Marek Porwolik

Operacja konsekwencji a operacja domknięcia - przerzucane mosty

Studia Philosophiae Christianae 43/1, 152-159

2007

MAREK PORWOLIK
Instytut Filozofii UKSW, Warszawa

OPERACJA KONSEKWENCJI A OPERACJA DOMKNIĘCIA – PRZERZUCANE MOSTY

1. WROWADZENIE

Początków systematycznej refleksji metodologicznej dotyczącej nauk dedukcyjnych dopatruje się zazwyczaj w sformułowanym przez Davida Hilberta programie finistycznego ugruntowania podstaw matematyki. Badania te, zwane przez niego „metamatematyką" skoncentrowane były zasadniczo nad przeprowadzeniem dowodu niesprzeczności matematyki[1]. Stąd, nazwano je również „teorią dowodu". Później pojawiły się i inne nazwy: „metalogika" oraz „teoria systemów dedukcyjnych". Główny kierunek badań wytyczyły tu rezultaty uzyskane przez Kurta Gödla i Alfreda Tarskiego. Prace tego ostatniego przyczyniły się do ujęcia metalogiki jako pewnej, formalizowalnej nauki dedukcyjnej[2].

Niniejsza praca nawiązuje do pierwszych prezentacji aksjomatycznych składni systemów dedukcyjnych autorstwa Tarskiego. W pierwszej części rozważań, poświęconej ogólnej teorii konsekwencji, opieram się zasadniczo na artykule Urszuli Wybraniec-Skardowskiej *Aksjomatyzacje teoryj konsekwencji i systemów dedukcyjnych*, który zbiera w jedną całość interesujące nas wyniki uzyskane przez Tarskiego[3]. Po przedstawieniu własności operacji konsekwencji porównam je z tymi, które charakteryzują operację domknięcia w przestrzeni topologicznej. Na koniec sformułuję pewne wnioski.

2. AKJOMATY OGÓLNEJ TEORII KONSEKWENCJI *T*

Pierwsze próby formalizacji teorii systemów dedukcyjnych zawdzięczamy pracom Tarskiego dotyczących aksjomatyzacji teorii

---

[1] Por. J. Woleński, *Metamatematyka a epistemologia*, PWN, Warszawa 1993, 7-9.

[2] A. Tarski, *Fundamentale Begriffe der Methodologie der deduktiven Wissenschaften*, Monatshefte für Mathematik und Physik 37(1930), 361-404; A. Tarski, *Über einige fundamentale Begriffe der Metamathematik*, Comptes Rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie 23(1930), 22-29; A. Tarski, *Pojęcie prawdy w językach nauk dedukcyjnych*, Towarzystwo Naukowe Warszawskie, Warszawa 1933.

[3] U. Wybraniec-Skardowska, *Aksjomatyzacje teoryj konsekwencji i systemów dedukcyjnych*, w: *Alfred Tarski dedukcja i semantyka*, red. J. J. Jadacki, Semper, Warszawa 2003, 37-60.

konsekwencji. Chodzi tu zarówno o *ogólną* – *T*, jak i *bogatszą* T^+ – *teorie systemów dedukcyjnych*. Ta ostatnia charakteryzuje pojęcie *konsekwencji klasycznej*.

Pojęciami pierwotnymi ogólnej teorii systemów dedukcyjnych *T* są: *zbiór S wszystkich zdań* dowolnego, lecz ustalonego języka i *operacja konsekwencji Cn* określona w klasie *P (S)* wszystkich podzbiorów zbioru *S*. Operacja ta jest funkcją $Cn: P(S) \rightarrow P(S)$, przyporządkowującą dowolnemu zbiorowi zdań *A* zbiór *CnA* będący zbiorem konsekwencji tego zbioru. Przyjmujemy ponadto, że zmienne *a, b, c,...* przebiegają zbiór *S*, a zmienne *A, B, C,...* – rodzinę *P (S)*.

W celu scharakteryzowania operacji *Cn* Tarski zaproponował następujący układ aksjomatów:

A1. $card(S) \leq \aleph_0$ – przeliczalność zbioru *S*,
A2. $A \subseteq CvA \subseteq S$ – zwartość konsekwencji *Cn*,
A3. $Cn(CnA) = CnA$ – idempotentność konsekwencji *Cn*,
A4'. $CnA = U\{CnB : B \in Fin(A)\}$ – finitystyczność konsekwencji *Cn*.

