Korneliusz Policki

Teoria relacji Gergonne'a a sylogistyka Arystotelesa

Studia Philosophiae Christianae 41/2, 109-123

2005

M A T E R I A Ł Y

Studia Philosophiae Christianae
UKSW
41(2005)2

PRACE PRZEGLĄDOWE

KORNELIUSZ POLICKI

TEORIA RELACJI GERGONNE'A A SYLOGISTYKA ARYSTOTELESA

1. WSTĘP

Praca niniejsza jest w głównej mierze poświęcona teorii tzw. relacji Gergonne'a, przedstawionej przez J. A. Farisa w artykule *The Gergonne relations* w 1955 roku[1]. Oto krótka charakterystyka i geneza tej teorii.

Jak wiadomo logika tradycyjna wyróżniała pięć stosunków zachodzących między zakresami nazw niepustych, a mianowicie: (i) zamienności, (ii) podrzędności, (iii) nadrzędności, (iv) krzyżowania, (v) wykluczania. Stosunki te pozostają w bliskim związku ze zdaniami kategorycznymi z sylogistyki Arystotelesa.

J. A. Faris sądzi, że pierwszym autorem, który właściwie zrozumiał i ocenił rolę tych stosunków w sylogistyce, był XIX wieczny matematyk francuski J. D. Gergonne[2]. Stąd nazwanie tych stosunków relacjami Gergonne'a jest – zdaniem Farisa – jak najbardziej właściwe[3]. Gergonne, powołując się na te stosunki, podał wystarczające i konieczne warunki prawdziwości czterech znanych zdań kategorycznych. I tak np. zdanie ogólnotwierdzące: „Każde X jest Y" jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy podmiot tego zdania X pozostaje do orzecznika Y w stosunku (i) zamienności lub (ii) podrzędności zakresowej. Mógł zatem w sposób prosty uzasadnić prawa konwersji i prawa z kwadratu logicznego.

---

[1] J. A. Faris, *The Gergonne relations*, The Journal of Symbolic Logic 3(1955), 207-231.
[2] J. D. Gergonne, *Essai de dialectique rationelle*, Annales des Mathematiques 7(1817), 68-131.
[3] J. A. Faris, dz. cyt., 207.

Badając związki między relacjami (i) – (v), sformułował z kolei prostą metodę weryfikacji sylogizmów kategorycznych, na której gruncie można łatwo wyróżnić te spośród 256 możliwych trybów sylogistycznych, które są niezawodne.

Jak uważa we wstępie do swojej pracy Faris, Gergonne zainteresowany głównie systematycznym wykładem sylogistyki tradycyjnej, nie podjął dalszych badań nad teorią wymienionych powyżej relacji. Zdawał sobie jednak sprawę z możliwości konstrukcji tej teorii, którą zajął się jedynie częściowo[4]. Pierwszy systematyczny wykład teorii relacji Gergonne'a (teorii stosunków między zakresami nazw niepustych) pochodzi – jak się wydaje – od Farisa i został przedstawiony w cytowanej powyżej pracy. Faris ujmuje tę teorię w postaci systemu aksjomatycznego rozumianego w sposób następujący. Z jednej strony aksjomatyzuje, jak się to czyni zazwyczaj, zbiór twierdzeń systemu (zbiór formuł przyjętych), podając aksjomaty oraz klasycznie rozumiane reguły odrywania i podstawiania za zmienne nazwowe. Z drugiej strony aksjomatyzuje także w odpowiedni sposób zbiór tzw. formuł odrzuconych. Wyróżnia mianowicie aksjomaty odrzucone i odpowiednie reguły inferencji dla odrzucania (*rules of inference for rejection*), w szczególności łukasiewiczowskie reguły odrzucania przez odrywanie i odrzucania przez podstawienie. Wprowadza też specjalną regułę odrzucania (GR), odpowiadającą regule J. Słupeckiego, przedstawionej w pracy J. Łukasiewicza pt. *Aristotle's syllogistic from the standpoint of modern formal logic* (Oxford 1951).

Przez zbiór formuł odrzuconych rozumie się tu najmniejszy zbiór, zawierający zbiór aksjomatów odrzuconych i domknięty ze względu na reguły inferencji dla odrzucania. Korzystając z obu wymienionych powyżej formalizmów, Faris dowodzi między innymi, że teoria relacji Gergonne'a jest rozstrzygalna w tym sensie, że każda formuła zdaniowa jest tezą lub formułą odrzuconą tej teorii[5].

Z pewnych względów, o których będzie mowa w dalszym ciągu tej pracy, zajmiemy się głównie pozytywną częścią omawianej powyżej teorii relacji Gergonne'a i jej stosunkiem do sylogistyki Arystotelesa, w ujęciu aksjomatycznym pochodzącym od Łukasiewi-

[4] Tamże, 208.
[5] Tamże, 231.

cza[6]. Natomiast o formułach odrzuconych i rozstrzygalności tej teorii będzie mowa w ostatnim paragrafie niniejszej rozprawy.

2. CHARAKTERYSTYKA SYSTEMÓW G I Ł

Rozważaną tu teorię relacji Gergonne'a nazywamy systemem G, a sylogistykę Arystotelesa – systemem Ł. Obie teorie, będące pewnymi definicyjnymi rozszerzeniami ich oryginalnych ujęć podanych przez Farisa i Łukasiewicza, są sformułowane w tym samym języku J.

