Michał Tempczyk

Nowa matematyka chaosu

Studia Philosophiae Christianae 40/2, 197-207

2004

Studia Philosophiae Christianae
UKSW
40(2004)2

MICHAŁ TEMPCZYK
Instytut Filozofii UMK, Toruń

NOWA MATEMATYKA CHAOSU

Teoria chaosu jest nowym, całościowym podejściem do złożonych układów dynamicznych. Powstała ona stosunkowo niedawno i rozwija się dynamicznie, obejmując swym zasięgiem coraz więcej dziedzin nauk empirycznych. Ten szybki rozwój i sukcesy w rozwiązywaniu problemów, które jeszcze kilkadziesiąt lat temu były nierozwiązalne lub zbyt trudne dla naukowego potraktowania, jest skutkiem wielu zmian, jakie dokonały się w nauce w ostatnim półwieczu. Jednym z czynników najczęściej analizowanych przy omawianiu tego zagadnienia jest budowa coraz lepszych komputerów, dzięki którym można dokonywać trudnych obliczeń i porządkować ogromne zbiory danych empirycznych. Innym ważnym źródłem tej teorii było powstanie nowych działów matematyki, w ścisły formalny sposób badających dynamikę i specyficzne własności układów złożonych. Układy dynamiczne były badane od kilkuset lat przez mechanikę klasyczną, dla której potrzeb stworzono jeden z najważniejszych działów matematyki – rachunek różniczkowy i całkowy. Mając to na uwadze, nie można powiedzieć, że teoria chaosu, nazywana także dynamiką nieliniową, jest nową dziedziną badań, obejmującą swym zakresem zjawiska, które do czasu jej powstania były przez uczonych pomijane ze względu na zasadnicze trudności w ich opisie i zrozumieniu. Z tego punktu widzenia dynamika nieliniowa jest kontynuacją mechaniki klasycznej i pokrewnych jej dziedzin, takich jak hydrodynamika i w związku z tym trudno jest czasami jednoznacznie stwierdzić, gdzie przebiega granica między teoriami starymi i ich kontynuacją w ramach teorii chaosu. Tym zagadnieniem nie będziemy się zajmować, ograniczając zakres naszych rozważań do matematycznych teorii stanowiących składniki dynamiki nieliniowej. Teorie te także wyrosły przeważnie z teorii starszych jako ich kontynuacja i rozwinięcie pewnych ważnych zagadnień szczegółowych. Zagadnienia te okazały się często tak ważne i ciekawe, że matematycy, pracując nad nimi, stworzyli nowe działy matematyki lub w istotny sposób zmodyfikowali stare. Przykładem teorii nowej jest teoria ergodyczna, natomiast przykładem teorii starej, lecz zasadniczo przekształconej – jakościowa teoria równań różniczkowych. Celem naszych rozważań będzie pokazanie, na czym polega istota tych zmian. Możemy sformułować to w postaci pytania: Skoro teoria chaosu bada układy dynamiczne, które były od dawna przedmiotem badań różnych działów fizyki, to na czym polega jej nowość, dzięki której można uznać ją za teorię samodzielną, inną od teorii, z których wyrosła? Powtórzmy, że interesują nas matematyczne aspekty tej teorii, dlatego skupimy uwagę na tym, co czasami nazywa się matematyką chaosu.

