, *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten. Nr 5. Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltig-keitslehre*, 206-207 (przypis do s. 181 - jest to cytat z E. Zeller, *Die Philosophie der Griechen*, Leipzig 1875[3], 541).

matematyk w trakcie wykonywania czynności poznawczych nie powinien się odwoływać do sfery istnienia transsubiektywnego. Nie mógł więc i nie powinien był za każdym razem, gdy definiował nowe pojęcie, ustalać zachodzenia względnie niezachodzenia relacji zgodności między pojęciami matematycznymi a ich odpowiednikami w sferze intrasubiektywnej.

Dla wprowadzenia przyjmowanej przez Cantora koncepcji prawdy do jego epistemologii matematyki można przeprowadzić następujące rozumowanie: gdyby założyć, że język matematyki jest niesprzeczny, to wynika stąd, że wszystkie pojęcia, których definicje są podane, istnieją w rzeczywistości intrasubiektywnej. Ponieważ obie sfery rzeczywistości są izomorficzne, zatem oczywiste jest, że – zgodnie z Cantorowskim określeniem – pojęciom tym „przysługuje prawda".

W takim ujęciu niesprzeczność języka matematyki gwarantuje prawdziwość poznania matematycznego. Ta teza, wprawdzie nie wypowiedziana wprost przez Cantora, a wyprowadzona z tez jego epistemologii i ontologii, była z pewnością zgodna z jego przekonaniami. Znajduje to pośrednie potwierdzenie w wadze, jaką przykładał do niesprzeczności języka matematyki i w motcie jednej z prac: „hipotez nie tworzę"[20].

Twierdzenie ujmujące związek pomiędzy syntaktyczną niesprzecznością języka a prawdziwością pojęć ma charakter metamatematyczny. Zostaje on ujawniony dzięki analogii do współczesnej tezy metamatematyki, orzekającej, że jeżeli zbiór zdań jest niesprzeczny, to posiada model. Z tym że język matematyki nie był dla Cantora dowolnym niesprzecznym zbiorem zdań. Akceptował on w zasadzie wszystkie zdania matematyki, które zastał przed rozpoczęciem swej działalności matematycznej[21]. Zastane zdania zawierały wiedzę bazową matematyki, a następne mogły być dołączane jedynie przy przestrzeganiu reguł dedukcyjnych. Te dwa czynniki determinowały z góry cały zbiór wszystkich możliwych zdań formułowanych w tej dyscyplinie. W tym znaczeniu można twierdzić,

---

[20] „Hypotheses non fingo". G. Cantor, *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre, 1895-97*, w: GA, 282 (282-356). Cantor obok motta zamieścił notatkę wskazującą, że jest to cytat z I. Newtona.

[21] Wyjątek stanowił podzbiór zdań, w których posłużono się pojęciem wielkości nieskończenie małych.

że był to jeden, potencjalny język, któremu odpowiadał jeden model w rzeczywistości intrasubiektywnej[22].

2. PRZEKONANIA ONTOLOGICZNE I TEORIOPOZNAWCZE CANTORA A DALSZY ROZWÓJ FILOZOFII MATEMATYKI

Filozofia matematyki Cantora powstała w wyraźnej opozycji do rozumienia matematyki przez jednego z najbardziej wpływowych przedstawicieli tej dyscypliny naukowej w Niemczech, L. Kroneckera. Ich spór był w istocie, w swych najgłębszych pokładach, sporem z zakresu filozofii matematyki, chociaż na forum publicznym nigdy nie ujawniał się jako takowy. Przybierał dla postronnego obserwatora pozory personalnych animozji.

Obecnie zaprezentowany zostanie krótki zarys Kroneckerowskiej koncepcji matematyki[23] po to, aby pokazać, że jej inspiracje były zupełnie odmienne od przesłanek, na których oparta została filozofia Cantora. Spór obu matematyków, toczony *de facto* na płaszczyźnie ontologii i epistemologii matematyki, stał się pierwszym zwiastunem przyszłych głębokich podziałów wśród matematyków, na tle rozumienia podstaw matematyki.

2.1. SPÓR Z KRONECKEREM – ANTYCYPACJA SPORU FORMALISTÓW Z INTUICJONISTAMI

Syntezę ontologii matematyki L. Kroneckera zawierało jego ulubione powiedzenie: „liczby całkowite stworzył dobry Bóg, wszystko pozostałe jest dziełem człowieka”[24]. W ten sposób istnienie obiektów matematycznych (innych niż liczby całkowite) zostało uzależ-

---

[22] Należałoby uściślić: język ten posiadał jeden model z dokładnością do izomorfizmu, ponieważ drugi model, izomorficzny, istniał w rzeczywistości transsubiektywnej.

[23] Właściwe określenie stanowiska filozoficznego L. Kroneckera wymaga częstego sięgania do opracowań, dla których źródłem są wspomnienia uczestników wykładów i seminariów prowadzonych przez berlińskiego profesora. Informacje na temat filozofii matematyki L. Kroneckera i jego sporu z Cantorem czerpano przede wszystkim z pracy W. Purkerta i H. J. Ilgadusa. (Por. W. Purkert, H. J. Ilgadus, *Georg Cantor*, Leipzig 1985, 35-37, 47-52). Konfliktem Cantora z L. Kroneckerem zajmował się również w swoich publikacjach A. Schoenflies. Por. A. Schonflies, *Zur Erinnerung an Georg Cantor*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 31(1922), 99; Tenże, *Die Krisis in Cantor's mathematischem Schaffen*, Acta Mathematica 46(1927)50, 3-16 (1-27).