Alfabet języka J składa się z następujących symboli:

(1) spójników rachunku zdań: negacji (~), alternatywy ($\vee$), koniunkcji ($\wedge$), implikacji ($\Rightarrow$), równoważności ($\Leftrightarrow$);

(2) zmiennych nazwowych: X, Y, Z,..., X_1, X_2,...;

(3) stałych specyficznych tych teorii: a, i, =, $\subset$, $\supset$, x oraz e, z których dwie pierwsze są odpowiednio funktorami zdań kategorycznych: ogólnotwierdzącego i szczegółowotwierdzącego, a następne są kolejno symbolami: zamienności, podrzędności, nadrzędności, krzyżowania i wykluczania zakresowego nazw niepustych (zgodnie z sugestią Farisa, stosunki te nazywamy relacjami Gergonne'a);

(4) nawiasów.

W metajęzyku systemów G i Ł posługujemy się ponadto zmiennymi α, β, γ,..., α_1, α_2,..., reprezentującymi formuły zdaniowe tych systemów.

Niech N i N' będą dowolnymi zmiennymi nazwowymi. Zbiór formuł atomowych języka J składa się ze wszystkich formuł postaci: NaN', NiN', N=N', N$\subset$ N', N$\supset$N', N x N' oraz NeN'.

Przez zbiór formuł zdaniowych (sensownych) języka J rozumiemy najmniejszy zbiór formuł atomowych domknięty ze względu na spójniki rachunku zdań.

Systemy G i Ł są teoriami elementarnymi, nadbudowanymi nad klasycznym rachunkiem zdań. Pierwszy z nich – system G jest określony następującymi aksjomatami i definicjami.

Aksjomaty:

G1. $X = X$,

G2. $X = Y \Rightarrow (Z \subset Y \Rightarrow Z \subset X)$,

G3. $X = Y \Rightarrow (ZxY \Rightarrow ZxX)$,

[6] Por. przedruk w: J. Łukasiewicz, *Selected works*, Amsterdam-London 1970, 89-109; J. Łukasiewicz, *O sylogistyce Arystotelesa*, Sprawozdanie Polskiej Akademii Umiejętności 44(1939), 220-227.

G4. $X = Y \Rightarrow (Y \subset Z \Rightarrow X \subset Z)$,
G5. $X = Y \Rightarrow (ZeY \Rightarrow XeZ)$,
G6. $X \subset Y \Rightarrow (Y \subset Z \Rightarrow X \subset Z)$,
G7. $X \subset Y \Rightarrow (YeZ \Rightarrow XeZ)$,
G8. $\sim X = Y \Rightarrow (\sim X \subset Y \Rightarrow (\sim XxY \Rightarrow (\sim Y \subset X \Rightarrow XeY)))$,
G9. $X = Y \Rightarrow (\sim X \subset Y \wedge \sim XxY \wedge \sim XeY)$,
G10. $XxY \Rightarrow (\sim X \subset Y \wedge \sim XeY)$.
Definicje:
DG1. $X \supset Y \Leftrightarrow Y \subset X$,
DG2. $XaY \Leftrightarrow X = Y \vee X \subset Y$,
DG3. $XiY \Leftrightarrow \sim XeY$.

Zbiór aksjomatów: G1, …, G10 i definicji: DG1, …, DG3 oznaczamy symbolem Ax_1.

System Ł jest z kolei oparty na następującym układzie aksjomatów i definicji:
Aksjomaty:
Ł1. XaX,
Ł2. XiX,
Ł3. $YaZ \wedge XaY \Rightarrow XaZ$,
Ł4. $YaZ \wedge YiX \Rightarrow XiZ$.
Definicje:
DŁ1. $X = Y \Leftrightarrow XaY \wedge YaX$,
DŁ2. $X \subset Y \Leftrightarrow XaY \wedge \sim YaX$,
DŁ3. $X \supset Y \Leftrightarrow YaX \wedge \sim XaY$,
DŁ4. $XxY \Leftrightarrow XiY \wedge \sim XaY \wedge \sim YaX$,
DŁ5. $XeY \Leftrightarrow \sim XiY$.

Zbiór aksjomatów: Ł1, …, Ł4 i definicji: DŁ1,..., DŁ5 oznaczamy symbolem Ax_2.

Łatwo zauważyć, że terminami pierwotnymi systemu G są symbole: $=$, $\subset$, x, e, zaś zdefiniowanymi: $\supset$, a, i. Terminami pierwotnymi systemu Ł są symbole: a, i, natomiast zdefiniowanymi: $=$, $\subset$, $\supset$, x, e.

Niech $\alpha\ (X_i / X_j)$ oznacza formułę otrzymaną z formuły $\alpha\ (X_i)$ przez podstawienie za zmienną X_i zmiennej X_j. Spełniony przy tym musi być warunek: zmienną X_i zastępujemy zmienną X_j na każdym miejscu, w którym występuje ona w formule $\alpha\ (X_i)$.

Następujące dwie definicje określają odpowiednio pojęcia dowodu i tezy systemów G i Ł.

