Michał Heller

Samodualność i wyjaśnianie

Studia Philosophiae Christianae 40/2, 39-47

2004

Studia Philosophiae Christianae
UKSW
40(2004)2

MICHAŁ HELLER
Wydział Filozoficzny PAT, Kraków

SAMODUALNOŚĆ I WYJAŚNIANIE

Księdzu Mieczysławowi Lubańskiemu,
od którego uczyłem się początków algebry

1. Algebraizacja matematyki. 2. Grupy kwantowe i ich (ko)działania. 3. Dualność i samodualność. 4. Komentarz filozoficzny.

1. ALGEBRAIZACJA MATEMATYKI

Obserwując rozwój współczesnej matematyki, łatwo dostrzec postępujący w niej proces algebraizacji. „Mówimy dzisiaj słusznie o «algebraizacji» matematyki, tj. o przeniknięciu metod i ducha algebry do wszystkich, teoretycznych i stosowanych gałęzi matematyki. Daje się to szczególnie zaobserwować od połowy XX wieku, co wcale nie znaczy, że było tak zawsze"[1]. Tendencja ta nie jest jednak zaskoczeniem, gdy pamięta się o tym, że – jak pisze N. Bourbaki – „niewiele jest w matematyce pojęć bardziej pierwotnych, niż pojęcie działania; wydaje się ono nierozłączne z pierwszymi początkami arytmetyki liczb naturalnych i wielkości mierzalnych"[2], a właśnie to pojęcie leży u źródeł algebry. „Zgodnie z zasadą, że «ważne są nie obiekty matematyczne, ale relacje między nimi» definiuje się algebrę (nieco tautologicznie i w sposób całkowicie niezrozumiały dla osoby nie wtajemniczonej) jako naukę o działaniach algebraicznych wykonywanych na elementach różnych zbiorów"[3]. Technicznie, przez *algebrę* (lub pełniej – *algebrę liniową*) A rozumie się prze-

[1] A. I. Kostrykin, *Wstęp do algebry*, tłum. z ros. J. Trzeciak, Warszawa 1984, 12.
[2] N. Bourbaki, *Elementy historii matematyki*, tłum. z franc. J. Dobrzycki, Warszawa 1980, 66.
[3] A. I. Kostrykin, dz. cyt., 12.

strzeń wektorową nad ciałem K (skalarów, najczęściej są nimi liczby zespolone lub rzeczywiste), w której, oprócz dodawania elementów (jak zwykle dla przestrzeni wektorowej), jest określone ich łączne mnożenie. Jeżeli istnieje jedność względem tego mnożenia, algebrę nazywamy *algebrą z jednością*. Żąda się przy tym spełnienia znanych aksjomatów, zapewniających naturalne własności dla dodawania i mnożenia elementów algebry przez siebie i przez elementy ciała K oraz uzgadniających te działania ze sobą[4].

Od chwili wynalezienia przez Kartezjusza geometrii analitycznej wiadomo, że pomiędzy algebrą a geometrią istnieją głębokie związki. Relacje pomiędzy współrzędnymi, wyrażające rozmaite prawidłowości geometryczne, można zapisać w postaci równań:

$$f_i(x_1, \dots x_n) = 0, \ i \in I,$$

gdzie f_i są pewnymi funkcjami. Jeżeli funkcje te są wielomianami, otrzymujemy geometrię algebraiczną; jeżeli są to zespolone funkcje analityczne, otrzymujemy geometrię zespoloną, jeżeli są to funkcje gładkie – geometrią różniczkową; jeżeli ciągłe – topologię; jeżeli mierzalne – teorię miary[5]. Można pójść o krok dalej: zapomnieć o przestrzeni i współrzędnych na niej, a rozważać tylko odpowiednie klasy algebr, których elementami są funkcje (wielomianowe, analityczne, gładkie...), by zachować cały powyższy program. Pozwalają na to twierdzenia w rodzaju klasycznego twierdzenia Gelfanda-Neimarka-Segala, które ustanawia równoważność pomiędzy lokalnie zwartymi topologicznymi przestrzeniami Hausdorffa a (inwolutywną) algebrą ciągłych zespolonych funkcji znikających w nieskończoności. Co więcej, algebraiczne ujęcie ma tę wyższość nad tradycyjnym ujęciem geometrycznym, że w naturalny sposób prowadzi do uogólnienia, które w ujęciu tradycyjnym nie jest widoczne. Algebry funkcyjne są „ze swej natury" przemienne (funkcje mnoży się przemiennie). Możemy wszakże odrzucić założenie przemienności, zastępując algebry funkcyjne innymi, ogólniejszymi algebrami (np. operatorowymi) i postępować tak, jakby one również określały jakieś przestrzenie. W ten sposób powstały różne geometrie nieprzemienne – nowy, bujnie rozwijający się, dział współczesnej matematyki[6]. Mimo, że w geo-

---

[4] Por. każdy podręcznik „algebry wyższej".