W tym miejscu warto zauważyć, że:

a) Ostatni z powyższych aksjomatów (A4') jest równoważny następującej parze wyrażeń:

A4. $A \subseteq B \Rightarrow CnA \subseteq CnB$ – monotoniczność konsekwencji *Cn*,
A5. $CnA \subseteq U\{CnB : B \in Fin(A)\}$.

b) Aksjomatykę teorii *T* podaje się najczęściej w postaci aksjomatów A1-A5.

c) Aksjomaty A3 i A4 można zaś zastąpić aksjomatem:

A3-4. $A \subseteq CnB \,\&\, B \subseteq CnC \Rightarrow A \subseteq CnC$

Używając pojęć pierwotnych ogólnej teorii konsekwencji *T*, można określić najważniejsze syntaktyczne pojęcia teorii systemów dedukcyjnych takie jak: *system*, *aksjomatyka*, *aksjomatyzowalność*, *niezależność*. Na gruncie teorii *T* można ponadto zdefiniować dość pomocne, zrelatywizowane pojęcie konsekwencji, a mianowicie *konsekwencji ze względu na pewien zbiór* $A' \subseteq S$:

$\mathrm{DCn}_{A'}$ $\quad Cn_{A'}A = Cn(A' \cup A)$

Zauważmy, że tak określona operacja $Cn_{A'}$ spełnia ogólne aksjomaty A1-A5 teorii *T*. Jest to zatem pewien rodzaj operacji konsekwencji.

Ponadto, teorię *T* można dalej rozszerzać, wzbogacając ją o kolejne nowe definicje. Na szczególną uwagę zasługuje to, że w ten sposób można zdefiniować tzw. *funkcję odrzucania*. Odpowiada ona pojęciu *odrzucania* wprowadzonemu do logiki przez Łukasiewicza[4]. Z tym pojęciem związane jest również pojęcie konsekwencji dualnej („odwrotnej" do zwykłej konsekwencji) oraz tzw. *konsekwencji jednostkowej*.

Konsekwencję jednostkową Cn^1 można scharakteryzować aksjomatem przyjmowanym w teorii T dla zbioru S i następującym aksjomatem specyficznym, charakteryzującym to pojęcie:

Ax^1 $Cn^1 A = \{b : \exists a \in A\ (Cn^1 \{b\} \subseteq Cn^1 \{a\})\}$

Dane zdanie jest więc konsekwencją jednostkową zbioru A wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór konsekwencji jednostkowej tego zdania nie wyprowadza poza zbiór konsekwencji jednostkowej jakiegoś zdania ze zbioru A. Mamy tu znów do czynienia ze szczególnym przypadkiem ogólnej operacji konsekwencji.

Przy przyjętych powyżej określeniach zachodzą następujące dwa metatwierdzenia:

MTw. 1.

Operacja Cn^1 spełnia ogólne aksjomaty A1-A5 teorii T oraz warunki:

$Cn^1 (A \cup B) = Cn^1 A \cup Cn^1 B$ – jest operacją addytywną,

$Cn^1 \varnothing = \varnothing$ – jest operacją normalną,

$b \in Cn^1 A \Rightarrow \exists a \in A\ (b \in Cn^1 \{a\})$ – jest finitystyczną operacją jednostkową.

MTw. 2.

Dołączając do ogólnych aksjomatów A1-A5 teorii T dla Cn warunek addytywności Cn i warunek $Cn\ \varnothing = \varnothing$, określamy Cn jako konsekwencję jednostkową (czyli operację spełniającą warunek Ax^1).

Na gruncie teorii konsekwencji można w następujący sposób zdefiniować analizowane przez Łukasiewicza pojęcie *odrzucania*, które Słupecki uogólnił do tzw. *funkcji odrzucania* (funkcja Łukasiewicza):

DCn^{-1}. $Cn^{-1} A = \{b : \exists a \in A\ (a \in Cn\{b\})\}$

Zbiór $Cn^{-1} A$ (zbiór zdań odrzuconych na podstawie zdań ze zbioru A) jest więc zbiorem tych i tylko tych wyrażeń, z których wyprowadzalne jest jakieś zdanie ze zbioru A.