Definicja I. Dowodem formuły a na gruncie zbioru aksjomatów Ax_1 (Ax_2) nazywamy skończony ciąg formuł

(*) $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ taki, że ostatnia formuła tego ciągu jest identyczna z formułą α: $\alpha_n = \alpha$, oraz każda formuła α_i ciągu (*) $(1 \leq i \leq n)$ spełnia przynajmniej jeden z następujących warunków:

(1) $\alpha_i \in Ax_1$ (Ax_2) (α_i jest aksjomatem lub definicją systemu);

(2) α_i jest podstawieniem tautologii klasycznego rachunku zdań;

(3) α_i powstaje z wcześniejszej formuły ciągu (*) $a_j = \beta(X_k)$ $(j < i)$ przez podstawienie zmiennej X_1 za zmienną X_k: $\alpha_i = \beta(X_k / X_1)$;

(4) α_i powstaje z dwóch wcześniejszych formuł ciągu (*) α_j, α_k $(j, k < i)$ przez odrywanie: $\alpha_j = (\alpha_k \Rightarrow \alpha_i)$.[7]

Zgodnie z definicją I, pierwotnymi regułami inferencji obu rozpatrywanych systemów są: reguła podstawiania za zmienne nazwowe i reguła odrywania.

Definicja II. Formuła α jest tezą systemu G (systemu Ł) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje skończony ciąg formuł $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, będący dowodem formuły α na gruncie zbioru Ax_1 (Ax_2).

Podane powyżej określenia systemów G i Ł różnią się od oryginalnych ujęć tych teorii w następujących punktach. Przede wszystkim, o czym już była mowa wcześniej, są one definicyjnymi rozszerzeniami przedstawionej przez Farisa teorii relacji Gergonne'a i przedstawionej przez Łukasiewicza sylogistyki Arystotelesa. Rozszerzenia te są jednak nieistotne w tym sensie, że dołączone do tych systemów definicje: DG1,..., DG3 oraz DŁ1,..., DŁ5 spełniają warunki nietwórczości i przekładalności, tzn. nie wzbogacają tych systemów o nowe twierdzenia nie zawierające terminów zdefiniowanych, a wprowadzone przez nie symbole można z dowolnego kontekstu zdaniowego wyeliminować. Występują tu także pewne różnice w sposobie traktowania definicji, które Łukasiewicz i Faris formułują w postaci metasystemowych reguł zastępowania. Natomiast dołączone do systemów G i Ł równoważności: DG1,..., DG3 oraz DŁ1,..., DŁ5 są tezami, traktowanymi na równi z aksjomatami. Takie ujęcie definicji upraszcza teorie, gdyż nie wymaga dodatkowych reguł inferencji.

Relacje zamienności, podrzędności, krzyżowania, nadrzędności i wykluczania oznaczaliśmy symbolami: $=, \subset, x, \supset, e$, zaczerpniętymi z pracy Paula Thoma[8]. Faris natomiast relacje te oznacza cyframi: 1, 2, 3, 4 i 5.

---

[7] Symbol: =, którym posłużyliśmy się w definicji I, jest symbolem równokształtności formuł.

[8] P. Thom, *The syllogism*, Philosophia Verlag, München 1981, 253.

Należy odnotować, że zarówno Łukasiewicz, jak i Faris prezentują swoje teorie w symbolice beznawiasowej.

3. RÓWNOWAŻNOŚĆ SYSTEMÓW G I Ł

Twierdzenie I. Systemy G i Ł są teoriami równoważnymi.

Równoważność teorii aksjomatycznych jest tu rozumiana w sposób następujący:

Definicja III. Dwie teorie aksjomatyczne są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy zbiory tez i zbiory reguł inferencji tych teorii są identyczne, tj. gdy każda teza jednej z tych teorii jest tezą drugiej teorii i każda reguła inferencji jednej z tych teorii jest pierwotną lub wtórną regułą inferencji drugiej teorii[9].

Dowód

Oba systemy są sformułowane w tym samym języku oraz posiadają te same pierwotne reguły inferencji: regułę odrywania i regułę podstawiania za zmienne nazwowe. Zgodnie z definicjami I, II i III wystarczy więc wykazać, że każdy aksjomat i każda definicja jednego z tych systemów jest tezą drugiego systemu.

Systemy te są teoriami nadbudowanymi metasystemowo nad klasycznym rachunkiem zdań, tzn. tezami tych systemów są wszystkie podstawienia tautologii rachunku zdań przez wrażenia sensowne języka L (por. definicja I). Stąd w dowodach tez systemów G i Ł korzystamy, oprócz aksjomatów, definicji i reguł pierwotnych tych systemów, także z licznych tautologii i reguł rachunku zdań.

Wobec tego, że śledzenie dowodów nie powinno sprawiać większych trudności, formułujemy je w postaci skróconej, umieszczając w nawiasach klamrowych obok dowodzonych tez numery odpowiednich aksjomatów, definicji i wcześniej udowodnionych twierdzeń. Poza sporadycznymi przypadkami, nie wymieniamy też znanych tautologii i reguł rachunku zdań, znajdujących zastosowanie w dowodach.

Udowadniamy najpierw, że:

(A) Aksjomaty: Ł1,..., Ł4 i definicje: DŁ1,..., DŁ5 systemu Ł są tezami systemu G.

Korzystamy tu także z następujących twierdzeń systemu G, udowodnionych przez Farisa:

---

[9] L. Borkowski, *Formale Logik*, Akademie-Verlag, Berlin 1976, 498.

