

# Kordula Świętorzecka

---

## "Podstawy logiki modalnej", Kazimierz Świrydowicz, Poznań 2004 : [recenzja]

---

Studia Philosophiae Christianae 41/1, 215-223

---

2005

Artykuł został opracowany do udostępnienia w internecie przez Muzeum Historii Polski w ramach prac podejmowanych na rzecz zapewnienia otwartego, powszechnego i trwałego dostępu do polskiego dorobku naukowego i kulturalnego. Artykuł jest umieszczony w kolekcji cyfrowej [bazhum.muzhp.pl](http://bazhum.muzhp.pl), gromadzącej zawartość polskich czasopism humanistycznych i społecznych.

Tekst jest udostępniony do wykorzystania w ramach dozwolonego użytku.

rycznych. (...) Chociaż neotomistyczna filozofia przyrody jest jeszcze ciągle wykładana na niektórych uczelniach kościelnych (nierzadko w zmieszaniu z „wybranymi zagadnieniami” z nauk empirycznych), może być ona obecnie traktowana jedynie jako „świadczenie historii”. Istotnie, nie ma sensu spierać się o same słowa, jednak o prawdę, którą powinny one wyrażać, z pewnością walczyć należy. Szkoda, że w najnowszej, niewątpliwie potrzebnej publikacji tarnowskiego filozofa zabrakło – wbrew deklaracjom – zarówno autentycznej nowości w treści dzieła, jak i solidności opracowania redakcyjnego.

Adam Świeżyński  
Instytut Filozofii UKSW

Kazimierz Świrydowicz, *Logika modalna*, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 2004, ss. 335.

Recenzowana praca jest pierwszą polskojęzyczną książkową publikacją, będącą encyklopedycznym zbiorem ważnych informacji na temat rodziny systemów formalnych określanych jako logiki modalne. Do tej pory jedyną napisaną w języku polskim a dotyczącą podobnej problematyki pozycją była publikacja J. Perzanowskiego *Logiki modalne a filozofia* (Uniw. Jagielloński, Kraków 1989), która jednak ze względu na swój specyficzny charakter (jest to rozprawa habilitacyjna) nie zdaje sprawy z ogółu dokonań w dziedzinie logiki modalnej, koncentrując uwagę jedynie na wybranych systemach logicznych. Recenzowana książka jest natomiast, w zamierzeniu jej autora, podręcznikiem adresowanym do studentów filozofii i matematyki, który z powodzeniem może być przydatny także specjalistom zajmującym się współczesnymi sformalizowanymi teoriami modalności. Z uwagi na ilość i różnorodność współcześnie publikowanych wyników, dotyczących takich systemów, autor stanął przed koniecznością wyboru tylko niektórych zagadnień. Należy zauważyć, że przedstawiony materiał został tak dobrany aby przedstawić możliwie jak najbardziej kompletną mapę formalnych rachunków modalnych razem z ich charakterystyką semantyczną. Rozważania ograniczone są jedynie do modal-

nych logik zdaniowych ujętych na sposób gödłowski – będących odpowiednimi rozszerzeniami klasycznej logiki zdaniowej (opisującymi znaczenia jednoargumentowych spójników:  $\Box$ ...,  $\Diamond$ ... czytanych odpowiednio: *konieczne jest, że...* i *możliwe jest, że...*). Modalności są tu rozumiane na tyle szeroko, że bierze się pod uwagę nie tylko aleityczne logiki modalne, ale także rachunki, w których funktry modalne występują w znaczeniach deontycznym, temporalnym, epistemicznym i dynamicznym.

Z uwagi na treść poruszanych zagadnień, praca podzielona jest na trzy części: Część I. *Wprowadzenie do logiki modalnej* (s. 11-112), Część II. *Zastosowania logiki modalnej* (s. 113-225), Część III. *Problemy teoretyczne logiki modalnej* (s. 227-326).