[24] „Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk”. H. Weber, *Leopold Kronecker*, Mathematische Annalen 26(1893)43, 23.

nione od aktywności ludzkiego rozumu. Są one konstruowane, a nie odkrywane, jak w przypadku Cantorowskiej i wszystkich innych koncepcji matematyki pochodzenia platońskiego.

Powiedzenie L. Kroneckera z góry negowało istnienie przedmiotów matematycznych w Cantorowskiej rzeczywistości transsubiektywnej, niezależnie od tego, czy była ona rozumiana jako „niebo idei" Platona, czy też jako rzeczywistość materialna, nawet ustrukturalizowana przez kategorię zbioru. Zatem przedmioty matematyczne bytowały – i to wyłącznie tylko te gotowe, już skonstruowane – jedynie w rzeczywistości intrasubiektywnej, aczkolwiek, jak można przypuszczać, niezależnie od indywidualnych aktów myślenia. Tym samym należy stwierdzić, iż podstawowa teza Kroneckerowskiej filozofii matematyki była tezą ontologicznego konceptualizmu. Teza ta jest jednocześnie świadectwem kantowskich inspiracji w zakresie filozofii matematyki. Tym bardziej, że sugeruje oparcie całej matematyki na pojęciu liczby całkowitej, tyle że nie jest ono w przypadku L. Kroneckera redukowane do intuicyjnego pojęcia czasu, lecz w jakiś bliżej nieokreślony sposób dane umysłowi ludzkiemu (przez Boga?)[25].

Dalszą konsekwencją przyjętego konceptualizmu było – jak się wydaje – zdecydowane odrzucenie nieskończoności aktualnej. Skoro bowiem każdy przedmiot matematyki jest ludzką konstrukcją, zatem nie może ich istnieć nieskończenie wiele, bowiem umysł ludzki nie może wykonywać nieskończenie wielu konstrukcji. Stąd odrzucenie istnienia liczb niewymiernych, dla których konstrukcji trzeba było – jak uczynił to Cantor – przyjąć istnienie nieskończenie wielu nieskończonych ciągów liczb wymiernych[26].

---

[25] Jedno zresztą nie wyklucza drugiego. W tym względzie pomiędzy koncepcją matematyki I. Kanta i L. Kroneckera występuje jednak pewna istotna różnica. L. Kronecker głoszący pogląd o możliwości arytmetyzacji całej matematyki („alle Ergebnisse der tiefsinnigsten mathematischen Forschung schließlich in jenen einfachen Formen ganzer Zahlen ausdrückbar sein mussen". L. Kronecker, *Über den Zahlenbegriff*, w: L. Kronecker, *Werke*, Leipzig-Berlin 1899, Bd 3/1, 274) nie potrzebował dla ufundowania podstaw matematyki intuicyjnego pojęcia przestrzeni, które jest fundamentalne w Kantowskiej filozofii matematyki, a konkretniej, w filozofii geometrii. Por. I. Dąmbska, *Idee kantowskie w filozofii matematyki XX wieku*, Archiwum Historii Filozofii i Myśli Społecznej 34(1978), 173.

[26] „(...), soll man die Hinzunahme der irrationalen sowie der continuirlichen Grössen wieder abstreifen". L. Kronecker, *Über den Zahlenbegriff*, w: L. Kronecker, *Werke*, Leipzig–Berlin 1899, Bd 3/1, 253.

Inną konsekwencją konceptualizmu był brak akceptacji, na gruncie Kroneckerowskiej filozofii matematyki, dla istnienia pozaskończonych liczb kardynalnych (ewentualnie poza $\aleph_0$).

Odrzucanie istnienia nowych pojęć, wprowadzanych do matematyki przez Cantora, harmonizowało z kantowską opcją w ontologii matematyki, przyjętą przez L. Kroneckera. Niesprzeczność definicji nie stanowiła w przekonaniu berlińskiego profesora warunku wystarczającego istnienia definiowanych pojęć, a jedynie warunek konieczny. Według niego wszystkie definicje musiały być rozstrzygalne, to znaczy, musiała być dana procedura, która w skończonej (z oczywistych względów) liczbie kroków pozwalałaby rozstrzygać, czy dany przedmiot odpowiadał danej definicji, czy też nie. Wspomniana procedura wymagała w istocie podania konstrukcji przedmiotu odpowiadającego warunkom definicji. Istnienie definiowanego przedmiotu było zdeterminowane jego konstruowalnością.

Z powyższego opisu można wyciągnąć generalny wniosek, że kryterium istnienia w Kroneckerowskiej filozofii matematyki stanowiła koniunkcja dwu warunków: niesprzeczności i konstruowalności[27]. Zubażało to znacznie konstruktywistyczną matematykę L. Kroneckera w stosunku do matematyki Cantorowskiej.