Rozpoczniemy od wprowadzenia i porównania dwóch terminów: „układ prosty" i „układ złożony". Mówiąc najogólniej, układ prosty to taki, który składa się z jednego lub paru składników, których własności i stan można opisać za pomocą kilku liczbowych parametrów. Składniki te ponadto poruszają się w regularny sposób, dzięki czemu można dokładnie opisać ich tory w zadanym przedziale czasowym. Dobrze znanym przykładem układu prostego jest układ planetarny, składający się z nieruchomego Słońca i kilku planet, krążących wokół niego po regularnych orbitach eliptycznych. Inne przykłady znane z fizyki szkolnej to dwie zderzające się kule sprężyste lub pocisk poruszający się w polu ciążenia Ziemi. W toku nauczania fizyki w szkole lub na uniwersytecie omawia się wiele przykładów takich układów dynamicznych, które właśnie ze względu na swoją prostotę mogą być dokładnie zbadane empirycznie i opisane teoretycznie. W początkowym okresie rozwoju mechaniki były one intensywnie badane, a obecnie, gdy znamy je bardzo dobrze, są one dobrym materiałem dydaktycznym, ilustrującym metody i możliwości odpowiednich działów fizyki. Sukcesy mechaniki, pierwszej nowoczesnej, zmatematyzowanej teorii empirycznej, w dziedzinie opisu i wyjaśnienia działania układów prostych miały ważne konsekwencje naukowe i filozoficzne, znacznie wykraczające poza zakres zastosowań tej nauki. Uczeni zafascynowani dokładnością obliczeń i przewidywań związanych z modelowaniem prostych układów mechanicznych uwierzyli, że mogą one być wzorcem dla całej fizyki. Wiedzieli wprawdzie dobrze, że takie dokładne przewidywania są możliwe dla układów odpowiednio prostych i dobrze odizolowanych od zakłócających wpływów otoczenia, lecz mieli nadzieję, że dzięki rozwojowi nauki będzie można coraz więcej zjawisk poznawać i rozumieć równie dokładnie. Filozoficzną bazą tego stanowiska była doktryna determinizmu, czyli przekonanie, że wszystkie procesy przyrody przebiegają w jednoznaczny sposób, zgodnie z prawami, których odkrycie i zastosowanie jest najważniejszym zadaniem nauki.

Ten powszechnie akceptowany cel i ideał fizyki miał istotny wpływ na sposób matematycznego opisu zjawisk fizycznych i formułowania praw fizyki. Korzystając z metod analizy matematycznej, prawa te zapisywano w postaci równań różniczkowych, które mają jednoznaczne rozwiązania. Uczony opisujący przebieg procesów należących do badanej klasy wypisywał równania ruchu. Równania te są zwykle ogólne i mają całe klasy rozwiązań, dlatego trzeba było uzupełnić je o dane empiryczne (warunki początkowe), dzięki którym otrzymuje się jedno rozwiązanie, odpowiadające konkretnej sytuacji. Takie rozumienie zadań teorii dynamicznych było podstawą ogólnego schematu postępowania: model zjawisk → równania ruchu → ogólne rozwiązania równań → wybrane rozwiązanie równań w danym przypadku → porównanie rozwiązania z obserwacjami. Zadanie stojące przed uczonym było rozwiązane, gdy przewidywany przez model przebieg procesu wystarczająco dobrze pasował do przebiegu obserwowanego. Im większa dokładność tym lepszy model. Rozwój danej gałęzi nauki polegał na uzyskiwaniu coraz dokładniejszych przewidywań.

Teorie matematyczne stosowane w tych dziedzinach nauk przyrodniczych także rozwijały się zgodnie z tym sposobem podejścia do problemów. W związku z tym rozwój analizy matematycznej w XIX wieku w znacznej mierze polegał na poszukiwaniu rozwiązań równań różniczkowych używanych w fizyce i technice. Matematycy stworzyli teorie opisujące klasy rozwiązań najważniejszych równań, badali funkcje specjalne, stworzyli teorię potencjału i teorię warunków początkowych dla określonych równań. Były to ciekawe działy analizy matematycznej, ważne dla samych matematyków, lecz istotną inspiracją dla ich rozwijania były potrzeby fizyki. Na przykład teoria potencjału i funkcji Greena były początkowo stworzone na potrzeby teorii grawitacji Newtona.