W Części I charakteryzuje się klasyczną logikę zdaniową, która następnie rozszerzana jest do odpowiednich systemów modalnych. Logika klasyczna wyrażona jest w standardowo zdefiniowanym języku, na którego słownik składają się: przeliczalny zbiór zmiennych zdaniowych:  $p_1, p_2, \dots, p_i, \dots$ , spójniki ekstensjonalne:  $\sim, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$  oraz nawiasy. Charakteryzuje się ją w sposób inwariantny (bez reguły podstawiania a z jedną tylko regułą pierwotną – *modus ponendo ponens*) przez aksjomatykę standardową. Pojęcie tezy odwołuje się do pojęcia dowodu zwykłego. Po przedstawieniu wybranych metatez logiki klasycznej, wskazuje się na dwie własności metalogiczne logiki klasycznej, które są istotne z punktu widzenia konstrukcji teorii na niej opartych – spełnianiu twierdzenia o dedukcji oraz pełności w dwuelementowej algebrze Boole'a. Przez to, że rachunki modalne są rozszerzeniami logiki klasycznej, rozumie się że każdy z nich jest MP – teorią, tj. zbiorem wyrażań zdaniowych domkniętym ze względu na *modus ponens* i zawierającym wszystkie tezy logiki klasycznej. Wprowadzenie pojęcia MP – teorii umożliwia sformułowanie jednego z najistotniejszych w rozważaniach semantycznych twierdzeń – twierdzenia Lindenbauma. Zgodnie z tym twierdzeniem, każdy niesprzeczny na gruncie dowolnej MP – teorii zbiór zdań daje się rozszerzyć do zbioru zarazem MP – niesprzecznego i MP – zupełnego. Twierdzenie Lindenbauma odniesione do branych pod uwagę logik modalnych umożliwia przeprowadzenie dowodów ich pełności w odpowiednich strukturach semantycznych.

Aby przedstawić w uporządkowany sposób brane pod uwagę logiki modalne, Świrydowicz przyjmuje ich podział za E. J. Lemmo-

nem<sup>1</sup> na rachunki regularne (tj. takie, do których należą aksjomaty o postaci (K)  $\Box(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\Box\alpha \rightarrow \Box\beta)$  i w których dopuszczalna jest reguła regularności:  $\alpha \rightarrow \beta \vdash \Box\alpha \rightarrow \Box\beta$ ) oraz logiki normalne (zawierające wśród tez wyrażenia o postaci (K) i domknięte na regułę Gödla:  $(\alpha \vdash \Box\alpha)$ ). Autor wymienia wśród logik regularnych: najmniejszą logikę regularną C2, logikę deontyczną D2, logikę epistemiczną E2, systemy E4 i FLs (*Falsum*). Do analizowanych rachunków normalnych należą natomiast systemy: K, T, B, S4, S5, Tr (tzw. system trywialny) oraz Ver (*Verum*). Autor przedstawia syntaktyczne zależności występujące między wspomnianymi logikami.

Własności semantyczne prezentowanych rachunków modalnych omawia się w ramach najpopularniejszej współcześnie semantyki światów możliwych (in. semantyki Kripkego, semantyki struktur relacyjnych). Jak na to zwraca uwagę autor, filozoficzne uzasadnienie adekwatności takiej interpretacji systemów modalnych odwołuje się do pojęcia świata możliwego, które ma tłumaczyć znaczenie funktorów modalnych możliwości i konieczności. Z punktu widzenia technicznego, brak definicji świata możliwego w ramach semantyki relacyjnej nie ma znaczenia jednakże jest on kłopotliwy właśnie z powodów filozoficznych. Brak odpowiedniego wyjaśnienia znaczenia tego pojęcia nie prowadzi jednak, wbrew opinii autora, do błędnego koła.<sup>2</sup> Nie jest też trafna opinia, że takiego błędnego koła pozwala uniknąć wprowadzenie pojęcia relacji dostępności. Jak wiadomo, relacja dostępności jest w tym sensie pojęciem zależnym od pojęcia świata możliwego (a nie odwrotnie) – definiuje się ją jako podzbiór iloczynu kartezjańskiego właśnie zbioru światów możliwych.

