Anna Lemańska

"Status poznawczy matematyki", Jarosław Mrozek, Gdańsk 2004 : [recenzja]

Studia Philosophiae Christianae 41/1, 190-196

2005

do podjęcia na nowo przemyśleń własnych w kontekście tytułowych sporów. Warto także podkreślić ładny styl i precyzję w wyrażaniu myśli i prezentowaniu poglądów cytowanych autorów.

Anna Latawiec
Instytut Filozofii UKSW

Jarosław Mrozek, *Status poznawczy matematyki*, Wyd. Uniwersytetu Gdańskiego, Gdańsk 2004, ss. 186.

Pytania o charakter wiedzy matematycznej, jej odniesienie do świata materialnego oraz naszego umysłu były wielokrotnie stawiane w filozofii matematyki i udzielano na nie rozmaitych odpowiedzi. Wykorzystanie metod logiki do badań podstaw matematyki oraz rozwój filozofii nauki sprawiły to, że te stare zagadnienia w XX wieku ujrzano w nowym świetle. Zwłaszcza problem efektywności matematyki w naukach przyrodniczych (zagadnienie dostrzeżone m.in. przez I. Kanta) zyskał na znaczeniu w kontekście sukcesów zmatematyzowanego przyrodoznawstwa, a jednocześnie prawie powszechnego uważania matematyki za naukę formalną. Co więcej, matematyka rozwija się i zmienia swoje oblicze. W ciągu ostatnich dwustu lat nastąpił rozrost wiedzy matematycznej, jej podział na szereg teorii, znaczne poszerzenie zakresu badanych w niej pojęć i stawianych problemów. Metoda dedukcyjna nadal jest jedyną metodą uzasadniania w matematyce, lecz coraz większą rolę zaczynają w rozwijaniu wiedzy matematycznej odgrywać komputery. Konieczne zatem staje się ciągłe dokonywanie rewizji starych stanowisk w filozofii matematyki i dopasowywanie ich do aktualnego stanu nauk matematycznych.

Problem znaczenia matematyki dla procesu zdobywania wiedzy o świecie podejmuje w swojej pracy *Status poznawczy matematyki* Jarosław Mrozek. Praca składa się ze Wstępu i trzech rozdziałów. We Wstępie autor stawia trzy pytania, na które poszukuje odpowiedzi w swej pracy: „1) Jak matematyka rozwija się i jak ją poznajemy? 2) Na czym polega i jak przebiegają procesy przenikania matematyki do nauk realnych? 3) Czym wyjaśnić istotność matematyki w osiągnięciu niewątpliwych sukcesów poznawczych nauk fizykalnych?" (s. 10-11). Zagadnienia dotyczące problematyki kolejnych pytań wyznaczają treści poszczególnych rozdziałów: w rozdziale pierwszym autor próbuje odpowiedzieć na pytanie o charakter rozwoju wiedzy matematycznej, zajmuje się również naturą poznania matematycznego, rozpatrując proces tworzenia nowej wiedzy bez odniesień zewnętrznych w stosunku do matematyki; w rozdziale drugim analizuje proces matematyzacji nauk, a w trzecim – problem efektywności matematyki.

W rozdziale pierwszym, pt. *Zagadnienie poznania matematycznego*, autor analizuje czynności poznawcze i wiedzotwórcze, które mają istotne znaczenie dla uczenia się i rozwijania matematyki. Ważnymi elementami w tym procesie są: intuicja, rozumienie, dowód. W paragrafie *Charakterystyka rozwoju teorii matematycznej* Mrozek ukazuje etapy przekształcania się teorii matematycznych od intuicyjnego poprzez aksjomatyczny do sformalizowanego. Wskazuje na istotne różnice między poszczególnymi stadiami w rozwoju teorii matematycznych. Różnice te zarazem wyznaczają odmienne rozumienia podstawowej dla matematyki procedury, jaką jest dowodzenie.

W paragrafie *Mechanizmy rozwoju matematyki* autor wskazuje na dwie przeciwstawne sobie, a zarazem uzupełniające się tendencje w kształtowaniu się teorii matematycznych. Pierwszą z nich nazywa analityczną. Jest to „tendencja do różnicowania, rozczłonkowywania, uszczegółowiania", której efektem jest „rozrastanie się teorii, jej komplikacja, a nawet pewien chaos" (s. 28). Dzięki drugiej tendencji – syntetycznej – następuje systematyzacja, zespalanie i jednoczenie treści teorii, co prowadzi do porządku, jasności, przejrzystości (s. 28). J. Mrozek zwraca również uwagę na istotną rolę intuicji, która stanowi źródło nowych idei w matematyce.