Ta klasyczna metoda badania procesów przyrody miała jednak poważne ograniczenia, ponieważ dokładne rozwiązania równań można było otrzymać w stosunkowo prostych sytuacjach, na przykład, gdy badany układ składał się z kilku ciał połączonych prostymi siłami. Dla układów zbyt wielu równań, nawet bardzo prostych, lecz powiązanych ze sobą, nie ma dokładnych jednoznacznych rozwiązań. W pewnych wypadkach do granic stosowalności modelu dochodzi się zdumiewająco szybko. Na przykład zderzenie dwóch kul sprężystych jest łatwe do opisania i znając ich początkowe prędkości, można bez trudu wyliczyć ich ruch po zderzeniu. Jest to zadanie, które rozwiązuje się w szkole średniej. Jednak przebiegu zderzenia trzech kul nie można dokładnie przewidzieć teoretycznie, ponieważ prawa zachowania pędu i energii to za mało, by jednoznacznie określić ruch po zderzeniu. Trzeba dowolnie przyjąć prędkość końcową jednej z kul, aby na tej podstawie wyliczyć ruch dwóch pozostałych. Podobnie nie można dokładnie rozwiązać równań ruchu trzech ciał powiązanych siłą grawitacji. Takich ograniczeń uczeni napotkali wiele i w rezultacie udało im się dokładnie opisać teoretycznie stosunkowo małą klasę zjawisk przyrody. Opracowano specjalne metody modelowania i dokonywania obliczeń przybliżonych, dzięki którym zakres nauk przyrodniczych poszerzał się, lecz wbrew nadziejom wielu przyrodników i filozofów daleko było do wyjaśnienia i zadowalającego opisania całego otaczającego nas świata. Naukowcy coraz lepiej rozumieli, że ta metoda ma zasadnicze ograniczenia i jest zbyt słaba, by można było, stosując ją, zrozumieć bogatą dynamikę układów złożonych z wielu składników[1].

Alternatywą dla mechanicznego podejścia do zjawisk, którego celem jest dokładne wyliczenie przebiegu badanych zjawisk, stały się teorie i metody rezygnujące z precyzyjnego, jednoznacznego poznania ich dynamiki. Można powiedzieć, że większość procesów znamy niedokładnie i nigdy tej niedokładności nie przezwyciężymy ze względu na stopień ich złożoności. Trudno, na przykład, mieć pretensje do biologów, że badając organizmy nie uzyskują wyników tak dokładnych jak fizycy lub chemicy badający proste zjawiska. Opis i pomiary kształtu zwierzęcia lub ruchu ławicy ryb nie mogą być tak dokładne jak pomiary ruchu planet i jest to oczywiste. Z tego powodu większość dziedzin nauk przyrodniczych nie

[1] M. Tempczyk, *Teoria chaosu dla odważnych*, Warszawa 2002, 7-32.

spełniała wymagań, jakie stawiali sobie uczeni pracujący nad zjawiskami prostymi. Jednak fakt ten nie był traktowany jako argument przeciwko temu ideałowi nauki, ponieważ panowało przekonanie, że podstawowe zjawiska przyrody są poznawalne dokładnie i że wszystkie fundamentalne teorie fizyki i chemii powinny umożliwiać dokładne obliczenia i przewidywania, jeżeli nie w praktyce, to w teoretycznym ideale. To nowe spojrzenie na zjawiska i możliwości poznawcze nauki zaczęło się rozwijać wtedy, gdy naukowcy zaczęli formułować teorie podstawowe w swojej strukturze formalnej uwzględniające niedokładności obserwacji i przewidywań. Pierwszą teorią tego typu była mechanika statystyczna. Bada ona układy złożone z ogromnej liczby prostych składników, których obserwacja i opis są absolutnie niemożliwe, dlatego trzeba mierzyć makroskopowe parametry, takie jak ciśnienie, temperatura i objętość, starając się powiązać je teoretycznie. Fizycy, chcąc teoretycznie opisać to, co mierzą, muszą posługiwać się formalizmem mechaniki klasycznej rozszerzonym o prawa statystyczne, w najprostszym przypadku o prawo rozkładu prędkości Maxwella-Boltzmanna. Skuteczna redukcja termodynamiki do mechaniki statystycznej była uznana za sukces mechanicznego obrazu zjawisk, lecz rozwój fizyki statystycznej postawił przed fizykami i matematykami nowe pytania, których rozwiązania wymagało stworzenia nowych działów matematyki. Najważniejszym problemem nowego typu była hipoteza ergodyczna, czyli pytanie o to, dlaczego i kiedy do opisu układów złożonych z dużej liczby elementów można efektywnie stosować prawa statystyczne. Matematyczna odpowiedź na to pytanie stała się możliwa po kilkudziesięciu latach badań, w wyniku których powstała teoria układów dynamicznych, udowodniono twierdzenia ergodyczne o różnym stopniu ogólności i zbadano wiele ciekawych przykładów[2].