[5] Por. Y. I. Manin, *Topics in Noncommutative Geometry*, Princetown 1991, 3.

[6] Por. np. J. M. Gracia-Bondia, J. C. Varilly, H. Figueroa, *Elements of Noncommutative Geometry*, Boston-Basel -Berlin 2001.

metrii nieprzemiennej „zapomina się" o przestrzeniach, a operuje się algebrami, można uznać – przez analogię za zwykłą geometrią – że z każdą algebrą związana jest jakaś „wirtualna przestrzeń"; w związku z tym często mówi się po prostu o nieprzemiennych przestrzeniach.

2. GRUPY KWANTOWE I ICH (KO)DZIAŁANIA

Teoria grup kwantowych narodziła się w znacznej mierze niezależnie od przedstawionej w poprzednim rozdziale geometrii nieprzemiennej. Dopiero później zauważono, że geometria nieprzemienna i teoria grup kwantowych stanowią w gruncie rzeczy ten sam dział matematyki.

Przechodząc do grup kwantowych, trzeba najpierw ideę grupy przełożyć na język algebraiczny. Można to łatwo zrobić w przypadku skończonej grupy G. Rozważmy mianowicie algebrę funkcji na G o wartościach w ciele K, oznaczając ją przez $K(G)$. W algebrze tej definiujemy dodatkowo następujące działania:

$$(\Delta f)(xy) = f(xy),$$
$$\varepsilon f = f(e),$$
$$(Sf)(x) = f(x^{-1}),$$

gdzie $x, y \in G$, $f \in K(G)$, a e jest jednością grupy G. Działanie Δ nazywa się *komnożeniem* i – jak łatwo widać – koduje ono w języku algebry zwykłe mnożenie elementów grupowych x i y; działanie ε nazywa się *kojednością* i odpowiada ono istnieniu jedności e w grupie G; działanie S nazywa się *antypodą* i wyraża ono algebraicznie istnienie w grupie G elementu x^{-1} odwrotnego do x.

Następny krok polega na uwolnieniu się od konkretnego przykładu i zdefiniowaniu działań Δ, ε i S w sposób abstrakcyjny. Następuje teraz ciąg definicji, które prowadzą do pojęcia grupy kwantowej.

Definicja 1: *Koalgebrą* nazywamy przestrzeń wektorową C nad ciałem K wraz z działaniami $\Delta : C \otimes C \to C$ i $C \to K$ spełniającymi odpowiednie aksjomaty (wśród których ważny jest aksjomat kołączności dla Δ)[7].

---

[7] Przytaczanie wszystkich aksjomatów, w tej i innych definicjach, sprowadzałoby się do przepisywania znacznych partii podręcznika. W artykule tym chodzi mi nie o szczegóły techniczne, lecz o związki między pojęciami. Zainteresowanego Czytelnika odsyłam do któregoś z podręczników, np. do: S. Majid, *Foundations of Quantum Group Theory*, Cambridge 2000, lub tego samego autora: *A Quantum Group Primer*, Cambridge 2000.

Zauważmy, że działania definiujące algebrę można przedstawić „symetrycznie" jako odwzorowania: mnożenie $m : C \times C \rightarrow C$ i działanie gwarantujące istnienie jedności $\eta : K \rightarrow C$ (zwróćmy uwagę na odwrócenie strzałek). Jest to charakterystyczna „dualność", która przenika całą teorię grup kwantowych.

Definicja 2: *Bialgebrą* nazywamy przestrzeń wektorową H, która jest równocześnie algebrą, wyposażoną w działania m i η oraz koalgebrą, wyposażoną w działania Δ i ε.

Definicja 3: *Algebrą Hopfa*, lub *grupą kwantową*, nazywamy bialgebrę H, w której jest również określone odwzorowanie antypody S.

Definicje 2 i 3 zawierają też dodatkowe aksjomaty, które pomijamy.