(11.1) $X = Y \Rightarrow (Y = Z \Rightarrow X = Z)$,
(12.2) $X = Y \Rightarrow (Y \subset Z \Rightarrow X \subset Z)$,
(14) $X = Y \Rightarrow \sim X \subset Y$,
(15.5) $X = Y \Rightarrow (YeZ \Rightarrow XeZ)$,
(16) $X = Y \Rightarrow \sim XxY$,
(21) $\sim XeX$,
(21.2) $X \subset Y \Rightarrow (Y = Z \Rightarrow X \subset Z)$,
(25) $XxY \Rightarrow YxX$,
(27) $XeY \Rightarrow YeX$,
(29) $X = Y \Rightarrow Y = X$,
(35) $XxY \Rightarrow \sim X \subset Y$,
(40) $X \subset Y \Rightarrow \sim X \supset Y$,
L1. XaX {DG2, G1},
L2. XiX {DG3, (21)},
L3.1. $(X = Y \wedge Y = Z) \Rightarrow (X = Z \vee X \subset Z)$ {(11.1)},
3.2. $(X = Y \wedge Y \subset Z) \Rightarrow (X = Z \vee X \subset Z)$ {(12.2)},
3.3. $(X \subset Y \wedge Y = Z) \Rightarrow (X = Z \vee X \subset Z)$ {(21.2)},
3.4. $(X \subset Y \wedge Y \subset Z) \Rightarrow (X = Z \vee X \subset Z)$ {G6},
3.5 $(XaY \wedge YaZ) \Leftrightarrow (X = Y \wedge Y = Z) \vee (X = Y \wedge Y \subset Z) \vee (X \subset Y \wedge Y = Z) \vee (X \subset Y \wedge Y \subset Z)$ {DG2},
L3. $XaY \wedge YaZ \Rightarrow XaZ$ {L3.1-3.5, DG2},
L4.1. $(Y = Z \vee Y \subset Z) \wedge XeZ \Rightarrow YeX$ {(15.5), G7, (27)},
L4. $YaZ \wedge YiX \Rightarrow XiZ$ {DG2, DG3, L4.1},
L5.1. $X = Y \Leftrightarrow (X = Y \vee X \subset Y) \wedge (Y = X \vee Y \subset X)$ {(29), (14), (40), DG1},
L5. $X = Y \Leftrightarrow (XaY \wedge YaX)$ {L5.1, DG2},
L6.1. $\sim (X =Y \wedge \sim Y = X \wedge \sim Y \subset X)$ {(29)},
6.2. $X \subset Y \Leftrightarrow (X \subset Y \wedge \sim Y = X \wedge \sim Y \subset X)$ {(14), (29), (40), DG1},
6.3 $(X = Y \vee X \subset Y) \wedge (\sim Y = X \wedge \sim Y \subset X) \Leftrightarrow (X \subset Y \wedge \sim Y = X \wedge \sim Y \subset X)$ {L6.1}.

Formuła 6.3. jest podstawieniem prawa rozdzielności koniunkcji względem alternatywy:

$(p \vee q) \wedge r \Leftrightarrow (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$.

Następnie:

L6. $X \subset Y \Leftrightarrow XaY \wedge \sim YaX$ {L6.1-6.3, DG2},
L7. $X \supset Y \Leftrightarrow YaX \wedge \sim XaY$ {DG1, L6},
L8.1. $XxY \Rightarrow (\sim X = Y \wedge \sim X \subset Y \wedge \sim Y \subset X \wedge \sim XeY)$ {G10, (16), (25)},

8.2. $(\sim X = Y \wedge \sim X \subset Y \wedge \sim Y \subset X \wedge \sim XeY) \Rightarrow XxY$ {G8},

8.3 $(XiY \wedge \sim XaY \wedge \sim YaX) \Leftrightarrow (\sim X{=}Y \wedge \sim X{\subset}Y \wedge \sim Y{\subset}X \wedge \sim XeY)$ {DG2, DG3, (29)},

L8. $XxY \Leftrightarrow (XiY \wedge \sim XaY \wedge \sim YaX)$ {L8.1-8.3},

L9. $XeY \Leftrightarrow XiY$ {DG3}.

Uzasadnione powyżej lematy: L1, L2,…, L9 są odpowiednio równokształtne z aksjomatami: Ł1,…, Ł4 i definicjami: DŁ1,…, DŁ5 systemu Ł, udowodniliśmy zatem przypadek (A).

Wykażemy z kolei, że:

(B) Aksjomaty: G1,..., G10 i definicje: DG1,..., DG3 systemu G są tezami systemu Ł.

W dowodzie tego przypadku korzystamy między innymi z następujących formuł, będących znanymi prawami sylogistyki Arystotelesa:

(a_1) $XaY \Rightarrow XiY$ (prawo nadrzędności z kwadratu logicznego),

(a_2) $YaX \Rightarrow XiY$ (*conversio per accidens*),

(a_3) $YaZ \wedge XiY \Rightarrow XiZ$ (Darii),

(a_4) $YeZ \wedge XaY \Rightarrow XeZ$ (Celarent),

(a_5) $ZeY \wedge XaY \Rightarrow XeZ$ (Cesare).

Formuły (a_4) i (a_5) można w systemie Ł udowodnić na gruncie definicji DŁ5.[10]

T1. $X = X$ {DŁ1, Ł1},

T2.1. $(XaY \wedge YaX) \Rightarrow (ZaY \Rightarrow ZaX)$ {Ł3},

2.2. $(XaY \wedge YaX) \Rightarrow (\sim YaZ \Rightarrow \sim XaZ)$ {Ł3},

2.3. $(XaY \wedge YaX) \Rightarrow (ZaY \wedge \sim YaZ \Rightarrow ZaX \wedge \sim XaZ)$ {T2.1-2.2},