W ramach omawianej teorii semantycznej definiuje się najpierw: strukturę relacyjną, model (formuły, logiki), spełnianie formuł w świecie możliwym modelu M<sup>3</sup>, model kanoniczny.

<sup>1</sup> E. J. Lemmon, „Algebraic Semantics for Modal Logic” I, II, *Journal of Symbolic Logic* 33(1966), 46-65, 191-218.

<sup>2</sup> Można byloby zastanawiać się co najwyżej nad tym, czy proponowane uzasadnienie zastosowania semantyki Kripkego do tłumaczenia znaczenia funktorów modalnych nie zawiera *ignotum per ignotum* (por. Rozdział 3. *Modalne logiki normalne: semantyka relacyjna*)

<sup>3</sup> Nie korzysta się tu z mniej popularnej techniki polegającej na zastosowaniu pojęcia funkcji homomorficznej będącej rozszerzeniem wartościowania zmiennych zdaniowych na zbiór wszystkich formuł, przyporządkowującej w ustalonym świecie możliwym wartości 1 lub 0 z dwuelementowej algebry Boole’a wartości logicznym.

Wprowadzone pojęcia pozwalają przeprowadzić dowód twierdzenia o słabej pełności logiki K w klasie wszystkich struktur relacyjnych. Dowody słabej pełności pozostałych rachunków modalnych branych w odpowiednich klasach struktur są przedstawione szkicowo, ponieważ mają one taki sam przebieg jak dowód dla rachunku K. Dodatkowo rozważa się także pełność w odpowiednich klasach struktur relacyjnych logik S4.3 i S4.2. Dość szczegółowo przedstawia się dowód niepełności w semantyce relacyjnej logiki monotonicznej van Benthema, której aksjomatami specyficznym są formuły postaci:  $(VB) \diamond \Box \alpha \vee \Box (\Box (\Box \alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha)$ . Do pełniejszego omówienia niektórych stosunków semantycznych zachodzących między wybranymi logikami modalnymi a strukturami relacyjnymi wraca się w ostatniej części książki (w Rozdziale 14. *Kwestia definiowalności modalnej* przedstawia się możliwości i ograniczenia dotyczące definiowania rozmaitych własności formalnych relacji dostępności światów możliwych w zdaniowym języku modalnym, zaś w Rozdziale 16. *Kwestia kanoniczności* rozważa się różnice między słabą a mocną pełnością w modelach kanonicznych). W omawianej części przedstawia się także bardzo interesujące uogólnienia struktur relacyjnych – struktury dla logik ściśle regularnych (tj. takich, które nie są domknięte ze względu na regułę Gödla) oraz struktury otoczeniowe. Struktury relacyjne dla logik ściśle regularnych są charakteryzowane przez uniwersum światów możliwych, relację dostępności oraz określony podzbiór uniwersum – zbiór światów nienormalnych (tj. takich, w których wszystko jest możliwe). Semantyka tego rodzaju jest uogólnieniem standardowej semantyki relacyjnej w tym sensie, że modele, w których zbiór światów nienormalnych jest pusty redukują się do modeli Kripkego. Uogólnione struktury z niepustym zbiorem światów nienormalnych pozwalają dowodzić pełności takich logik ściśle regularnych: D2, E2, E4, FLs. Struktury relacyjne otoczeniowe (tzw. semantyka topologiczna, in. semantyka Scotta-Montague'a) różnią się od standardowej struktury światów możliwych tym, że nie bierze się w nich pod uwagę relacji dostępności między światami możliwymi. Są one wyznaczone przez uniwersum światów możliwych oraz funkcję N, która każdemu światu możliwemu przyporządkowuje pewien zbiór podzbiorów zbioru światów możliwych (U) tj.  $N: U \rightarrow 2^{2^U}$ . Struktury otoczeniowe dają semantykę ogólniejszą od struktur Kripkego, ponieważ istnieją ta-

kie modele otoczeniowe, które falsyfikują niektóre formuły spełnione w modelach Kripkego.