Istotne różnice obydwu tradycji filozoficznych, ku którym skłaniali się z jednej strony Cantor, zaś z drugiej L. Kronecker, powodowały, że dla profesora berlińskiego praktycznie cała Cantorowska teoria mnogości była nie do zaakceptowania. Nie tylko z powodu odmiennych poglądów dotyczących sposobu definiowania pojęć, lecz również ze względu na dopuszczenie odmiennych metod dowodowych. L. Kronecker wymagał, aby oparte one były na zasadach finityzmu oraz, w wypadku dowodów twierdzeń egzystencjalnych, by miały charakter konstruktywny. Najlepszym sposobem unaocznienia owych niezgodności i ich przyczyn będzie prezentacja sposobu dowodzenia przez Cantora egzystencjalnej

---

[27] Według I. Kanta dokładnie te same dwa warunki musiały zostać spełnione, aby dany przedmiot mógł zostać uznany za istniejący (oczywiście przy założeniu, że zarówno dla I. Kanta, jak i L. Kroneckera konstruowalność oznaczała to samo, czego rozstrzygnąć się nie da): „Um die Möglichkeit eines Dinges zu beweisen, es damit nicht genug sey, in seinem Begriffe keine Widersprüche zu finden, sondern es müsse den Gegenstand des Begriffs im Verstande machen können". I. Kant, *Über Kästners Abhandlungen*, w: *Kant's Gesammelte Schriften*, hrsg. von der Akademie der Wissenschaften, Bd 20, Berlin 1889, 410.

tezy o istnieniu liczb transcendentalnych[28] (przestępnych) oraz zarzutów L. Kroneckera.

Rozumowanie Cantora, dowodzące istnienia liczb transcendentalnych[29], przebiegało następująco:

(1) Niech A będzie zbiorem wszystkich liczb algebraicznych z przedziału liczb rzeczywistych (0, 1). Na podstawie zasady wyłączonego środka[30] prawdziwe jest zdanie:

$\prod_{x\in(0,1)} (x\in A) \vee \sim\prod_{x\in(0,1)} (x\in A)$ (2)

Zdanie to, zgodnie z regułami rachunku kwantyfikatorów, można Przekształcić następująco:

$\prod_{x\in(0,1)} (x\in A) \vee \sum_{c\in(0,1)} \sim(c\in A)$ (3)

Przy założeniu, że prawdziwy jest pierwszy człon alternatywy (3), i uwzględnieniu, że zbiór liczb naturalnych jest równoliczny ze zbiorem liczb algebraicznych, można wywnioskować, iż zbiór liczb naturalnych jest równoliczny ze zbiorem liczb rzeczywistych, co stanowi sprzeczność. Zatem zgodnie z zasadami klasycznego rachunku zdań prawdziwy jest drugi człon alternatywy (3). Jeśli przez T oznaczyć zbiór wszystkich liczb rzeczywistych z przedziału (0,1), które nie są liczbami algebraicznymi (są zatem liczbami transcendentalnymi, przestępnymi), wówczas prawdziwe jest zdanie:

$\sum_{c\in(0,1)} (c\in T)$ (4)

Zatem – taki Cantor wyciągnął wniosek – istnieje liczba transcendentalna c.

W ten sposób prowadzone rozumowanie nie pozwala jednak orzec o żadnej konkretnej liczbie rzeczywistej, że jest ona liczbą przestępną. Nie podano w dowodzie żadnej procedury określającej sposób konstrukcji jakiejkolwiek liczby przestępnej. Wobec tak rozumianego niekonstruktywnego charakteru dowodu należało, zdaniem L. Kroneckera, odrzucić konkluzję, w której stwierdzono istnienie liczby transcendentalnej c.

---

[28] Por. G. Cantor, *Über eine Eigenschaft des Inbegriffs aller reellen algebraischen Zahlen*, 1874, w: GA, 119-133.

[29] Dowód Cantora jest przedstawiony za pomocą współczesnej notacji kwantyfikatorowej.

[30] Cantor akceptował tę zasadę, podobnie jak całą klasyczną logikę zdań i predykatów.

Ponieważ zaś wiele dowodów w pozaskończonej teorii mnogości Cantora posiadało w pojęciu L. Kroneckera taki właśnie, niekonstruktywny charakter, dlatego należało całą teorię mnogości wykluczyć z matematyki[31].

Trzeba postawić pytanie, co z punktu widzenia L. Kroneckera można było uczynić, aby tego typu dowody nie były prowadzone. Przecież dowody niekonstruktywne należały do istoty analizy matematycznej, w jej tradycyjnym, dziewiętnastowiecznym ujęciu, rozwiniętym przez A. Cauchy'ego, B. Bolzana i w szkole K. Weierstrassa[32]. Czy oprócz krytycznych uwag o ich niekonstruktywnym charakterze można było od strony formalnej zakwestionować ich poprawność? Ewentualnie, jak określić formalne wymogi wobec rozumowań matematycznych, aby tego rodzaju dowody wyeliminować?

Przy pełnej akceptacji zasad logiki klasycznej (zdań i kwantyfikatorów), na których oparte były reguły wnioskowania, Cantorowskiemu dowodowi istnienia liczb transcendentalnych nic nie można było zarzucić. Każdy następny krok logicznie wynikał ze zdań wcześniej wprowadzonych w procesie dowodowym i ze zdań wcześniej zaakceptowanych w matematyce (twierdzeń oraz definicji). Zatem jedynym sposobem zakwestionowania, od strony formalnej, dowodu mogło być ewentualnie zakwestionowanie punktu wyjścia, czyli prawdziwości zdania (2). Ponieważ jednak zdanie (2) to nic innego jak egzemplifikacja, uszczegółowienie zasady wyłączonego środka, zakwestionowanie prawdziwości zdania (2) było identyczne z odrzuceniem zasady wyłączonego środka $(p \vee \sim p)$[33].