T2. $X = Y \Rightarrow (Z \subset Y \Rightarrow Z \subset X)$ {T2.3, DŁ1, DŁ2},

T3.1. $(XaY \wedge YaX) \Rightarrow (ZiY \Rightarrow ZiX)$ {(a_3)},

3.2. $(XaY \wedge YaX) \Rightarrow (\sim ZaY \Rightarrow \sim ZaX)$ {Ł3},

3.3. $(XaY \wedge YaX) \Rightarrow (\sim YaZ \Rightarrow \sim XaZ)$ {Ł3},

3.4. $(XaY \wedge YaX) \Rightarrow ((ZiY \wedge \sim ZaY \wedge \sim YaZ) \Rightarrow (ZiX \wedge \sim ZaX \wedge \sim XaZ))$ {T3.1-3.3},

T3. $X = Y \Rightarrow (ZxY \Rightarrow ZxX)$ {T3.4, DŁ1, DŁ4},

T4.1. $(XaY \wedge YaX) \Rightarrow (YaZ \Rightarrow XaZ)$ {Ł3},

4.2. $(XaY \wedge YaX) \Rightarrow (\sim ZaY \Rightarrow \sim ZaX)$ {Ł3}

---

[10] Por. J. Łukasiewicz, *Aristotle's syllogistic from the standpoint of modern formal logic*, Oxford 1951, 6.

4.3. $(XaY \wedge YaX) \Rightarrow (YaZ \wedge \sim ZaY \Rightarrow XaZ \wedge \sim ZaX)$ {T4.1-4.2},

T4. $X = Y \Rightarrow (Y \subset Z \Rightarrow X \subset Z)$ {T4.3, DŁ1, DŁ2},

T5.1. $(XaY \wedge YaX) \Rightarrow (ZeY \Rightarrow XeZ)$ {(a_5)},

T5. $X = Y \Rightarrow (ZeY \Rightarrow XeZ)$ {T5.1, DŁ1},

T6.1. $(XaY \wedge \sim YaX) \Rightarrow (YaZ \Rightarrow XaZ)$ {Ł3},

6.2. $(XaY \wedge \sim YaX) \Rightarrow (\sim ZaY \Rightarrow \sim ZaX)$ {Ł3},

6.3. $(XaY \wedge \sim YaX) \Rightarrow (YaZ \wedge \sim ZaY \Rightarrow XaZ \wedge \sim ZaX)$ {T6.1-6.2},

T6. $X \subset Y \Rightarrow (Y \subset Z \Rightarrow X \subset Z)$ {T6.3, DŁ2},

T7.1. $(XaY \wedge \sim YaX) \Rightarrow (YeZ \Rightarrow XeZ)$ {(a_4)},

T7. $X \subset Y \Rightarrow (YeZ \Rightarrow XeZ)$ {T7.1, DŁ2},

T8. $\sim X = Y \Rightarrow (\sim X \subset Y \Rightarrow (\sim XxY \Rightarrow (\sim Y \subset X \Rightarrow XeY)))$.

Nieco trudniejszy dowód tezy T8 przedstawimy bardziej szczegółowo.

Załóżmy nie wprost, że T8 jest fałszywe. Zgodnie z definicjami: DŁ1, DŁ2, DŁ4, DŁ5 wynika stąd, że prawdziwa jest koniunkcja

(1) $(\sim XaY \vee \sim YaX) \wedge (\sim XaY \vee YaX) \wedge (\sim YaX \vee XaY) \wedge (\sim XiY \vee XaY \vee YaX) \wedge XiY$.

Zachodzi oczywiście następująca równoważność, będąca podstawieniem prawa rozdzielności koniunkcji względem alternatywy:

(2) $(\sim XiY \vee XaY \vee YaX) \wedge XiY \Leftrightarrow (\sim XiY \wedge XiY) \vee (XaY \wedge XiY) \vee (YaX \wedge XiY)$.

Stąd, z (a_1) i (a_2) oraz z tautologii: $(((\sim p \wedge p) \vee q) \Leftrightarrow q)$ i $((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge q \Leftrightarrow p))$ wynika, że prawdziwa jest równoważność:

(3) $(\sim XiY \vee XaY \vee YaX) \wedge XiY \Leftrightarrow (XaY \vee YaX)$.

Z (1) i (3) otrzymujemy z kolei:

(4) $(\sim XaY \vee \sim YaX) \wedge (\sim XaY \vee YaX) \wedge (\sim YaX \vee XaY) \wedge (XaY \vee YaX)$.

Koniunkcja (4) – co łatwo sprawdzić – jest sprzeczna, dowód nie wprost T8 jest więc zakończony.

T8 jest niewątpliwie jedną z ciekawszych tez, które można udowodnić na gruncie sylogistyki Arystotelesa.

T9.1. $(XaY \wedge YaX) \Rightarrow \sim (XaY \wedge \sim YaX)$,

9.2 $(XaY \wedge YaX) \Rightarrow \sim (XiY \wedge \sim XaY \wedge \sim YaX)$,

9.3 $(XaY \wedge YaX) \Rightarrow XiY$ {(a_1)}.

Implikacje T9.1 i T9.2 są – co jest widoczne – podstawieniem tautologii rachunku zdań.

T9. $X = Y \Rightarrow (\sim X \subset Y \wedge XxY \wedge \sim XeY)$ {T9.1-9.3, DŁ1, DŁ2, DŁ4, DŁ5},

T10. $XxY \Rightarrow (\sim X \subset Y \wedge \sim XeY)$ {DŁ2, DŁ4, DŁ5},
T11. $X \supset Y \Leftrightarrow Y \subset X$ {DŁ2, DŁ3},
T12. $XaY \Leftrightarrow X = Y \vee X \subset Y$ {DŁ1, DŁ2},
T13. $XiY \Leftrightarrow \sim XeY$ {DŁ5}.