Ostatnim zagadnieniem omawianym w tej części pracy jest rozstrzygalność odpowiednich systemów modalnych. Przedstawia się tu dwie standardowe metody stwierdzania rozstrzygalności – metodę filtracji oraz metodę tablic semantycznych. Rozstrzygalność systemu K dowodzona jest za pomocą własności modelu skończonego. Szczegółowe reguły konstrukcji tablic semantycznych pozwalają natomiast na przeprowadzenie dowodu rozstrzygalności rachunków: K, T, S4, S5.

Część II recenzowanej pozycji zawiera przykłady zastosowania rachunków modalnych przedstawionych w Części I. Pierwszym przytoczonym przez autora przykładem tego rodzaju są cztery rachunki deontyczne, będące próbą formalizacji tzw. wyrażeń normatywnych biorących udział w rozumowaniach prowadzonych w ramach prawoznawstwa i etyki.<sup>4</sup> Dwa pierwsze (tzw. Old System oraz dyadyczna logika deontyczna) autorstwa G. H. von Wrighta wykluczają możliwość iteracji funktorów deontycznych. W Old System zmienne zdaniowe użyte w kontekstach deontycznych pełnią rolę nazw generalnych. Inaczej jest w przypadku dyadycznej logiki deontycznej, która w intencji jej autora ma likwidować tzw. paradoks dobrego Samarytanina oraz rozwiązywać tzw. zagadkę Chisholma. Logiki von Wrighta nie angażują funktorów modalnych, będących przedmiotem opisu rachunków omówionych w części I i nie otrzymują też interpretacji semantycznej w strukturach relacyjnych. Należy sądzić, że są one przytaczane przede wszystkim z powodów historycznych. Logiką, w której funktory deontyczne są definiowalne za pomocą funktorów:  $\Box$ ,  $\Diamond$  jest natomiast prezentowany system A. R. Andersona a także pewne idee formalizacyjne autorstwa Z. Ziemby odtworzone w języku zdaniowym<sup>5</sup>.

Drugim przykładem zastosowań logiki modalnej (dokładniej – systemu Gödla-Löba GL) jest interpretacja funktorów modalnych w terminach związanych z arytmetyką Peano. Założenia upraszczające Gödla dowód o niezupełności tej teorii (podane przez Löba) wykorzystują pojęcie *dowodliwości formuły o numerze Gödla*  $\phi$

---

<sup>4</sup> Funktorami tworzącymi wyrażenia normatywne są m.in.: *obowiązkowe jest, że...*, *dozwolone jest, że...*, *nakazane jest, że...*, *zakazane jest, że...* itp.

<sup>5</sup> Ziemba posługuje się w swoich formalizacjach językiem predykatowym.

(skrót: Bew ( $\phi$ )) Pojęcie to ma takie same własności formalne jak funktor konieczności występujący w rachunku GL. Na tej podstawie można ustalić, że dana formuła modalna  $\alpha$  jest tezą rachunku GL wtedy, gdy formuła z niej powstająca przez wstawienie w miejsce funktora  $\Box$  wyrażenia: Bew jest tezą arytmetyki Peano (tzw. pierwsze twierdzenie Solovaya). Rozszerzenie logiki GL o aksjomaty postaci (T)  $\Box\alpha \rightarrow \alpha$  pozwala na dowód zależności silniejszej: wszystko, co można prawdziwie orzec o pojęciu dowodliwości w standardowym modelu arytmetyki Peano, jest ujęte w logice będącej wspomnianym rozszerzeniem (tzw. drugie twierdzenie Solovaya). Dowód pełności logiki GL w strukturach światów możliwych (z przechodnią relacją dostępności, której konwers jest dobrze ufundowany) oraz jej rozstrzygalność dają możliwość nowej interpretacji arytmetyki Peano.