Interesujące rzeczy zaczynają się dziać w matematyce (i w jej zastosowaniach do fizyki), gdy jakaś grupa działa na pewną przestrzeń, np. grupa Galileusza lub grupa Lorentza na przestrzeń reperów (lokalnych układów odniesienia). Jeszcze ciekawsze rzeczy dzieją się w przypadku grup kwantowych. Dzięki wyżej wspomnianej dualności, wbudowanej do ich definicji, mogą one bowiem nie tylko *działać* na różne przestrzenie, lecz także *kodziałać* na nie. Kwantowe grupy, (ko)działając na rozmaite przestrzenie, mogą także – podobnie jak w przypadku zwykłych grup – zachowywać pewne struktury na tych przestrzeniach.

Może się tak zdarzyć, że algebra Hopfa (grupa kwantowa) H działa na algebrę Hopfa A i odwrotnie – algebra Hopfa A kodziała na grupę kwantową H. Istnieje wówczas konstrukcja, zwana *podwójnym produktem krzyżowym (bicrossproduct)* H i A, w wyniku której otrzymujemy strukturę, która nie tylko jest dualna sama ze sobą (samodualna), lecz również działa na siebie w samodualny sposób. Możliwość takiej struktury wirtualnie mieści się w definicji algebry Hopfa.

Pojęcie podwójnego produktu krzyżowego wprowadził do teorii grup kwantowych Shahn Majid[8].

3. DUALNOŚĆ I SAMODUALNOŚĆ

W teorii grup kwantowych powszechnie używa się języka matematycznej teorii kategorii. Nie jest to związane tylko z dążeniem do elegancji. Nawet gdyby wykonanie wszystkich konstrukcji za

---

[8] Por. rozdział 6 w jego książce *Foundations of Quantum Group Theory*.

pomocą zwykłych narzędzi teoriomnogościowych było możliwe, byłoby niezmiernie skomplikowane i w wielu przypadkach powodowałoby utratę przejrzystości. Co więcej, istnieją silne poszlaki, że w odniesieniu do wielu sytuacji rozpatrywanych w geometrii nieprzemiennej zwykłe narzędzia teoriomnogościowe są niewystarczające ze względów zasadniczych[9]. Zwróćmy się więc i my do metod kategorialnych, by lepiej uchwycić znaczenie pojęć dualności i samodualności.

Przypomnijmy (nieformalnie), że *kategoria* **C** składa się z: 1) rodziny $\mathbf{C}^0$, której elementy nazywamy *obiektami*; 2) funkcji, która każdej parze obiektów $A, B \in \mathbf{C}^0$ przyporządkowuje pewien zbiór Mor (A, B), którego elementy nazywamy *morfizmami* z A do B; 3) *operacji złożenia morfizmów* Mor $(B, C) \times$ Mor $(A, B) \to$ Mor (A, C). Przyjmując odpowiednie postulaty, gwarantujemy łączność składania i istnienie morfizmów tożsamościowych[10].

W teorii kategorii ważne jest pojęcie funktora. Przez *funktor* rozumiemy (nieformalnie) odwzorowanie jednej kategorii w drugą, które zachowuje złożenia i morfizmy tożsamościowe.

W teorii kategorii często posługujemy się strzałkami i diagramami przemiennymi. Jest to wygodny sposób unaoczniania pewnych prawidłowości i twierdzeń, ale pojęcie strzałki i diagramu oraz sposoby posługiwania się nimi można również sformalizować.

Wprowadźmy teraz pojęcie dualności dwu kategorii. *Kategorią dualną* do kategorii **C** nazywamy kategorię $\mathbf{C}^*$ taką, że: 1) kategoria $\mathbf{C}^*$ ma te same obiekty, co kategoria **C**; 2) niech $A, B \in (\mathbf{C}^*)^0$, wówczas Mor (A, B) jest morfizmem w $\mathbf{C}^*$ wtedy i tylko wtedy, gdy Mor (B, A) jest morfizmem w **C**; 3) złożenia morfizmów w $\mathbf{C}^*$ określa się jako złożenie tych samych morfizmów w **C**, ale w odwrotnym porządku.

Łatwo zauważyć, że dla każdego pojęcia z teorii kategorii, zdefiniowanemu za pomocą symboli logicznych, morfizmów i złożenia morfizmów, istnieje pojęcie dualne, zdefiniowane przez odwrócenie wszystkich strzałek i odwrócenie porządku wszystkich złożeń.

---

[9] Por. A. Connes, *Noncommutative Geometry*, San Diego-New York-Boston 1994, 74-77.

[10] Po ścisłą definicję należy sięgnąć np. do: Z. Semadeni, A. Wiweger, *Wstęp do teorii kategorii i funktorów*, Warszawa 1978, lub: R. Geroch, *Mathematical Physics*, Chicago-London 1985, 3-15.