Tezy: T1, T2,…, T13 są kolejno równokształtne z aksjomatami: G1, G2,…, G10 oraz definicjami: DG1,…, DG3 systemu G, co z kolei kończy dowód przypadku (B), a więc i twierdzenia I.

4. NIEKTÓRE SKUTKI ZALEŻNOŚCI MIĘDZY SYSTEMAMI G I Ł

Udowodnione w poprzednim paragrafie twierdzenie I jest interesujące z następujących względów. Po pierwsze, świadczy ono o tym, że teoria relacji Gergonne'a i sylogistyka Arystotelesa, to właściwie jeden i ten sam tradycyjny rachunek nazw. W tym samym sensie mówi się np. o jednym i tym samym klasycznym dwuwartościowym rachunku zdań, który posiada wiele równoważnych aksjomatycznych ujęć o różnych aksjomatach, terminach pierwotnych i regułach pierwotnych.

Po drugie, sylogistyka Arystotelesa została dość dokładnie zbadana, a zgodnie z twierdzeniem I pewne jej właściwości można łatwo przenieść na teorię relacji Gergonne'a. Jedną z takich ciekawszych właściwości sylogistyki jest jej rozstrzygalność, której dowód – jak wiadomo – pochodzi od J. Słupeckiego[11]. Zagadnienie to postaramy się nieco szczegółowiej zreferować.

W dowodzie rozstrzygalności sylogistyki Arystotelesa Słupecki korzysta z wprowadzonej przez Łukasiewicza tzw. aksjomatycznej metody odrzucania[12]. Rozstrzygalność w rozumieniu Łukasiewicza została przez Słupeckiego nazwana Ł-rozstrzygalnością, który definicję tego pojęcia sformułował w pracy pt. *Z badań nad sylogistyką Arystotelesa* (Prace Wrocławskiego Towarzystwa Naukowego, ser. B, NO 6, Wrocław 1948).

W metodzie tej istotną rolę pełni pojęcie formuły odrzuconej, wprowadzone do logiki po raz pierwszy przez Łukasiewicza[13]. Z intuicyjnego punktu widzenia formułami odrzuconymi danego syste-

[11] Por. Tamże.

[12] Metoda ta została przedstawiona w: przedruk w: J. Łukasiewicz, *Selected works*, Amsterdam-London 1970, 89-109; J. Łukasiewicz, *O sylogistyce Arystotelesa*, Sprawozdanie Polskiej Akademii Umiejętności 44 (1939), 220-227.

[13] Por. J. Łukasiewicz, *Logika dwuwartościowa*, Przegląd Filozoficzny 23(1921), 189-205.

mu nazywamy formuły fałszywe oraz te formuły, których z różnych względów nie chcemy zaliczyć do tez systemu. System dedukcyjny nazywamy Ł-rozstrzygalnym wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są następujłce warunki:

(I) $T \cap T^{-1} = \emptyset$,

(II) $T \cup T^{-1} = S$,

gdzie T jest zbiorem wszystkich tez, T^{-1} jest zbiorem wszystkich formuł odrzuconych, a S – zbiorem wszystkich formuł zdaniowych danego systemu (znaki: $\cap$, $\cup$, $\emptyset$ są tu oczywiście symbolami kolejno: iloczynu i sumy zbiorów oraz zbioru pustego). Warunki (I) i (II) nazywamy odpowiednio Ł-rozstrzygalnością i Ł-zupełnością.

Słupecki wykazał m. in., że:

(A) Sylogistyka Arystotelesa w ujęciu aksjomatycznym Łukasiewicza jest w powyższym sensie teorią Ł-rozstrzygalną[14],

(B) Każdy system Ł-rozstrzygalny jest rozstrzygalny w zwykłym sensie, o ile zbiory formuły T i T^{-1} są rekurencyjnie przeliczane.

Wynik (B) opiera się na znanym twierdzeniu z teorii rekursji głoszącym, że jeśli suma dwóch rozłącznych zbiorów rekurencyjnie przeliczanych jest obliczana, to zbiory te są również obliczane[15].

Oczywiście wynik (A) przenosi się łatwo na definicyjne rozszerzenie sylogistyki Arystotelesa, które nazwaliśmy systemem Ł, gdyż – jak już była o tym mowa wcześniej – definicje tego systemu spełniają warunek nietwórczości i przekładalności. Stąd, z twierdzenia Słupeckiego (A) i z udowodnionego przez nas twierdzenia I wynika to, że:

Twierdzenie II. System G jest teorią Ł-rozstrzygalną.

Rozważania dotyczące teorii relacji Gergonne'a, a zwłaszcza jej rozstrzygalności, uzupełnimy jeszcze następującymi uwagami.

Prawie cała rozprawa Farisa jest poświęcona dowodowi rozstrzygalności teorii relacji Gergonne'a. W dowodzie tym korzysta on m.in. ze znanej pracy Łukasiewicza pt. *Aristotle's syllogistic from the standpoint of modern formal logic*. Wymieniony powyżej wynik Słupeckiego (A), uważany zresztą przez Łukasiewicza „za najdonioślejsze odkrycie, jakiego dokonano na terenie sylogistyki od czasów Arystotelesa", został oczywiście w tej pracy przedstawiony; był więc Farisowi dobrze

---

[14] Por. J. Łukasiewicz, *Aristotle's syllogistic from the standpoint of modern formal logic*, Oxford 1951, twierdzenia IV, V.