Mniej więcej w tym samym czasie, pod koniec XIX wieku, prace Poincarégo zapoczątkowały badania stabilności rozwiązań równań różniczkowych i pokazały, jak łatwo układ dynamiczny może zacząć zachowywać się w nieprzewidywalny, skomplikowany sposób. Podobnym zagadnieniami zajmowali się naukowcy badający ruch turbulentny. Ta nowa problematyka wymagała nowego podejścia do

[2] Tamże, 33-50.

różniczkowych równań ruchu. Pojedyncze rozwiązania przestały być interesujące i ważne, ponieważ nie dawały uczonym żadnej pożytecznej informacji. W większości sytuacji rozwiązań takich po prostu nie znamy, ponieważ otoczenie wpływa w nieprzewidywalny sposób na ruch pojedynczego składnika układu i nie znamy sił, które powinny być włączone do równań ruchu. Jak w stadzie lecących ptaków wyodrębnić ruch jednego z nich i przewidzieć go teoretycznie? Gdyby nawet było to możliwe, to co dałaby ta informacja, skoro ten ptak ginie w masie sąsiadów?

Sytuację, która powstała w naukach przyrodniczych i w matematyce około stu lat temu, można scharakteryzować w sposób następujący: Przyrodniczy potrzebowali pojęć i teorii matematycznych nadających się do opisu działania układów tak skomplikowanych, że klasyczna metoda rozbicia ich na części i badania tych części nie może być zastosowana. Mówiąc metaforycznie, potrzebna była matematyka złożoności, w nowy sposób podchodząca do problemu ruchu. Matematyka ta korzystała z równań różniczkowych, lecz badała je w swoisty sposób. Sposób ten zilustrujemy, analizując pojęcie stabilności rozwiązań równania ruchu.

Wyobraźmy sobie, że w korycie płynie woda i chcemy opisać jej ruch. Woda może płynąć na dwa sposoby, wymagające odmiennego podejścia. Pierwszy ruch jest regularny, koryto jest proste i ma wszędzie ten sam kolisty przekrój, a woda płynie wolno, bez zaburzeń. Można wtedy przyjąć, że każda drobina wody płynie po linii prostej, równoległe do dna i do torów sąsiadek, a zadaniem fizyka jest wyliczenie, jaki jest rozkład prędkości cząsteczek. Jest to klasyczne zadanie z mechaniki, rozwiązane już w XVIII wieku i dawane studentom na ćwiczeniach. Nie możemy w zasadzie wyodrębnić małej porcji wody, aby obserwować jej ruch, można jednak wrzucić do wody kroplę atramentu, aby sprawdzić, czy jej ruch będzie rzeczywiście taki regularny, jak przewidują rozwiązania równań ruchu.