Na przykład pojęcia monomorfizmu i epimorfizmu są względem siebie dualne w tym sensie.

Istnieją także w teorii kategorii pojęcia *samodualne*, czyli dualne względem samych siebie. Pojęciem takim jest na przykład pojęcie morfizmu tożsamościowego. Ale istnieją również przykłady nietrywialne[11]. Ciekawe pod tym względem są tzw. kategorie monoidalne. *Kategoria monoidalna* jest to taka kategoria **C**, w której istnieje funktor (oznaczany przez $\otimes$) z kategorii, będącej iloczynem kartezjańskim $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$, do kategorii **C**, czyli $\otimes : \mathbf{C} \times \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, przy czym funktor ten spełnia aksjomat łączności, tzn.

$$(.\otimes.)\otimes \to \otimes(.\otimes.)$$

Żąda się także istnienia obiektu jednostkowego, spełniającego dość oczywiste aksjomaty[12]. Na przykład kategoria reprezentacji algebry Hopfa jest kategorią monoidalną, jeżeli funktor $\otimes$ utożsamimy z iloczynem tensorowym dwóch reprezentacji algebry Hopfa.

Kategorii monoidalnych jest wiele i każdą z nich możemy potraktować jako obiekt nowej kategorii – *kategorii monoidalnych kategorii*; oznaczmy ją symbolem **M**. Majid[13] skonstruował kategorię **M*** dualną do **M** i – jak podkreśla – fakt ten świadczy o tym, że aksjomaty definiujące kategorie monoidalne są samodualne w takim sensie, w jakim samodualne są aksjomaty definiujące algebry Hopfa. Co więcej, ustalmy kategorię monoidalną **N** i rozważmy kategorię, której obiektami są wszystkie kategorie monoidalne mające funktory do kategorii **N**. Tak określona kategoria jest samodualna[14]. W ten sposób wygenerowaliśmy wiele nietrywialnych samodualnych struktur.

4. KOMENTARZ FILOZOFICZNY

Matematykę można uważać za wzorzec wyjaśnień dedukcyjnych. Wyjaśnić jakiś związek matematyczny znaczy wyprowadzić go z aksjomatów za pomocą z góry zadanych reguł dedukcyjnych. W tym sensie za ideał wyjaśnień dedukcyjnych uważa się system aksjomatyczny. Ponieważ matematyka dla wielu nauk stanowi „logiczny kościec", powszechnie przyjęło się przekonanie, że wyjaśnienie w ogóle

---

[11] Obszerniej na temat dualności por. Z. Semadeni i A. Wiweger, dz. cyt., 52-55.

[12] Dokładną definicję por. Tamże, 186.

[13] S. Majid, *Foundations of Quantum Group Theory*, dz. cyt., 446.

[14] Por. Tamże, 446nn.

polega na sprowadzeniu tego, co się wyjaśnia, do jakichś podstawowych (o ile możności oczywistych lub jakoś inaczej uzasadnionych) założeń. Tak rozumiane wyjaśnianie jest faktycznie równoznaczne z uzasadnieniem lub wręcz z udowodnieniem czegoś. Wyjaśnienie jakiejś wiedzy w takim ujęciu polega więc na osadzeniu jej na „mocnym fundamencie" i pokazaniu, jak ta wiedza z niego wynika. Stąd niekiedy tego rodzaju wyjaśnianie nazywa się fundacjonistycznym. Wprawdzie udowodnienie twierdzeń limitacyjnych (typu twierdzenia Gödla) winno było mocno zachwiać przekonaniami fundacjonistycznymi, jednak nadal są one głoszone bez większych oporów.

Konkurencją do fundacjonizmu jest idea samowyjaśniania. Co jakiś czas pojawia się ona w filozofii, a nawet w fizyce (np. modna kiedyś doktryna bootstrapu, mocniejsze sformułowania zasady Macha, czy niektóre wersje modeli kwantowej kreacji Wszechświata). Koncepcje te na ogół odwołują się do schematu: A wyjaśnia (generuje, uzasadnia) B, a B wyjaśnia (generuje, uzasadnia) A. Przyznać jednak trzeba, że dotychczas żadna z takich koncepcji nie odniosła większych sukcesów. I oto pojawia się idea samodualności. Jeżeli relację dualności w jakiś sposób zinterpretować jako relację wyjaśniania, to w przypadku struktury samodualnej mielibyśmy do czynienia z urzeczywistnieniem idei samowyjaśniania.