Kroneckerowska krytyka dowodów niekonstruktywnych, wynikająca z przyjętych założeń konceptualistycznych, niosła więc w sobie, wówczas jeszcze ukrytą, negację jednej z podstawowych zasad

[31] Por. A. Schoenflies, *Die Krisis in Cantors mathematischen Schaffen*, Acta Mathematica 46(1927)50, 13.

[32] Sam K. Weierstrass był ostro atakowany przez L. Kroneckera za niekonstruktywne dowody w analizie, na przykład za twierdzenie o istnieniu górnej granicy ograniczonego zbioru liczb rzeczywistych. Por. W. Purkert, H. J. Ilgadus, *Georg Cantor*, Leipzig 1985, 47.

[33] A jeśli tak, to można było kwestionować i inne zasady logiki, na których oparty był dowód Cantora. Na przykład prawa de Morgana, dzięki którym przekształcono zdanie (2) w (3). Tak też czynią intuicjoniści, którzy oprócz zasady wyłączonego środka odrzucają prawa de Morgana.

logiki klasycznej. Równocześnie stanowiła pierwszy zwiastun pomysłu tworzenia logik nieklasycznych[34].

Spór Cantora z L. Kroneckerem, który w swej najgłębszej warstwie – jak to pokazano – był sporem pomiędzy konceptualizmem a skrajnym realizmem typu platońskiego, miał zatem swoje skutki w sposobie uprawiania matematyki. Implikował też ponowne przemyślenie kwestii akceptowalności zasad logiki klasycznej.

To, co dla Cantora stało się podstawą matematyki – teoria mnogości, w oparciu o którą chciał budować arytmetykę liczb naturalnych i całą matematykę – było przez L. Kroneckera usuwane poza nawias matematyki. Jego rygoryzm prowadził do zubożenia tej dyscypliny nauki[35]. Natomiast Cantor, formułując zarysy swej ontologii i epistemologii matematyki po to, by bronić przed atakami L. Kroneckera teorii pozaskończonych liczb porządkowych i kardynalnych, stał się teoretykiem i obrońcą (na płaszczyźnie filozofii) zasad – wcześniej wyraźnie nie formułowanych, ale dla przedstawicieli szkoły weierstrassowskiej oczywistych – wzorca uprawiania matematyki, który funkcjonował od dawna i w którym się wychował[36].

---

[34] Niekonstruktywność dowodów matematyki stała się przyczyną krytyki logiki klasycznej przez intuicjonistów. L. Brouwer negował przede wszystkim prawo wyłączonego środka oraz prawo podwójnego przeczenia, a także prawa de Morgana. Program intuicjonistów nie był tylko negatywny, bowiem krytyka wymienionych praw zmusiła ich do nadania nowego sensu spójnikom logicznym oraz kwantyfikatorom i przedstawienia w postaci formalnego systemu logiki dostosowanej do nowego rozumienia spójników i kwantyfikatorów, co uczynił A. Heyting w roku 1930.

[35] L. Kroneckerowi udało się niektóre, rozwinięte przez siebie teorie zbudować zgodnie z głoszonymi zasadami konstruktywizmu, na przykład teorię ideałów w algebraicznych ciałach liczbowych. W innych pracach opierał się jednak całkowicie na zasadach tradycyjnej analizy. Por. W. Purkert, H. J. Ilgadus, dz. cyt., 35-36.

[36] Obrona zastanej matematyki, zatem i obrona dotychczasowego wzorca jej uprawiania (z – jak można się domyślać – akceptacją niesprzeczności jako wystarczającego warunku istnienia i dowodów niekonstruktywnych) sformułowana została przez Cantora *explicite*: „Wären Gauß, Cauchy, Abel, Jacobi, Dirichlet, Weierstraß, Hermite und Riemann verbunden gewesen, ihre neuen Ideen stets einer metaphysischen Kontrolle zu unterwerfen, wir würden uns frühwar nicht des großartigen Aufbaues der neueren Funktionentheorie zu erfreuen haben, (...); und wenn Kummer die folgenreiche Freiheit der Einführung sogenannter ‚idealer' Zahlen in die Zahlentheorie sich nicht genommen haben würde, wir waren heute nicht in der Lage, die so wichtigen und vorzüglichen algebraischen und arithmetischen Arbeiten Kroneckers und Dedekinds zu bewundern". G. Cantor, *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten. Nr 5. Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*, 183.