Sytuacja zmienia się radykalnie, gdy woda nie płynie wolno i regularnie, gdy powstają w niej wiry i fale. Wtedy równania ruchu, jeżeli są znane, komplikują się i nie mogą być ściśle rozwiązane, a nawet gdyby rozwiązania były znane, to niewiele dałyby badaczom, ponieważ widzą oni ruch dużych partii wody, a nie pojedynczych drobin. Chcą wiedzieć, jak często pojawiają się zaburzenia, jaki mają kształt, czy rozprzestrzeniają się, czy też rozpadają itp. Można szukać odpowiedzi na te pytania, ale wtedy musimy inaczej spojrzeć na równania ruchu. Podstawowym problemem jest stabilność danego rodzaju ruchu. Chodzi o to, czy drobne zaburzenie ruchu układu spowoduje duże, czy też małe zmiany jego trajektorii. Stabilność lub jej brak jest ważną własnością układu dynamicznego, ponieważ zależy od niej sposób jego działania. Aby ją badać, nie wystarczy znać pojedynczych rozwiązań podstawowych równań. Trzeba wiedzieć, jak zachowują się całe klasy rozwiązań. Matematycy dużo wysiłku włożyli w stworzenie nowych działów teorii równań różniczkowych, które są obecnie powszechnie stosowane przy badaniu układów złożonych. Badania te prowadzi się w przestrzeni fazowej układu, czyli w przestrzeni wszystkich jego parametrów dynamicznych. Obserwując trajektorie ruchu, tworzące w tej przestrzeni rodziny nie przecinających się linii, możemy powiedzieć wiele o sposobie działania układu bez dokładnej znajomości ruchu poszczególnych składników, a o to chodzi badaczom układów złożonych[3].

Innym ważnym źródłem wiedzy o działaniu układów złożonych stały się rozwiązania nieliniowych równań różniczkowych. Przez ponad dwieście lat matematycy rozwiązywali i tworzyli teorie liniowych równań różniczkowych, ponieważ równania te można rozwiązać analitycznie, a ich rozwiązania tworzą, ze względu na liniowość równania, regularne przestrzenie liniowe. Z tego powodu aż do połowy ubiegłego stulecia wiedza o równaniach nieliniowych była uboga i niesystematyczna. Równania tego typu występują wprawdzie w większości działów nauk przyrodniczych i techniki, lecz możliwości ich rozwiązywania były małe. Znane rozwiązania były przybliżone. Sytuacja uległa zmianie, gdy do rozwiązywania równań zaczęto używać nowoczesnych komputerów, które pozwalają otrzymywać rozwiązania wprawdzie przybliżone, lecz dokładne. Dzięki tym rozwiązaniom uczeni poznali ich nowe, niespodziewane cechy, takie jak istnienie atraktorów. Dobrze znanym i często omawianym przykładem postępu w tej dziedzinie są równania Lorenza, sformułowane przez niego i rozwiązane na komputerze w 1963 roku, dzięki którym ich autor odkrył dwie własności rozwiązań tych równań: „efekt motyla" i atraktor. W tym okresie był to wynik trudny do zrozumienia, dlatego praca Lorenza 10 lat cze-

[3] Te nowe działy teorii równań różniczkowych są omówione w monografii V. Arnolda, *Teoria równań różniczkowych*, tłum. z ros. M. Wojtkowski, Warszawa 1983.

kała na to, aż naukowcy uświadomili sobie jej znaczenie. Obecnie atraktory są poszukiwane w dynamice najrozmaitszych rodzajów układów empirycznych, a ich matematyka jest dobrze poznana. Opracowano metody poszukiwania atraktorów w zbiorach danych obserwacyjnych[4].

Kończąc omawianie zmian, jakie dokonały się w dziedzinie teorii równań różniczkowych, warto jeszcze wspomnieć o solitonach. Są to dokładne analityczne rozwiązania pewnej klasy równań nieliniowych. Równania te są często używane do opisu dynamiki układów fizycznych i technicznych, lecz ponadto mają one duże znaczenie matematyczne. Z tego powodu znalezienie dokładnych analitycznych rozwiązań było ważnym osiągnięciem, ponieważ pozwala ono na badanie matematycznych własności tych rozwiązań[5].