Trzecim przykładem zastosowania logik modalnych, który przedstawia Świrydowicz jest konstrukcja tzw. logik temporalnych (w których bierze się pod uwagę takie funktory jak: G..., F..., H..., P... będące skrótami odpowiednio wyrażen: *zawsze będzie tak, że..., kiedyś będzie tak, że..., zawsze było tak, że..., kiedyś było tak, że...*) Zgodnie z intencją autora, aplikacja logik modalnych polega tu na traktowaniu relacji dostępności między światami możliwymi jako relacji następstwa czasowego, które zapoczątkowało rozwój semantyk temporalnych opisywanych przez rachunki temporalne. W ramach tej części pracy podaje się charakterystykę podstawowego systemu  $K_t$  (także dowód pełności  $K_t4$  w strukturach relacyjnych z relacją przechodnią i przeciwzrotną), definicje liniowych rozszerzeń logiki  $K_t4$ , do których należą: CL, SL, PL, PCr. Prezentuje się także logiki czasu rozgałęzionego (system  $K_b$  oraz same systemy  $K_t$  i  $K_t4$  będące w tym sensie logikami czasu rozgałęzionego, że nie rozstrzyga się w nich, iż takich rozgałęzień nie ma). Uwagę zwraca tutaj brak często spotykanych w literaturze interpretacji modalności za pomocą funktorów temporalnych (interpretacja stoicka –  $\Box\alpha \rightarrow \alpha \wedge G\alpha$ , interpretacja megarejsko-arystotelesowska  $\Box\alpha \leftrightarrow H\alpha \wedge \alpha \wedge G\alpha$ ). Tego rodzaju definicje umożliwiają odtworzenie w ramach niektórych logik temporalnych m.in. takich systemów modalnych jak: M, B, S4, S4.3, S5.<sup>6</sup> Zagadnienie podobieństwa semantycznego między logika-

<sup>6</sup> W literaturze polskojęzycznej zagadnienia te omawia np. J. Wajszczuk w *Logika a czas i zmiana*, Wyższa Szkoła Pedagogiczna, Olsztyn 1995.



mi modalnymi a temporalnymi, na które wskazuje Świrydowicz, uzyskuje precyzyjne sformułowanie i wyjaśnienie na terenie logik multimodalnych i ich semantyk multirelacyjnych, które jednak nie są omawiane w recenzowanej pozycji.<sup>7</sup> Te same systemy multimodalne dałyby także możliwość spojrzenia na istotę podobieństwa między logikami modalnymi a najprostszymi logikami programów – logikami dynamicznymi (w których występują funktory: [...])..., oraz  $\langle \dots \rangle$ ..., czytane w kontekstach:  $[\alpha]\phi$ ,  $\langle \alpha \rangle \phi$  odpowiednio: z konieczności po wykonaniu programu  $\alpha$  formuła  $\phi$  będzie prawdziwa, wykonanie programu  $\alpha$  niekiedy prowadzi do tego, że  $\phi$ ). Korzystając z pojęć multimodalnych, można byłoby przedstawić omawianą przez Świrydowicza logikę dynamiczną PDL.