Paragraf *Rozumienie jako forma poznania w matematyce* poświęca autor na analizę rozumienia jako pośredniej formy poznania. Określenie pojęcia „rozumienia" przejmuje od I. Dąmbskiej. Mrozek zwraca szczególną uwagę na to, że rozumienie jest odkrywaniem sensu (s. 41), stąd bez rozumienia nie jest możliwe ani odtwórcze (uczenie się), ani twórcze (rozwijanie) uprawianie matematyki.

Rozdział pierwszy zamyka paragraf zatytułowany *Dowodzenie jako forma poznania matematycznego*. Autor analizuje w nim najważniejszą czynność w matematyce – dowodzenie twierdzeń. Rozróżnia dowody: treściowe, półformalne i formalne. Wśród dowodów treściowych wyróżnia dowody intuicyjno-psychologiczne, konstrukcyjne oraz eksperymenty myślowe. Każdy z tych rodzajów ilustruje przykładami z praktyki matematyków. Dowody treściowe charakteryzują się tym, że istotną rolę odgrywa w nich intuicja, wyobraźnia i zdrowy rozsądek, opierają się na ukrytych założeniach, formułowane są w języku potocznym, występują w nich odwołania do poczucia oczywistości, jasności, zrozumiałości. Autor stwierdza następnie, że z metodologicznego punktu widzenia dowód półformalny jest odmienny od dowodu treściowego. Dowód półformalny bowiem opiera się na wyraźnie sformułowanych przesłankach. J. Mrozek zwraca też uwagę na to, że dowód treściowy miał za zadanie przekonać o prawdziwości dowodzonej tezy, dowód półformalny jest zaś hipotetyczno-dedukcyjny, gdyż „staje się procedurą wywodu typu: jeżeli przyjmiemy pewne aksjomaty, to możemy z nich wyprowadzić takie to a takie twierdzenia” (s. 66). Sprawia to, że znika z matematyki rozumienie prawdziwości w sensie absolutnym. Dowody półformalne opierają się wprawdzie na wyraźnie określonych aksjomatach, lecz brakuje w nich jeszcze sprecyzowanych reguł interferencji. Natomiast dowód formalny jest przeprowadzany nie tylko na podstawie ściśle określonych regułach wnioskowania, ale sprowadza się dzięki formalizacji języka do przekształcania formy ciągów znaków. Ten podział dowodów jest interesujący, zwłaszcza, że autor pokazuje na przykładach różnice między wyróżnionymi przez siebie typami dowodów. Wydaje się jednak, że zbyt przecenia różnice, zwłaszcza między dowodami treściowymi a półformalnymi. Dowody treściowe zawsze można uzupełnić o brakujące założenia. Z kolei aksjomaty, które stanowią punkt wyjścia dowodów półformalnych, nie są wybierane dowolnie, lecz podporządkowane określonym celom badawczym. Jednym z nich jest uzyskanie wiedzy (prawdziwej) o dziedzinie obiektów matematycznych, które nie są dowolnym tworem człowieka.

W tej części pracy autor próbuje również określić, czym w istocie jest automatyczne dowodzenie twierdzeń i dowody wspomagane komputerowo, oraz jak komputery wpływają na zmianę metody matematyki. Wyraża nadzieję, że zastosowanie komputerów w matematyce może w istotny sposób poszerzyć procedurę uzasadniania, wzbogacić metodę poszukiwania i odkrywania obiektów i prawd matematycznych (s. 77).

W rozdziale drugim, zatytułowanym *Zagadnienie matematyzacji nauk*, autor bada bardzo istotny dla rozwoju współczesnych nauk szczegółowych proces matematyzacji. Mrozek stawia następujące pytania: „co jest istotą matematyzacji, jak przebiega proces matematyzacji nauk, jakimi metodami się realizuje, jakie są uwarunkowania oraz granice i ograniczenia tego procesu" (s. 78). Według autora odpowiedzi na te pytania są istotne dla zrozumienia roli matematyki w procesie poznania. W paragrafie *Pojęcie matematyzacji nauk* określa pojęcie matematyzacji, a następnie, próbując odpowiedzieć na pytanie: czy każde zastosowanie aparatu matematycznego można uznać za matematyzację, stwierdza, że dopiero sposób jego użycia określa, czy mamy do czynienia z matematyzacją (s. 80). Dochodzi zarazem do wniosku, że o matematyzacji można mówić wtedy, gdy posługiwanie się aparatem matematycznym jest niezbędne do owocnego uprawiania teorii (s. 83).