[15] J. Słupecki, G. Bryll, U. Wybraniec-Skardowska, *Theory of rejected propositions. I*, Studia Logica 29(1971), 75-123.

znany. Zgodnie z tym wynikiem i twierdzeniem (I) dowód rozstrzygalności teorii relacji Gergonne'a jest właściwie zbędny. Jeżeli Faris podjął się jednak tego dowodu, to – jak się wydaje – przypuszczał on, że sylogistyka i teorie Gergonne'a są różnymi, nierównoważnymi teoriami. Fakt równoważności tych teorii został przeoczony nie tylko przez Farisa, ale również przez prof. Łukasiewicza, pod kierunkiem którego – co podkreśla sam Faris – jego praca została napisana.

Warto tu także ocenić sam dowód rozstrzygalności teorii relacji Gergonne'a przedstawiony przez Farisa, pomijając już fakt, czy był on potrzebny. Faris, podobnie jak Słupecki, korzysta z aksjomatycznej metody odrzucania autorstwa Łukasiewicza. Oprócz części pozytywnej, przedstawionej w niniejszym artykule jako system G[16], przyjmuje on jedenaście aksjomatów odrzuconych, reguły odrzucania przez podstawianie, odrzucania przez odrywanie Łukasiewicza oraz pewną, specyficzną dla tego systemu regułę odrzucania (GR)[17]. Po odpowiednim określeniu zbioru formuł odrzuconych Faris dowodzi, że:

(C) Każda formuła zdaniowa teorii relacji Gergonne'a jest tezą lub formułą odrzuconą tej teorii.

Stąd wyprowadza wniosek, że teoria ta jest rozstrzygalna[18].

Otóż wniosek ten nie jest uzasadniony, gdyż twierdzenie (C) jest jedynie równoważne warunkowi (II), wcześniej wymienionej definicji Ł-rozstrzygalności Słupeckiego, stwierdzającemu, że teoria relacji Gergonne'a jest Ł-zupełna. Stąd nie wynika jednak, że zbiór tez tej teorii jest obliczalny. Należy ponadto wykazać, że spełniony jest warunek niesprzeczności (I), tzn. zbiory wszystkich tez i wszystkich formuł odrzuconych są rozłączne; a tego warunku Faris nie udowodnił. Podaną przez niego argumentację, dość skomplikowaną zresztą w porównaniu z dowodem Słupeckiego, trudno więc nazwać dowodem rozstrzygalności.

Rola warunku niesprzeczności (I) w definicji Ł-rozstrzygalności jest widoczna zwłaszcza wówczas, gdy warunek ten nie jest spełniony.

Załóżmy, że istnieje conajmniej jedna taka formuła α_1, która jest równocześnie tezą i formułą odrzuconą, tj.:

[16] Faris nie korzysta z definicji DG2 i DG3, chociaż zdaje sobie sprawę z tego, że zdania kategoryczne ogólnotwierdzące i szczegółowotwierdzące można tak zdefiniować. Zamiast definicji DG1, o czym była już mowa w poprzednim paragrafie, posługuje się odpowiednią regułą zastępowania definicyjnego.

[17] Por. J. A. Faris, dz. cyt, 222.

[18] Tamże, 231.

(1) $\alpha_1 \in T$ oraz $\alpha_1 \in T^{-1}$,

gdzie T jest zbiorem wszystkich tez teorii relacji Gergonne'a, a T^{-1} jest zbiorem wszystkich formuł odrzuconych w sensie Farisa (tzn. najmniejszym zbiorem zawierającym zbiór aksjomatów odrzuconych i domkniętym ze względu na przyjęte przez Farisa reguły odrzucania).

Spełniony jest następujący warunek:

(2) $(\alpha_1 \Rightarrow (\beta \Rightarrow \alpha_1)) \in T$,

gdyż teoria relacji Gergonne'a jest nadbudowana nad klasycznym rachunkiem zdań.

Zgodnie z regułą odrywania, stąd i z warunku (1) wynika, że:

(3) $(\beta \Rightarrow \alpha_1) \in T$.

Stosując do (3) i (1) łukasiewiczowską regułę odrzucania przez odrywanie[19], otrzymujemy z kolei wniosek:

(4) $\beta \in T^{-1}$,

w którym β jest dowolną formułą zdaniową teorii relacji Gergonne'a.

Wykazaliśmy więc, że:

(D) Jeżeli zbiory wszystkich tez i wszystkich formuł odrzuconych w sensie Farisa nie są rozłączne, to każda formuła zdaniowa teorii relacji Gergonne'a jest odrzucona ($T^{-1} = S$).

Warunek (D) można też wyrazić następująco: Jeżeli istnieje przynajmniej jedna formuła taka, która jest zarazem tezą i formułą odrzuconą w sensie Farisa, to teoria relacji Gergonne'a jest Ł-sprzeczna. Oczywiście z Ł-sprzeczności pewnej teorii nie wynika, że jest ona sprzeczna w zwykłym sensie, tzn. zbiór wszystkich jej tez jest identyczny ze zbiorem wszystkich formuł zdaniowych.

Przedstawiony przez Farisa dowód rozstrzygalności można ew. uzupełnić na gruncie twierdzenia I. Formuły aksjomatycznie odrzucone przez Farisa są – co łatwo sprawdzić – odrzucone w sensie podanym przez Słupeckiego[20]. Wystarczy zatem sprawdzić, czy zbiór formuł odrzuconych w sensie Słupeckiego jest domknięty ze względu na podaną przez Farisa regułę (GR).