---

[4] Por. J. Łukasiewicz, *Logika dwuwartościowa*, Przegląd Filozoficzny 23(1921), 189-205; Tenże, *O sylogistyce Arystotelesa*, w: *Z zagadnień logiki i filozofii. Pisma wybrane*, PWN, Warszawa 1961, 220-227; Tenże, *Sylogistyka Arystotelesa z punktu widzenia współczesnej logiki formalnej*, PWN, Warszawa 1988.

W ten sposób określoną funkcję Cn^{-1} nazywa się *konsekwencją odrzucania*, odpowiadającą konsekwencji Cn. Określenie to jest zasadne, gdyż jak udowodnił Słupecki:

MTw. 3. (a) Cn^{-1} spełnia ogólne aksjomaty A1-A5 ogólnej teorii konsekwencji T,

(b) Cn^{-1} jest addytywna i normalna,

więc zgodnie z MTw. 2:

(c) Cn^{-1} jest konsekwencją jednostkową.

Ponadto powyższa nazwa jest usprawiedliwiona także i z tego powodu, że na gruncie teorii T wzbogaconej o DCn^{-1} można udowodnić następujące twierdzenie:

T1. $\forall A(A \subseteq B \Rightarrow CnA \subseteq B) \Rightarrow \forall A(A \subseteq S \setminus B \Rightarrow Cn^{-1}A \subseteq S \setminus B)$.

Jeżeli przyjmiemy, że konsekwencja Cn wyznacza system dedukcyjny jako zbiór zamknięty ze względu na jakieś reguły inferencji (czy ogólniej: reguły wynikania logicznego), czyli że Cn jest zwykłą konsekwencją (konsekwencją zdań prawdziwych są wyłącznie zdania prawdziwe), to jeśli za B przyjąć zbiór zdań prawdziwych, wówczas zbiór $S \setminus B$ jest zbiorem zdań fałszywych i w myśl T1 wyrażenia odrzucane na podstawie zdań fałszywych przy pomocy operacji Cn^{-1} są też fałszywe.

W tym miejscu należy zauważyć, że system dedukcyjny można również budować odwrotnie, a więc najpierw jako system dedukcyjny zamknięty ze względu na reguły odrzucania logicznego. W ten sposób można charakteryzować go dwuaspektowo: zarówno jako system ze względu na uznawanie, jak i system ze względu na odrzucanie.

3. OPERACJA DOMKNIĘCIA ZBIORU W PRZESTRZENI TOPOLOGICZNEJ

Topologia jest działem matematyki, który zajmuje się przekształceniami ciągłymi oraz tymi własnościami zbiorów, które są niezmiennicze względem tych przekształceń. Samą przestrzeń topologiczną definiuje się najczęściej albo przez charakterystykę operacji domknięcia albo przez charakterystykę operacji wnętrza[5].

Przez *przestrzeń topologiczną* rozumiemy zbiór X, w którym każdemu zbiorowi $A \subseteq X$ przyporządkowany został zbiór $clA \subseteq X$ (zwa-

[5] Por. S. Gładysz, *Wstęp do topologii*, PWN, Warszawa 1981, 7; K. Kuratowski, *Wstęp do teorii mnogości i topologii*, PWN, Warszawa 2004, 102; 108.

ny *domknięciem* zbioru A) spełniający następujące warunki (zwane aksjomatami domknięcia)[6]:

AI. $cl(A \subseteq B) = clA \cup clB$

AII. $A \subseteq clA$

AIII. $cl\,\varnothing = \varnothing$,

AIV. $cl\,(clA) = clA$.

Przestrzeń topologiczna jest więc parą (X, cl), złożoną ze zbioru X oraz odwzorowania $cl: P\,(X) \rightarrow P\,(X)$ spełniającego powyższe aksjomaty[7]. Z aksjomatów AI – AIV wynikają następujące własności operacji domknięcia:

TI. $A \subseteq B \Rightarrow clA \subseteq clB$

TII. $clA \setminus clB \subseteq cl(A \setminus B)$

TIII. $cl(A \cap B) \subseteq clA \cap clB$

TIV. $clX = X$.