2.2. W KIERUNKU FORMALIZMU - FORMALIZM METODYCZNY

Jest oczywiste, że koncepcja matematyki, prezentowana przez L. Kroneckera, stanowiła zapowiedź przyszłego nurtu w filozofii matematyki, zwanego intuicjonizmem - była praintuicjonizmem. Rodzi się problem, na ile Cantorowska filozofia matematyki zapowiadała kierunek formalistyczny, uwikłany w spór na temat podstaw matematyki z intuicjonizmem kilkadziesiąt lat po apogeum kontrowersji Cantor - L. Kronecker. Odpowiedź pozwoliłaby nie tylko stwierdzić, na ile kontrowersja ta była antycypacją sporu formalistów z intuicjonistami, lecz również, co jest o wiele donioślejsze, wskazać, w jakim stopniu, na płaszczyźnie refleksji filozoficznej (ontologicznej i epistemologicznej), prace Cantora przygotowały powstanie kierunku formalistycznego w filozofii matematyki.

Chociaż może się to wydawać paradoksalne, bowiem Cantorowska filozofia oparta była na założeniach platońskich, to jednak wydaje się, że właśnie ona stanowiła istotny krok w kierunku stanowiska formalistycznego w zakresie tego, czym są przedmioty, którymi zajmuje się matematyka.

Cantor z jednej strony potwierdzał, że obiektami matematycznymi są pojęcia istniejące w rzeczywistości intrasubiektywnej. Co więcej, ze względu na zachodzący izomorfizm są nimi poniekąd również obiekty należące do rzeczywistości transsubiektywnej. Z drugiej strony w jego filozofii matematyki zawarta została, po części w sposób wyraźny, po części *implicite*, pewna reguła metodologiczno-ontologiczna, którą można by nazwać „zasadą podwójnej redukcji ontologicznej". Zasada ta stanowi egzemplifikację charakterystycznego dla późniejszego formalizmu dążenia do uniezależnienia konstrukcji matematycznych od strony znaczeniowej pojęć matematycznych[37].

Nazwa reguły wskazuje, że wspomniana redukcja dokonywałaby się w dwu etapach. Pierwszy etap został wyraźnie scharakteryzowany przez Cantora w tezie, orzekającej, że w zupełności wystar-

---

[37] J. W. Dauben zauważył, że Cantor już w roku 1872, kiedy wprowadzał liczby niewymierne jako ciągi podstawowe liczb wymiernych, przejawiał tendencję do uniezależnienia konstrukcji matematycznych od strony znaczeniowej pojęć matematycznych: „Cantor embraced a formalist position on the existence of the irrationals and he argued that only grounds on which their legitymacy was to be judged in mathematics were their formal and internal consistency". J. W. Dauben, *Georg Cantor and the origins of transfinite set theory*, Scientific American 138(1983)6 (248), 127 (112-131).

cza, aby zbiór obiektów, jakimi zajmuje się matematyka, zawęzić do pojęć w rzeczywistości intrasubiektywnej.

Drugi etap może zostać zrekonstruowany na podstawie przesłanek zawartych w Cantorowskiej ontologii i epistemologii. Twórca teorii mnogości był przekonany o możliwości stworzenia jednego i jednoznacznego języka matematyki. Zbiór predykatów jednoargumentowych (nazw ogólnych) tego języka byłby związany z pojęciami w rzeczywistości intrasubiektywnej relacją F, będącą funkcją wzajemnie jednoznaczną. Poznanie nowego obiektu matematyki (= zdefiniowanie) polegało zaś na wybraniu jakiejś nazwy „A", należącej do charakteryzowanego języka, która nie była niczym innym jak właśnie samym znakiem „A"[38], i zdefiniowaniu pojęcia przez stosowny dobór predykatów. Jeśli definicja była poprawna, to pojęcie odpowiadające znakowi „A" należało uznać za istniejące w sferze intrasubiektywnej i poznane.

Niemniej matematyk, wprowadzający nowe pojęcie odpowiadające znakowi „A", w ogóle nie musiał, nie był zobowiązany, przy okazji budowania jakiejkolwiek definicji, do konstatowania istnienia pojęcia odpowiadającego znakowi „A" w rzeczywistości intrasubiektywnej. Matematyk, próbujący uwiarygodnić pojęcie i sprawdzający metodą prób i błędów, czy pojęcie odpowiadające znakowi „A" nie jest sprzeczne, nadal pracował w sferze języka matematyki. Wykonywał te operacje i przekształcenia na znakach już wprowadzonych, które dopuszczały przyjmowane reguły wnioskowania. Innymi słowy: dla matematyka wyposażonego w określone przez Cantora zasady poznania (= definiowania) i dopuszczone reguły wnioskowania (przekształcania zdań) mogło być zupełnie obojętne, co w rzeczywistości intrasubiektywnej odpowiadało znakowi „A" oraz znakom należącym już wcześniej do języka matematyki.

Odwoływanie się do intrasubiektywnej rzeczywistości pojęć było na każdym etapie poznania matematycznego zbędne, poznanie sprowadzało się *de facto* do przekształceń językowych, operacji na znakach, symbolach językowych. Zatem drugi etap zasady podwójnej redukcji ontologicznej Cantora zawężał perspektywę ontologiczną matematyki, ograniczał matematykę do języka.

---

[38] „(...) man setzt ein eigenschaftsloses Ding, das zuerst nicht anderes ist als ein Name oder ein Zeichen A".

Ponieważ matematykę można w tym ujęciu uprawiać tak, jakby symbole językowe były jej jedynymi przedmiotami i jakby nieistotne było, co w rzeczywistości odpowiada nazwom-znakom, zatem zasada podwójnej redukcji ontologicznej wprowadzała do filozofii matematyki quasi-nominalizm, a samą zasadę przez analogię można by nazwać „podwójną brzytwą Cantora".