W ramach zastosowań logik modalnych omawia się następnie cztery rachunki epistemiczne (w których wyróżnia się logiki wiedzy i logiki przekonania). Podaje się tu charakterystykę logiki wiedzy S4 oraz logiki przekonania D4 z pominięciem ich semantyki. Próbę sprecyzowania semantyki relacyjnej autor podejmuje natomiast odnośnie do dwóch logik stwierdzania autorstwa A. Wiśniewskiego. Choć ta część książki ma raczej charakter wykładu monograficznego niż podręcznikowy, to jednak informacje w niej zawarte dają dość precyzyjny pogląd na kierunek rozwoju zagadnień którymi zajmują się logiki epistemiczne. W rachunkach Wiśniewskiego znajdujemy wyrażenia:  $\Box$ ...,  $\Diamond$ ..., które w tym przypadku należy czytać odpowiednio: *stwierdza się, że*... oraz *dopuszcza się, że*... Pierwsza z prezentowanych logik nie jest ani regularna ani normalna. Precyzacja interpretacji logik Wiśniewskiego pozwala na przyporządkowanie im struktur relacyjnych, w których występują tzw. światy nienormalne a modalności nie są wzajemnie definiowalne. Omawiane rachunki są pełne w odpowiednich klasach takich struktur.

W ostatnim rozdziale Części II przytacza się jako przykłady zastosowania logik modalnych dwa dowody ontologiczne na istnienie absolutu autorstwa Ch. Hartshorne'a oraz K. Gödla. Przedstawia się tu syntaktyczną charakterystykę formalizacji Hartshorne'a. Co do drugiej formalizacji, Świrydowicz poprzestaje na pobieżnym omówieniu fragmentarycznych zapisków Gödla z 1970 roku (zatytułowanych „Ontologischer Beweis”), ponieważ ich uzupełnienie

<sup>7</sup> Takie ujęcie proponuje R. Goldblatt w *Logics of time and Computation*, Center for the Study of Language and Information, Lectures Notes, nr 7, 1989.



i analiza angażuje znacznie bogatszą logikę niż prezentowane logiki zdaniowe – modalną logikę drugiego rzędu.

Jeśli można mówić o niedoskonałościach Części II to chyba najważniejszą z nich jest brak precyzacji różnych znaczeń terminu „zastosowania logiki modalnej”. Należy sądzić, że celowe byłoby wyjaśnienie zasadniczej różnicy jaka zachodzi między związkami logiki modalnej z formalnymi systemami deontycznymi, temporalnymi, dynamicznymi i epistemicznymi (które same nazywane są „logikami modalnymi” w szerszym znaczeniu tego terminu) a związkami logiki modalnej (w węższym znaczeniu) z formalizacjami pozalogicznymi, jakimi są sformalizowane dowody Hartshorne’a oraz Gödla. Brak tego rodzaju rozróżnienia stwarza wrażenie braku jednorodności zasady podziału tej części pracy.

Ostatnia część omawianej pozycji (Część III) dotyczy rozmaitych szczegółowych technicznych zagadnień związanych z semantyką logik przedstawionych w Części I. Autor przedstawia alternatywną względem semantyki relacyjnej interpretację algebraiczną tych rachunków, rozważa wzajemne stosunki tych semantyk (tzw. teoria dualności). Wraca się tu do niektórych zagadnień przedstawionych w Części I. Tak jest w przypadku problemu definiowalności semantycznej odpowiednich własności relacji dostępności w terminach modalnych (który wiąże się z przekładalnością języka modalnego na język predykatów I oraz II rzędu). Pokazuje się tu dowody niektórych interesujących ustaleń, do których można zaliczyć np. to, że aksjomat charakterystyczny systemu Gödla-Löba (o postaci:  $\Box(\Box\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \Box\alpha$ ) nie definiuje żadnej własności relacji dostępności a formuła Mc Kinsey’a nie wyznacza własności I rzędu. Pokazuje się także, że niektóre własności formalne relacji dostępności nie są w ogóle definiowalne za pomocą formuł modalnych. Takimi własnościami są np. przeciwzwrotność, asymetria. Przedmiotem dość szczegółowych rozważań jest algorytm Sahlqvista – van Benthema przekładalności formuł modalnych na formuły rachunku predykatów I rzędu, mocna pełność niektórych systemów modalnych. Ciekawym uzupełnieniem informacji dotyczącej dualności interpretacji semantycznej systemów modalnych jest omówienie możliwości konstrukcji struktur relacyjnych uogólnionych, będących połączeniem interpretacji relacyjnej i algebraicznej. Aby otrzymać tego rodzaju strukturę, do dowolnie ustalonej struktury relacyjnej dołącza się pewną algebrę modalną, której uniwersum stanowi podzbiór