W następnych dwóch paragrafach tego rozdziału opisuje etapy oraz formy matematyzacji. Wśród form matematyzacji wymienia: modelowanie matematyczne, algorytmizację i aksjomatyzację. Interesujące są rozważania autora na temat różnych rodzajów modelowania matematycznego i modeli, wśród których wyróżnia modele opisowe i przyczynowe, oraz roli modelowania w procesie odkrywania nowej wiedzy o świecie.

Mimo niewątpliwych sukcesów matematyzacja nauk posiada też swoje ograniczenia. Toteż w paragrafie *Granice i ograniczenia matematyzacji* J. Mrozek wskazuje bariery matematyzacji, wynikające z „natury obiektów, do opisu których stosuje się matematykę", i ograniczenia, które „wypływają z natury samej matematyki i związane są z istotą poznania matematycznego" (s. 111). Te pierwsze są ograniczeniami zewnętrznymi w stosunku do matematyki i wynikają ze specyfiki nauki, która może nie poddawać się matematyzacji. Natomiast ograniczenia matematyzacji wewnętrzne w stosunku do matematyki wiążą się z ograniczeniami samej matematyki, na które wskazują tzw. twierdzenia limitacyjne.

Następnie autor w tym kontekście zadaje ważne pytanie: czy metody aksjomatyzacji i formalizacji „mogą być przenoszone na grunt pozamatematyczny – teorii fizycznych – nie przyczyniając się do istotnej deformacji możliwych do uzyskania przez te teorie treści empirycznych" (s. 117).

Rozważając zagadnienie matematyzacji nauk przyrodniczych, nie sposób pominąć pytanie: dlaczego matematyka jest tak efektywna? Ten problem autor rozważa w rozdziale trzecim, zatytułowanym *Zagadnienie efektywności poznawczej matematyki*. W paragrafie *Koncepcje wyjaśniania efektywności matematyki* J. Mrozek ukazuje kilka możliwych stanowisk, które mogą stanowić wyjaśnienie skuteczności matematyki: istnienie preegzystującego świata idei matematycznych, przyrodnicze pochodzenie matematyki, istnienie harmonii przedustawnej, matematyczność umysłu. Tezy te są formułowane przy założeniu realizmu ontologicznego i teoriopoznawczego oraz obiektywności matematyki (s. 123). Autor formułuje również wyjaśnienia nie wymagające, czy wręcz odrzucające te założenia, a mianowicie konwencjonalizm i instrumentalizm. Wskazuje również trudności każdego z przytoczonych przez siebie wyjaśnień.

W następnym paragrafie J. Mrozek rozpatruje jeszcze jedno wyjaśnienie efektywności matematyki, mianowicie tezę o matematyczności przyrody. Po wyjaśnieniach terminologicznych analizuje sposób funkcjonowania tej tezy w wyjaśnianiu efektywności matematyki. Następnie, po wyróżnieniu płaszczyzn, na których ta teza może być rozpatrywana (ontologiczna, epistemologiczna, metodologiczna), rozpatruje poglądy J. Życińskiego. W końcu zadaje pytanie: czy można twierdzić, że jeżeli przyroda nie byłaby matematyczna, to matematyka nie byłaby efektywna (s. 134). Odpowiedzi na to pytanie J. Mrozek próbuje udzielić w paragrafie trzecim: *Idea świata niematematycznego*. Przede wszystkim wskazuje, co może oznaczać, że przyroda nie jest matematyczna, i wyróżnia: niematematyczność ontyczną (świat całkowicie niematematyczny), poznawczą (świat matematycznie transcendentny), metodologiczną (świat matematycznie wyrafinowany). Wskazuje również, że niematematyczny byłby świat nie poddający się abstrakcji i idealizacji, a także np. świat pogody, który można określić jako strukturalnie matematyczny i niematematyczny funkcjonalnie.

W paragrafie czwartym, *Rola matematyki w kształtowaniu obrazu świata*, Mrozek wskazuje te miejsca w obrazie świata, na których matematyka odciska swe piętno. Matematyka bowiem wpływa na zawartość treściową teorii przyrodniczych, a także na ich kształt. Jej wpływ „zaznacza się ponadto – pisze autor – na styku modelu z danymi doświadczalnymi weryfikującymi dany model" (s. 145). Mrozek wskazuje również najczęściej wymieniane zadania, które spełnia matematyka w zdobywaniu wiedzy o świecie, a mianowicie: ilościowe ujmowanie zjawisk, dokonywanie predykcji i retrodykcji, konstruowanie abstrakcyjnych modeli, budowanie teorii, generowanie i „obróbka" teoretycznych narzędzi poznawczych.