Na teorii równań różniczkowych teoria chaosu się nie kończy. Równania różniczkowe stosuje się tam, gdzie istnieje teoretyczny model dynamiki układów, a problem polega na trudnościach z rozwiązywaniem jego równań lub z obserwacją pojedynczych elementów. Przy tym klasycznym podejściu do tych zagadnień rozpoczyna się od wiedzy o częściach, dążąc do opisania całości. Jest to możliwe wtedy, gdy części tych jest mało lub gdy, tak jak w gazach i cieczach, są bardzo proste i podobne do siebie. Takich układów jest w przyrodzie stosunkowo mało, dlatego analityczna metoda klasycznej nauki nie może być jedynym sposobem analizy zjawisk. Jej przeciwieństwem jest badanie układów z całym bogactwem ich działania, bez tworzenia upraszczających modeli. Badania takie były prowadzone od dawna, lecz ich postęp był mały ze względu na trudności w uporządkowaniu danych obserwacyjnych. Jednak dzięki coraz doskonalszym metodom obserwacji i pomiaru układów dynamicznych empiryczna wiedza o ich własnościach stawała się coraz obszerniejsza i bardziej uporządkowana. Uczeni zaczęli rozumieć i porządkować bogactwo procesów nieregularnych, takich jak ruch turbulentny, nieliniowe reakcje chemiczne, nieregularności bicia serca, wahadła nieliniowe itp. Formułowano matematyczne modele tych procesów, dzięki którym odkrywano regularności ukryte w ich skomplikowanym przebiegu.

---

[4] H. G. Schuster, *Chaos deterministyczny. Wprowadzenie*, tłum. z ang. P. Pepłowski, K. Stefański, Warszawa 1995, 21-23, 123-128.

[5] A. Sym, *Solitony*, Postępy Fizyki 31(1980), 3-18.

Klasycznym zagadnieniem, nad którym uczeni pracowali od dwustu lat, było przejście od ruchu regularnego do chaotycznego, łatwe do zaobserwowania w płynącej cieczy. Woda płynąca w korycie o regularnym kształcie dla małych prędkości płynie regularnie, natomiast po przekroczeniu przez nią pewnej prędkości jej ruch staje się zaburzony. To przejście od ruchu regularnego do turbulentnego ma duże znaczenie w technice, ponieważ silnie wpływa na ruch statków i samolotów, dlatego było intensywnie badane, jednak dopiero stosunkowo niedawno udało się sformułować trzy modele tego przejścia, zwane scenariuszami chaosu[6]. Podobnie było z badaniami intermitencji, innego często obserwowanego sposobu pojawiania się ruchu chaotycznego. Matematyczne modele tego zjawiska pokazały, że ma ono trzy mechanizmy pojawiania się. Mechanizmy te zależą od sposobu oddziaływania ze sobą składników układu, czyli od dynamiki na poziomie podstawowym[7]. Modele scenariuszy pojawiania się chaosu, intermitencji czy innych podobnych procesów nieregularnych powstają dzięki podejściu przeciwnemu metodzie analitycznej. Metoda analityczna to postępowanie od prostoty części do złożoności całości. Teoria chaosu bada układy złożone bez ich upraszczania, a następnie, porządkując ich dynamikę i odkrywając ukryte w niej wzorce matematyczne, pozwala odtworzyć sposób działania składników. Jest to więc przechodzenia od skomplikowanych całości do ich części, które wcale nie muszą być proste.