zbioru potęgowego uniwersum danej struktury relacyjnej. Rozważania ostatniej części zamyka Rozdział 18, który zawiera definicje podstawowych pojęć używanych w Części III. Wśród nich należy wymienić takie pojęcia jak: krata, algebra Boole'a, filtr, ultrafiltr, ultraprodukt, ultrapotęga.

Lektura recenzowanej pracy pozwala powiedzieć, że ilość, szczegółowość i precyzja podejmowanych zagadnień są wprost imponujące. Wobec ilości formalizmów w niej użytych, niewątpliwym sukcesem jest mała ilość błędów drukarskich.<sup>8</sup> Mankamenty, które można znaleźć w książce Świrydowicza w żaden sposób nie dyskwalifikują pracy a pokazują, że tego rodzaju pozycje wymagają uzupełnień i poprawek w kolejnych wydaniach. Z uwagi na charakter podręcznikowy recenzowanej pracy, warto byłoby uwzględnić ćwiczenia i zadania, za pomocą których czytelnik mógłby sprawdzić stopień zrozumienia przedstawianych zagadnień.<sup>9</sup> Przy okazji omawiania poszczególnych rachunków modalnych właściwie nie przytacza się też i reguł wtórnych wraz z ich dowodami<sup>10</sup>.

Wydaje się, że celowym zabiegiem metodologicznym mogłaby być zmiana kolejności części. Z punktu widzenia związków logicznych między Częściami I a III, powinny one bezpośrednio po sobie następować. Część II znalazłaby się wówczas na ostatnim miejscu.

*Kordula Świątorzecka*  
*Instytut Filozofii UKSW*

<sup>8</sup> Do takich uchybień należałoby prawdopodobnie zaliczyć np.:

(1) zbędny komentarz do p. 2 w lemacie 4.20. Na s. 93 czytamy: „Lemat 4.20. Istnieją takie modele otoczeniowe, które falsyfikują następujące formuły: [...] 2.  $\Box\phi \wedge \Box\psi \rightarrow \Box(\phi \wedge \psi)$ , gdzie T jest dowolną tautologią rachunku zdań”;

(2) pomyłkę w tekście: „jeśli  $\phi \in L$  (PA) [gdzie L (PA) jest językiem arytmetyki Peano], to symbol  $\phi$  (oznaczać będzie numer Gödla formuły A” – s. 132. Oczywiście, zamiast „A” powinno występować wyrażenie „ $\phi$ ”;

(3) przy okazji omawiania intuicji związanych z semantyką stwierdzenia A. Wiśniewskiego, pomieszenie języka przedmiotowego i metajęzyka, razem z błędnym komentarzem: „[...] osoba a musi na przykład zaakceptować wszystkie zdania postaci  $p \wedge \neg p \rightarrow \psi$ , gdzie p i  $\neg p$  to dowolna para zdań sprzecznych, akceptowanych przez osobę a, a  $\phi$  to dowolne zdanie.” – s. 205.

<sup>9</sup> Pod tym względem trudno jest przecenić podręcznik B. F. Chellasa, *Modal Logic: an Introduction*, Cambridge Univ. Press, 1984.

<sup>10</sup> Brak ten jest widoczny szczególnie wobec tego, że choć recenzowana praca koncentruje się na logikach nieklasycznych, to jedynie w przypadku logiki klasycznej przedstawia się zestaw dwudziestu czterech wtórnych tez razem z ich dowodami.