J. Mrozek, analizując rolę, jaką matematyka odgrywa w zmatematyzowanym przyrodoznawstwie, wskazuje na dwie jej ważne funkcje, które określa jako: „pryzmat" i „selektor". W funkcji pryzmatu matematyka występuje wtedy, gdy pozwala nam na poznawanie struktury świata w sytuacji, gdy bez niej nie można byłoby tego zrobić (s. 152), a w funkcji selektora, gdy działa jako system selektywnego sposobu ujmowania świata, a zarazem pozwala wyartykułować treści poznawcze (s. 154). J. Mrozek stwierdza następnie, że obie te funkcje są ze sobą ściśle powiązane i wzajemnie się uzupełniają. Tak więc, konkluduje autor: „matematyka staje się «ogólną ramą» dla treści poznawczych nauk przyrodniczych" (s. 156).

W paragrafie *Spór o interpretację zastosowań matematyki* Mrozek polemizuje z rozwiązaniami problemu skuteczności matematyki w naukach przyrodniczych proponowanymi w koncepcjach realistycznych i instrumentalistycznych. Wskazuje na istotne trudności poglądów realistycznych. Jedną z nich jest to, że pewne teorie, które niegdyś odnosiły sukcesy, zostały następnie odrzucone. Drugą jest istnienie teorii o różnych formalizmach matematycznych, a tych samych konsekwencjach empirycznych. Rozwiązanie instrumentalistyczne z kolei nie uwzględnia tego, że matematyka nie tylko zwiększa moc opisową, lecz często w ogóle pozwala opisać pewne zjawiska. Roli matematyki nie można zatem sprowadzić ani do odwzorowywania struktury świata, jak sądzą realiści, ani do jedynie zewnętrznego i pośredniego wyrażania treści teorii przyrodniczych, jak twierdzą instrumentaliści.

W ostatnim paragrafie książki, pt. *Matematyka a świat w perspektywie realizmu niereprezentacyjnego*, J. Mrozek zarysowuje swoje stanowisko. Przyjmuje mianowicie realizm niereprezentacyjny (określenie A. Chalmersa), według którego teorie z zakresu nauk przyrodniczych „ujmują w miarę poprawnie pewne aspekty rzeczywistości", choć nie są one jej wiernym odbiciem (s. 170). Przy takim ujęciu zagadnienia efektywności matematyki J. Mrozek „zawiesza" sąd o matematyczności przyrody, a skuteczność matematyki proponuje rozpatrywać w wymiarze pragmatycznym, a nie metafizycznym. Zdaniem autora, realizm niereprezentacyjny pozwala ujmować odpowiedniość między światem a matematyką jako relację dynamiczną (s. 172).

Jak zaznaczyłam na wstępie, Jarosław Mrozek podjął bardzo ważny problem z zakresu filozofii matematyki. Przedstawił nową, oryginalną propozycję jego rozwiązania. Swoje wnioski rzetelnie uzasadnia, a rozważania ilustruje licznymi przykładami z historii matematyki oraz z aktualnej praktyki badawczej matematyków. Nie jest mu obca zarówno przeszłość matematyki, jak i jej teraźniejszość. Szkoda, że od strony redakcyjnej autor nie ustrzegł się dosyć poważnego uchybienia. Otóż *Bibliografia*, zamieszczona na końcu książki, jest bardzo bogata, liczy czternaście stron i zawiera ponad trzysta pozycji. Nie znajduje ona natomiast odzwierciedlenia w przypisach. Toteż nie wiadomo, czy jest to tylko literatura dotycząca tematu pracy, czy też autor korzystał w istotny sposób z treści zawartych w wymienionych w bibliografii pracach. Uniemożliwia to zarazem czytelnikowi łatwe i szybkie znalezienie zbieżnych z poglądami Mrozka wypowiedzi w pracach innych autorów. W książce trafiają się też błędy, będące wynikiem nie dość dokładnej korekty.

Anna Lemańska
Instytut Filozofii UKSW

Rafał Molski, *Rozmyślania o filozofii matematyki. Pięć esejów*, Warszawa 2003, ss. 311.

Matematyka jest jedną z najstarszych nauk i zarazem jedną z najbardziej użytecznych. Bez znajomości choćby rudymentarnych pojęć matematycznych i umiejętności ich wykorzystania nie byłoby rozwoju cywilizacji i kultury. Obecnie przenika ona wiele dziedzin ludzkiego życia, jest, jak pisze Hammond, „naszą niedostrzegalną kulturą"[1]. Każdy człowiek posiada choćby podstawowe umiejętno-

[1] A. L. Hammond, *Matematyka – nasza niedostrzegalna kultura*, tłum. z ang. J. Łukaszewicz, w: *Matematyka współczesna. Dwanaście esejów*, red. L. A. Steen, WNT, Warszawa 1983, 26-48.