Taką filozofię od jakiegoś czasu głosi Shahn Majid. Sądzi on, że przyszła ostateczna teoria fizyki (unifikująca wszystkie oddziaływania fizyczne i łącząca fizykę kwantową z ogólną teorią względności) winna być samowyjaśniającą się, tzn. opartą na samodualnej strukturze matematycznej. Majid przypuszcza, że struktury takiej należy szukać wśród kategorii monoidalnych. Tego typu przekonania Majida wynikają niewątpliwie z jego ogromnego wkładu do teorii grup kwantowych wraz z całą jej matematyczną otoczką (obejmującą również teorię kategorii monoidalnych), ale i odwrotnie – filozofia Majida stanowi dla niego motywację poszukiwania struktur samodualnych i stosowania ich do fizyki[15]. Majid nie stroni też od snucia wprost filozoficznych refleksji[16].

[15] Rodzajem programowego artykułu Majida jest: *Quantum Groups and Noncommutative Geometry*, Journal of Mathematical Physics 41(2000), 3892-3942. W duchu tej filozofii Majid napisał, wyżej już cytowany, obszerny podręcznik do teorii grup kwantowych (*Foundations of Quantum Group Theory*).

[16] Por. jego art.: *Principle of Representation-Theoretic Self-Duality*, Physics Essays 4(1991)3, 395-405. Istnieją również filozoficzne komentarze do propozycji Majida; por.

Propozycja Majida wydaje się niezwykle atrakcyjna. Gdyby rzeczywiście udało się stworzyć teorię unifikującą całą fizykę w oparciu o jakąś odpowiednio bogatą samodualną strukturę, można by do takiej teorii dobudowywać interpretację głoszącą, że oto mamy fizyczną teorię samousprawiedliwającą się, tzn. taką, która „nie potrzebuje niczego z zewnątrz", aby mogła istnieć i funkcjonować. Pomińmy fakt, że tego rodzaju interpretacyjna propozycja miałaby problemy z wyjaśnieniem, skąd się biorą matematyczne struktury służące do modelowania świata, w szczególności struktury samodualne, i skupmy swoją uwagę na bardziej konkretnym pytaniu: czy byłaby to istotnie kontrpropozycja w stosunku do wyjaśnień typu fundacjonistycznego?

Jak wspomnieliśmy wyżej, idea wyjaśnień fundacjonistycznych sprowadza się do (lub jest wzorowana na) koncepcji systemu aksjomatycznego. Jakakolwiek więc kontrpropozycja w stosunku do fundacjonizmu powinna zaoferować coś w miejsce systemów aksjomatycznych. Mogłoby to być również korzystne ze względu na ewentualne ominięcie ograniczeń nakładanych przez twierdzenia limitacyjne na fundacjonistyczne wyjaśnienia. Niestety dotychczas zupełnie nie widać, w jaki sposób idea samodualności mogłaby zostać wykorzystana do tego celu. Nieznane mi są nawet jakiekolwiek próby zmierzające w tym kierunku. Co więcej, dotychczas wszystkie struktury samodualne są definiowane tradycyjnymi metodami, tzn. przez wprowadzanie odpowiednich aksjomatów.

Propozycja wyjaśnień samodualnych jest niewątpliwie atrakcyjna z filozoficznego punktu widzenia, ale z pewnością należy jeszcze wykonać wiele czysto formalnej roboty, zanim stanie się ona – jeżeli w ogóle – pełnoprawną konkurentką w stosunku do wyjaśnień tradycyjnego typu.

SELFDUALITY AND EXPLANATION

Summary

As a preliminary to the main topic of the paper a few remarks are made concerning the algebraization of contemporary mathematics, and some concepts are

---

D. Lambert, *Le principe de Shahn Majid: Vers une structure* a priori *de la théorie ultime?*, w: *La responsabilité de la raison*, red. J-F. Malherbe, Louvain la Neuve-Louvain-Paris 2002, 177-195; M. Heller, *Algebraic Self-Duality as the „Ultimate Explanation"*, Foundations of Science, w druku.

introduced from the theory of quantum groups and the theory of cathegories (especially monoidal categories). Basing on these concepts the ideas of duality and selfduality are considered. Shahn Majid has developed a philosophy according to which no physical theory should be regarded as truly fundamental unless it is selfdual. This would provide a selfexplanation to the physical world, and would constitute a counterproposal with respect to the traditional type of explanation, i. e., by reduction to some sorts of axioms. It is a philosophically appealing proposal. However, so far all selfdual structures in mathematics are introduced in an axiomatic way.