Quasi-nominalizm był pierwszym zwiastunem nominalizmu w formalistycznej filozofii matematyki. Nominalizm, po zabiegu formalizacji, w którym to procesie doniosłe było ustalenie pewnego sztucznego języka, pozwolił na traktowanie każdego zdania matematyki jako skończonego ciągu symboli owego języka, zaś każdego dowodu jako skończonego ciągu formuł. Był to najistotniejszy krok w stronę badania metodami finistycznymi symboli-przedmiotów matematyki, a więc do badań metamatematycznych, które należały do istoty programu przyszłej szkoły hilbertowskiej.

Należy zatem postawić tezę, że platonik Cantor, formułując dyrektywę quasi-nominalistyczną, redukującą w praktyce ontologiczną perspektywę matematyki do znaków języka, stał się pierwszym zwiastunem formalistycznej filozofii matematyki. W tym znaczeniu jego filozofia matematyki zasługuje na miano „metodycznego formalizmu".

Powyższe analizy wskazują, że Cantor wywarł zasadniczy wpływ na powstanie szkoły formalistycznej nie tylko na płaszczyźnie matematyki. Jednym z istotnych zadań, stawianych przez D. Hilberta i jego uczniów, była obrona całej dotychczasowej matematyki. W dobie kryzysu podstaw, wywołanego stwierdzeniem antynomii, oznaczało to przede wszystkim zachowanie jak największej części Cantorowskiej teorii mnogości. Należy przy tej okazji zaznaczyć, iż zarówno Cantor, jak i formaliści, bronili nieskończoności aktualnej w matematyce.

Wpływu Cantora na formalistów nie można zacieśniać jedynie do płaszczyzny przedmiotowej. Twórca teorii mnogości, przez swój metodyczny formalizm, wpłynął też na zmianę sposobu myślenia o matematyce, na sposób podejścia do kwestii istnienia przedmiotów matematyki i poznania w tej dyscyplinie naukowej. Zatem stał się tym, który na płaszczyźnie filozofii przygotował założenia niemieckiej szkoły formalistycznej.

Oczywiście, określenie Cantorowskiej filozofii matematyki mianem „metodycznego formalizmu" może budzić pewne zastrzeżenia. Przede wszystkim twórca teorii mnogości nie wysunął wymogu formalizacji języka matematyki. To prawda, ale z drugiej strony wiele jego dowodów i konstrukcji matematycznych było przeprowadzanych w taki sposób, że wprost nadają się do zapisu w języku sformalizowanym. Wystarczy wskazać na model teorii liczb rzeczywistych w dziedzinie ciągów podstawowych liczb wymiernych.

Najpoważniejszy zarzut w tym zakresie jest taki, że Cantor nie dostrzegał potrzeby aksjomatyzacji teorii matematycznych. Wynikało to stąd, że po prostu zaakceptował on zastaną wiedzę matematyczną jako pewną bazę, która nie podlegała dyskusji. Trzeba też podkreślić, że aksjomatyzacja teorii mnogości nie była palącą potrzebą przed stwierdzeniem antynomii. Poza tym, jak się wydaje, Cantor był jak najdalej od rozumienia zbioru aksjomatów jako uwikłanych definicji pojęć pierwotnych. To bowiem łączy się z rodzajem konwencjonalizmu, możliwością swobodnego determinowania u samych podstaw własności przedmiotów matematycznych i budowania teorii podających różne własności tych samych (z nazwy) przedmiotów. Konwencjonalizm był sprzeczny z przekonaniem Cantora, że język matematyki posiadał jeden jedyny model z dokładnością do izomorfizmu.

Przedstawione zarzuty w niczym nie podważają tezy, że prace Cantora, w ich warstwie ontologicznej i epistemologicznej, przygotowały filozofię matematyki szkoły formalistycznej. Dlatego jego koncepcje w tym zakresie można zasadnie uznać za metodyczny formalizm, w znaczeniu scharakteryzowanym powyżej.

3. ZAKOŃCZENIE

Celem pracy była prezentacja i rekonstrukcja założeń filozoficznych Cantorowskiej teorii mnogości. Wynikiem badań prowadzonych w tym zakresie jest sugestia, iż dość rozpowszechnione opinie o jednoznacznie platońskiej orientacji ontologii Cantora stanowią pewne uproszczenie. W wyniku przeprowadzonych analiz udało się wyodrębnić dwie składowe tej ontologii. Pierwsza została roboczo nazwana „składową spinozjańsko-fichteańską”, natomiast druga „platońską”.

Wątek spinozjańsko-fichteański uwidocznił się przede wszystkim w oparciu ontologii Cantora na dwu tezach. Według jednej cała rzeczywistość jest dualna, składa się z dwu sfer: trans- i intrasubiektywnej. Druga stwierdza izomorfizm (paralelizm) obydwu rzeczywistości. Charakterystyka obydwu sfer okazała się jednak niemożliwa bez uwzględnienia składowej platońskiej. Na tym etapie badań można było jedynie negatywnie stwierdzić, iż przyjęty podział rzeczywistości nie pokrywał się ze Spinozjańskim rozróżnieniem dwu opozycyjnych i jednocześnie dopełniających się atrybutów substancji – rozciągłości i myśli. Wynikało to z uwagi Cantora, iż do sfery transsubiektywnej należy również zaliczyć obiekty natury duchowej. Przejął on od Spinozy schemat ontologiczny – wyrażony dwoma wspomnianymi twierdzeniami – ale wypełnił go inną treścią.