W tak określonej przestrzeni topologicznej zbiór A nazywany jest *domkniętym*, jeżeli $clA = A$, to znaczy wobec AII, gdy $clA \subseteq A$. Zbiór A nazywamy *otwartym* w tej przestrzeni, gdy jego dopełnienie jest zbiorem domkniętym, to znaczy, gdy $cl\,(X \setminus A) = X \setminus A$, lub inaczej mówiąc, gdy $A = X \setminus cl\,(X \setminus A)$. Stąd wynika, że zbiór pusty $\varnothing$, jak i cała przestrzeń X są zbiorami zarówno domkniętymi, jak i otwartymi. W przestrzeni topologicznej wprowadza się również pojęcie *wnętrza zbioru* A: $intA = X \setminus cl\,(X \setminus A)$. Przy powyższych definicjach zachodzą następujące związki:

WI. Suma dwóch zbiorów domkniętych jest zbiorem domkniętym.

WII. Iloczyn dowolnej mnogości zbiorów domkniętych jest zbiorem domkniętym.

WIII. Zbiór clA jest najmniejszym zbiorem domkniętym zawierającym zbiór A

WIV. Zbiór clA jest iloczynem wszystkich zbiorów domkniętych zawierających A.

Odpowiednio do powyższych można sformułować i udowodnić twierdzenia o własnościach zbiorów otwartych i samego wnętrza zbioru. Wychodząc od pojęcia zbioru domkniętego lub od pojęcia zbioru otwartego, definiuje się kolejne rodzaje zbiorów (np. *gęste, brzegowe, nigdziegęste*), ich rodzin (*baza, podbaza, pokrycie prze-*

---

[6] Tamże, 102.

[7] Por. K. Jänich, *Topologia*, PWN, Warszawa 1991, 15.

strzeni, zbiory Borela) oraz własności samych przestrzeni topologicznych (*zwartość, zupełność, normalność, regularność*)[8].

4. WNIOSKI KOŃCOWE

Porównując własności różnych rodzajów operacji konsekwencji z własnościami operacji domknięcia, dostrzegamy zarówno pewne różnice, jak i podobieństwa. Nasuwa się tu następujące pytanie: czy zbiór S wszystkich zdań dowolnego, lecz ustalonego języka i pewien rodzaj ogólnej operacji konsekwencji Cn mogą stanowić przestrzeń topologiczną? Pozytywna odpowiedź na to pytanie prowadzi do możliwości stosowania w logice pewnych wyników uzyskanych w topologii. Ponadto, możemy pytać i o inne pojęcia logiczne i topologiczne, które są względem siebie, w pewnym sensie dualne.

W przypadku operacji konsekwencji i domknięcia następujące własności są identyczne[9]:

Własność	Teoria konsekwencji	Topologia
Zwartość	A2. $A \subseteq CnA \subseteq S$	AII. $A \subseteq clA \subseteq X$,
Idempotentność	A3. $Cn(CnA) = CnA$	AIV. $cl\,(clA) = clA$
Monotoniczność	A4. $(A \subseteq B) \Rightarrow (CnA \subseteq CnB)$	TI. $(A \subseteq B) \Rightarrow (clA \subseteq clB)$

Zbiór S z operacją konsekwencji jednostkowej Cn^1 spełnia wszystkie aksjomaty (AI – AIV) wyznaczające przestrzeń topologiczną. Ważne są tu szczególnie cechy addytywności i normalności tej operacji, zapewnione przez MTw. 1. Jest więc to pewien rodzaj przestrzeni topologicznej.

Z drugiej strony, MTw. 2 mówi, że jeżeli na operację konsekwencji Cn nałożymy warunki addytywności i normalności, to otrzymujemy wówczas konsekwencję jednostkową.

Z uwagi na MTw. 3. konsekwencja odrzucania Cn^{-1} wraz ze zbiorem S jest przestrzenią topologiczną. Stąd, jeżeli pragniemy stosować pewne wyniki uzyskiwane w topologii można to czynić w stosunku do konsekwencji jednostkowej i konsekwencji odrzucania.