Na zakończenie tego przeglądu nowych metod teorii chaosu wspomnimy o bifurkacjach Feigenbauma, który badając na kalkulatorze zachowanie atraktorów odwzorowania logistycznego, odkrył ciekawy schemat podwajania się ich zbioru, gdy parametr kontrolny staje się coraz większy. Schemat ten był zaskoczeniem dla matematyków ze względu na swoją regularność i uniwersalność. Pojawiają się w nim dwie liczby, zwane stałymi Feigenbauma, charakterystyczne dla tego schematu, które początkowo uważano za charakterystyczne dla równania logistycznego, jednak okazało się, że są one takie same dla szerokiej klasy równań, które na odcinku [0,1] mają jedno maksimum. Tej uniwersalności bifurkacji Feigen-

[6] M. Tempczyk, *Mechanizmy Chaosu*, Studia Philosophiae Christianae 38(2002)1, 29-40.

[7] H. G. Schuster, dz. cyt., 87-109.

bauma matematycy nie potrafili w tym czasie zrozumieć, nie wiedząc, jak podejść do zagadnienia samych bifurkacji[8], jednak już po kilku latach mieli teorię w zadowalający sposób opisującą ten proces. Teoria ta opiera się na operacjach wykonywanych na funkcjach i bada je w sposób jakościowy. Można powiedzieć, że odkryty przez Feigenbauma „eksperymentalnie" na kalkulatorze proces bifurkacji równania logistycznego zmusił matematyków do nowego spojrzenia na funkcje kwadratowe, a później na inne klasy funkcji. Uzyskane dzięki temu wyniki można zaliczyć do nowego typu myślenia matematycznego, charakterystycznego dla teorii chaosu.

W krótkim artykule nie sposób omówić, ani nawet pobieżnie wymienić, wszystkich ciekawych teorii i metod matematycznych stosowanych w tym nowym podejściu do zjawisk przyrody, w technice, a nawet w naukach społecznych. Są one przedmiotem wielu monografii, takich jak wspominana kilka razy książka Schustera. Naszym celem było pokazanie w jaki sposób charakterystyczne dla teorii chaosu całościowe podejście do badanych zjawisk empirycznych prowadzi do rozwoju i zastosowania specyficznych metod matematycznych. Powtórzmy na koniec, iż ich najważniejszą cechą jest to, że najpierw modelują one procesy skomplikowane i poznane mało dokładnie, aby potem w tym powierzchownym, fenomenologicznym porządku poszukiwać ukrytych prawidłowości rządzących procesami lokalnymi, zachodzącymi na poziomie składników procesu. Jest to droga postępowania przeciwna do klasycznego sposobu modelowania matematycznego dynamiki układów prostych. Nowa metoda badań empirycznych korzysta i inspiruje rozwój nowej matematyki.

THE NEW MATHEMATICS OF CHAOS

Summary

The theory of chaos is a new paradigm of many empirical sciences. It considers the dynamics of complex systems, which cannot be divided into simple parts and

[8] Reakcję matematyków na odkryty przez Feigenbauma schemat bifurkacji dobrze oddaje komentarz M. Kaca. Po wysłuchaniu referatu Feigenbauma na konferencji w 1976 roku Kac powiedział: „Tak, to rzeczywiście dowód r-r-r-rozsądnego człowieka. Szczegóły można pozostawić bardziej r-r-rygorystycznemu matematykowi.". Pisze o tym J. Gleick, *Chaos. Narodziny nowej nauki,* Poznań 1996, 195. Matematyczna teoria bifurkacji jest omówiona w H. G. Schuster, dz. cyt., Rozdz. 3.

then reconstructed from them. The classical, analytic approach to such systems is ineffective and the theory of chaos studies them from the beginning with their full complexity, without formulating simplified models. That new point of view on complexity and dynamics of matter is based on new mathematical theories, such as ergodic theory and theory of dynamic systems. Even those parts of mathematics that have been used in the past, such as the differential and integral calculus, are developed and applied in the chaos theory in a new way and their new aspects are analyzed. It is the reason why many mathematicians speak about the new mathematics of chaos.