Składowa platońska[39] ontologii Cantora ujawniona została w trakcie rekonstrukcji jego stanowiska w zakresie klasycznego sporu

---

[39] Filozofia Cantora stanowiła przejaw krótkiego, ale owocnego renesansu platonizmu w epistemologii, przede wszystkim w epistemologii nauk logiczno-matematycznych. Do połowy XIX wieku przestrzeń poglądów filozoficznych była zasadniczo zdominowana przez dwa główne nurty. Z jednej strony był to krytyczny idealizm typu niemieckiego, który inspirował wiele odmian psychologizmu. Na drugim biegunie dominowały: empiryzm, pozytywizm i materializm, zawdzięczające swą pozycję rozwijającym się burzliwie naukom przyrodniczym, w których doniosłą rolę odgrywał wówczas eksperyment. Żaden z tych kierunków filozoficznych nie gwarantował jednak stosownego zaplecza ontologicznego i epistemologicznego naukom logiczno-matematycznym. Dla matematyków owego okresu wyniki tych nauk miały charakter obiektywny, powszechnie obowiązujący, zatem nie wolno ich było uzależniać od immanentnych uwarunkowań ducha oraz od subiektywnych struktur ludzkich procesów myślenia i przedstawiania. Por. R. Carls, *Idee und Menge. Der Aufbau einer kategorialen Ontologie*, München 1974, 22-24. Odrzucenie pozytywizmu i empiryzmu jako epistemicznej bazy matematyki i logiki miało inne podstawy. Prawa tych nauk posiadały, przynajmniej dla tych, którzy byli w ich rozwój aktywnie zaangażowani, taki stopień pewności, że żaden rodzaj poznania zmysłowego i żadna indukcja nie były w stanie go zagwarantować. Jedynym rozwiązaniem pozostało sięgnięcie do filozofii przedkantowskiej. Wiązało się to z renesansem myśli B. Bolzana (działał on wprawdzie po I. Kancie, ale był zupełnie zapomniany do drugiej połowy XIX wieku), G. W. Leibniza i przede wszystkim Platona. Koncepcje nauk formalnych wielu wybitnych matematyków i logików drugiej połowy XIX wieku, takich jak C. S. Peirce, G. Frege, R. Dedekind, G. Cantor, G. Peano, pracujących nad podstawami owych nauk, spotkały się na gruncie platonizmu przede wszystkim dzięki akceptacji skrajnego realizmu pojęciowego. Por. R. Carls, dz. cyt., 22-24. Platonizm, dający odpowiedź na pytania o solidną, pewną ontologię i epistemologię matematyki i logiki, stał się pośrednio źródłem wielu dokonań w zakresie przedmiotowym matematyków i logików owego okresu. Równocześnie stanowił pomoc dla obrony dotychczasowego dorobku matematyki przed atakami praintuicjonistów (L. Kronecker). Owszem, platonizm ten nie był wolny od naleciałości, których źródłem był niemiecki idealizm. Wystarczy tu wskazać chociażby na Cantorowską sferę rzeczywistości intrasubiektywnej. Najistotniejsze jednak wydaje się to, że między innymi dzięki filozofii matematyki Cantora, która w istocie swej platońska, była jednocześnie rodzajem formalizmu metodologicznego i zawierała tezę quasi-nominalizmu, stworzone zostały w dobie renesansu platonizmu przesłanki dla sformułowania istotnych założeń kierunku formalistycznego.

o uniwersalia. Z tekstów Cantora należy wnioskować, iż był on zwolennikiem skrajnego realizmu, który wyraża się akceptacją dwu tez:

1. Dla każdego jednoargumentowego predykatu istnieje byt abstrakcyjny (a więc pozaczasowy i pozaprzestrzenny);
2. Byty abstrakcyjne można traktować jako indywidualne, stanowiące jedność przedmioty.

Bytem abstrakcyjnym w ontologii Cantora jest zbiór rozpatrywany w aspekcie jedności. Zbiór został scharakteryzowany komplementarnie jako coś pokrewnego z Platońską ideą oraz przez przyjmowane *implicite* aksjomaty: nieograniczonej komprehensji i ekstensji.

Uwzględnienie wątku platońskiego pozwala na bliższą charakterystykę obu Cantorowskich sfer istnienia: intrasubiektywnej i transsubiektywnej. Pierwsza z nich to sfera istnienia pojęć. Ma ona jednak specyficzny, podwójny status, nie tylko ontyczny, ale również poznawczy. W tym drugim aspekcie posiada cechy obiektywnego, to znaczy niezależnego od jakiegokolwiek podmiotu aktualnie poznającego, porządku poznawczego. Intelegibilność Cantorowskiej sfery intrasubiektywnej w porządku poznawczym została zagwarantowana – co należy jeszcze raz mocno podkreślić – dzięki uwzględnieniu składowej platońskiej. W innym wypadku należałoby się zdecydowanie dopatrywać w ontologii Cantora jakiejś formy idealizmu subiektywnego typu berkeleyowskiego lub idealizmu charakterystycznego dla niemieckiej filozofii poheglowskiej.