Można próbować szukać innych dualnych pojęć występujących w teorii konsekwencji i topologii. Szczególnie interesujące jest to

[8] Por. K. Kuratowski, dz. cyt., 102-124.
[9] Zachowano tu oznaczenia odpowiednio z 2 i 3 części niniejszej pracy.

w przypadku tak podstawowych pojęć topologii jak zbiór otwarty, czy baza przestrzeni. Odnośnie do pojęcia zbioru domkniętego w przestrzeni topologicznej, tzn., takiego podzbioru $A \subseteq X$, że $clA = A$, jego odpowiednikiem w teorii konsekwencji jest pojęcie systemu dedukcyjnego, czyli takiego podzbioru zdań $A \subseteq S$, że $CnA = A$.

Można również szukać pewnych analogii, podążając w kierunki samej teorii mnogości. Przykładem na istnienie także i tu pewnych podobieństw jest pojęcie *niezależności.* W teorii konsekwencji zbiór niezależny określa się w następujący sposób:

$$A \in Indp \Leftrightarrow \forall_{a \in A}\, a \notin Cn(A \setminus \{a\}), \text{ gdzie } A \subseteq S$$

Ogólna koncepcja niezależności w matematyce została wprowadzona przez Marczewskiego. Niech X będzie zbiorem, $P(X)$ zbiorem wszystkich jego podzbiorów, a $C: P(X) \to P(X)$ danym odwzorowaniem. Wówczas podzbiór $A \subseteq X$ jest *C-niezależnym (C-independent),* jeżeli $a \notin C(A \setminus \{a\})$ dla każdego $A \in X$.[10] Widzimy więc, że niezależność zbioru zdań w teorii konsekwencji jest po prostu *Cn-niezależnością* w znaczeniu, który podaje Marczewski.

Na koniec warto zwrócić uwagę na to, że aksjomat A1 dotyczący przeliczalności zbioru S, można zastąpić przy nieprzeliczalności tego zbioru, aksjomatem stwierdzającym, że istnieje relacja, która dobrze go porządkuje[11]. Stąd, nie jest konieczne, by nasze rozważania zawężać jedynie do przestrzeni przeliczalnych.

Mówi się, że uprawiając naukę, należy być łowcą analogii. Wyniki Tarskiego dotyczące własności operacji konsekwencji wciąż rodzą pytanie o istnienie takich podobieństw między nią a operacją domknięcia zbioru w przestrzeni topologicznej. Trywialnego przełożenia tu jednak nie znajdziemy. Czy mimo to zaobserwowane już podobieństwa nie przyniosą prób budowy nowych, może i bardziej stabilnych mostów między logiką a topologią? To zapewne pokaże czas. Metamatematykę od początku jej istnienia przedsięwzięcie to jednak bardzo interesowało[12]. Pierwsze znane zadanie z dziedziny nazwanej później topologią dotyczy mostów w Królewcu. Zajął się nim szczegółowo Leonard Euler. Przy obecnym stanie wiedzy doty-

[10] Por M. Turzański, *Cantor Cubes: Chain Conditions,* UŚ, Katowice 1996, 42.

[11] Por. L. Borkowski, *Logika formalna*, PWN, Warszawa 1990.

[12] Por. H. Rasiowa, R. Sikorski, *The mathematics of metamathematics*, PWN, Warszawa 1968.

cząecej przerzucania mostów między topologią a logiką, jedno jest pewne, a mianowicie to, że te ostatnie mosty (czy raczej kładki) nie zapowiadają bynajmniej końca rozwoju samej topologii[13].

CONSEQUENCE OPERATION AND CLOSURE OPERATION: BUILDING A BRIDGE

Summary

Mathematics and logics are very similar and very different at the same time. What they have in common is their penchant for formal apparatus. The areas of similarity are topology in mathematics and the consequence theory in logics. In both cases we deal with similar formal structures. This article aims at showing certain similarities between the closure operation of a set in a topological space and the consequence theory in logics. These similarities lead to the question if, and if so – when, a set of sentences on which the consequence operation has been performed is a topological space.

[13] Por. J. Mioduszewski, *Wykłady z topologii*, Wyd. UŚ, Katowice 1994, 11-12.