---

[19] Regułę odrzucania przez odrywanie formułuje się zazwyczaj w sposób następujący: jeżeli implikacja $\alpha \Rightarrow \beta$ jest tezą i odrzucony jest następnik tej implikacji β, to odrzucony jest poprzednik α.

[20] Por. J. Łukasiewicz, *Aristotle's syllogistic from the standpoint of modern formal logic*, Oxford 1951.

5. ZAKOŃCZENIE

Teoria relacji Gergonne'a, którą przedstawiliśmy powyżej, nie wyczerpuje problematyki stosunków między zakresami nazw. Teoria ta ujmuje pięć znanych stosunków między zakresami nazw, o których wspomnieliśmy na wstępie niniejszego artykułu. W związku z wprowadzeniem do logiki nazw pustych rozważa się często osiem stosunków zakresowych, między innymi także tzw.: pustopodrzędność, pustonadrzędność i pustozamienność zakresową. Wiadomo także, iż po uwzględnieniu negacji nazwowej można te stosunki odpowiednio wzbogacić.

W wielu podręcznikach logiki sylogistyka Arystotelesa jest omawiana w związku z pewną teorią stosunków między zakresami nazw. Na stosunki te powołujemy się zwłaszcza wówczas, gdy podajemy sposoby rozumienia (znaczenia) zdań kategorycznych oraz warunki ich prawdziwości. Jest to dość naturalne, gdyż zdania te posiadają budowę podmiotowo-orzecznikową, są więc prawdziwe lub fałszywe w zależności od tego, w jakim stosunku zakresowym pozostają podmioty tych zdań do ich orzeczników. Wydaje się więc, że każda teoria stosunków zakresowych wyznacza („generuje") pewną sylogistykę zdań kategorycznych. Warto więc badać zarówno te teorie, jak i odpowiadające im sylogistyki. Badania takie, oprócz wymienionej już pracy Farisa, były już częściowo prowadzone[21].

Warto też podkreślić, że omawiana problematyka jest nadal aktualna. I tak na przykład w opublikowanym w 1987 roku w *Studia Logica* artykule S. N. Fursa pt. *Computation of Aristotle's and Gergonne's syllogisms* rozważa się sylogistykę Arystotelesa i teorię relacji Gergonne'a jako pewne struktury algebraiczne[22].

GERGONNE THEORIE DER RELATIONEN UND ARISTOTELISCHE SYLLOGISTIK

Zusammenfassung

Die von uns vorgestellte Gergonne'sche Relationentheorie erschöpft nicht die Problematik der Beziehungen zwischen den Bereichen der Name. Die Theorie

---

[21] Por. np. J. Łoś, *Próba aksjomatyzacji logiki tradycyjnej*, Annales Universitatis Mariae Curie-Skłodowska Lublin 1(1946)3, 211-228.

[22] S. N. Furs, *Computation of Aristotle's and Gergonne's syllogisms*, Studia Logica 3(1987)46, 209-225.

umfasst fünf dieser Beziehungen, von denen am Anfang dieses Artikels die Rede war. Im Zusammenhang mit der Einführung in die Logik leerer Namen werden öfters auch acht Beziehungen in Erwägung gezogen, unter anderem auch die leere Unterordnung, die leere Überordnung und die leere Austauschbarkeit des Bereiches. Es ist auch bekannt, dass unter Berücksichtigung der Negation der Namen die Beziehungen entsprechend bereichert werden können.

In vielen Lehrbüchern wird die Syllogistik von Aristoteles im Zusammenhang mit einer Theorie der Beziehungen zwischen den Bereichen der Namen ausgelegt. Auf diese Beziehungen berufen wir uns besonders zwecks besseren Verstehens der kategorischen Aussagen und der Bedingungen ihrer Richtigkeit. Das ist sehr natürlich, da diese Sätze eine Subjekt-Prädikat-Konstruktion besitzen, also richtig oder falsch sind, abhängig davon, in welchem Bereichsverhältnis die Subjekte dieser Sätze zu den Prädikaten verbleiben. Es scheint also, dass jede Theorie der Bereichsverhältnisse eine gewisse Sylogistik der kategorischen Sätze bestimmt (generiert). Es lohnt sich also sowohl die Theorien als auch die ihnen entsprechende Sylogistik zu erforschen. Diese Forschungen wurden, ausser denen von Faris (J. A. Faris, *The Gergonne relations*, The Journal of Symbolic Logic, 3 (1955), 207-231) schon teilweise betrieben (vgl. z. B. J. Łoś, *Próba aksjomatyzacji logiki tradycyjnej*, Annales Universitatis Mariae Curie-Skłodowska Lublin 1 (1946) 3, 211-228).

Es wäre zu unterstreichen, dass die besprochene Problematik noch weiterhin aktuell ist. So werden zum Beispiel in einem Artikel von S. N. Furs, der im Jahre 1987 in Studia Logica veröffentlicht wurde, die Sylogistik von Aristoteles und die Gergonne' sche Relationentheorie als gewisse algebraische Strukturen (*algebraic structures*) behandelt.

PAWEŁ ŁUKASZ POLOWCZYK

NIEWSPÓŁMIERNOŚĆ SYSTEMÓW JĘZYKOWYCH

Artykuł niniejszy koncentruje się na kwestii niewspółmierności systemów językowych[1], jednej z najdonioślejszych kwestii we współczesnej filozofii anglosaskiej. Zawiera on krytyczne omówienie wy-

[1] Mówiąc o systemach językowych, ma się tu na myśli, iż języki tworzą pewne względne całości o wzajemnie powiązanych i oddziałujących na siebie elementach.