Rzeczywistość transsubiektywna była definiowana przez Cantora jako sfera zewnętrzna w stosunku do rzeczywistości intrasubiektywnej. W wyniku przeprowadzonych analiz należy do niej zaliczyć przedmioty konkretne (czasowe i przestrzenne) oraz byty abstrakcyjne (pozaprzestrzenne i pozaczasowe), czyli zbiory-idee, i to zarówno w aspekcie wielości, jak i jedności. Zbiory-idee stanowią izomorficzne obrazy pojęć istniejących w rzeczywistości intrasubiektywnej. Sfera transsubiektywna nie jest ustrukturalizowana zgodnie z Russellowską teorią typów. Nie można z niej wydzielić trzeciej sfery istnienia – platońskiej sfery bytu idealnego. Stanowi to następstwo przejęcia przez Cantora Spinozjańskiej tezy o dualizmie izomorficznych sfer rzeczywistości.

W kwestii źródeł poznania stanowisko Cantora można, na planie opozycji aprioryzm – aposterioryzm, określić jako skrajny aprioryzm. Poznanie to właściwe, czyli niesprzeczne definiowanie pojęć.

Cantor powtarza w istocie naukę Platona o wiedzy wrodzonej. W problematykę prawdy uwikłane zostały zagadnienia istnienia i niesprzeczności. Aczkolwiek Cantor mówi o niesprzeczności pojęć w rzeczywistości intrasubiektywnej, to jednak w istocie – jak wykazały prowadzone analizy – jest ona własnością języka. Twórca teorii mnogości był przekonany o możliwości stworzenia idealnego języka, w którym dziedzina predykatów jednoargumentowych byłaby izomorficzna z dziedziną pojęć w rzeczywistości intrasubiektywnej, a zatem izomorficzna z dziedziną zbiorów-idei w rzeczywistości transsubiektywnej. Uwidoczniła się tu tendencja typowa dla orientacji platońskiej, według której język nie jest kształtowany dowolnie, ale „odzwierciedla" pozajęzykową rzeczywistość. Zdefiniowanie, w sposób niesprzeczny, nowego predykatu jednoargumentowego stanowiło warunek konieczny i wystarczający istnienia pojęcia w rzeczywistości intrasubiektywnej oraz – w konsekwencji izomorfizmu – jego odpowiednika w sferze transsubiektywnej. Niesprzeczność syntaktyczna gwarantowała prawdziwość pojęć, rozumianą jako relacja ich semantycznej zgodności z odpowiednikami w rzeczywistości transsubiektywnej. Uzasadniono też, iż sformułowane przez Cantora kryterium istnienia obiektów matematycznych uniezależniało poznanie w matematyce nie tylko od jakiejkolwiek formy odwoływania się do rzeczywistości transsubiektywnej, ale i do intrasubiektywnej sfery istnienia pojęć. Redukowało je do syntaksy języka matematyki. Można ją było uprawiać tak, jakby jej jedynymi obiektami były znaki-symbole.

Na takich logicznie pierwotnych założeniach ontologicznych, poznawczych, a także należących do zakresu filozofii języka opierał Cantor swoje przekonanie o istnieniu i poznawalności pojęć matematycznych, przede wszystkim liczb pozaskończonych[40]. Ewoluująca idea tych liczb stanowiła istotę jego teorii mnogości. Dlatego należy uznać inspirującą rolę opisanych założeń filozoficznych w powstaniu nowej teorii. Wykazano też, iż przyjmowana przez Cantora ontologia mogła spełnić istotną funkcję heurystyczną w zdefiniowaniu liczby kardynalnej jako zbioru (pojęcia) zbiorów równolicznych. Stanowiło to istotny krok w kierunku uznania teorii mnogości za podstawową teorię matematyki.

---

[40] Por. G. Cantor, *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten. Nr 5. Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*, 181-183, 206-207.

ONTOLOGISCHE UND ERKENNTNISTHEORETISCHE VORAUSSETZUNDEN DER MENGENLEHRE GEORG CANTORS (II)

Zusammenfassung

In der Frage der Quellen der Erkentniss entschied sich Cantor, konsequent – wie in der Ontologie – für die Platonische Antwort: für den äußersten Apriorismus. Er akzeptierte auch die Platonische Lehre über das angeborene Wissen. In der Frage der Wahrheit, welche er klassisch verstehen hatte, hat er auch die Frage der Unwidersprüchlichkeit der Sprache, als der notwendigen und hinreichenden Bedingung der Existenz der Begriffen, die in der Sprache vorkommen, und ihrer transsubiektiven Korelaten, verwickelt. Die ontologischen und erkenntnistheoretischen Voraussetzungen der Cantorschen Mengenlehre waren die eigentlichen Gründe seines Streits mit Kronecker. Der berliner Proffesor, der die kantischen Voraussetzungen angenommen hatte, hat eine Konstruktion der mathematischen Obiekte, als notwendige Bedingung ihrer Existenz, gefordert. Während des Streites, in dem Kronecker konsequent den kantischen Konstruktiwismus verteidigt hatte, hat er *implicite*, als der erste in der Geschichte, die intuizionistische Logik in der Mathematik, angenommen.