Edward Nieznański

# Logika deontyczna w systemie S5

Studia Philosophiae Christianae 43/2, 5-20

2007

R O Z P R A W Y

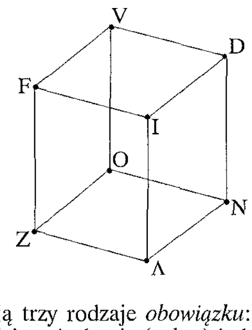
Studia Philosophiae Christianae
UKSW
43(2007)2

EDWARD NIEZNAŃSKI
*Instytut Filozofii UKSW, Warszawa*

# LOGIKA DEONTYCZNA W SYSTEMIE S5

## WPROWADZENIE

Logika deontyczna jest systemem zdań deontycznych. Te zaś składają się z funktora deontycznego kategorii *z/z* i jego argumentu kategorii *z*. Funktory deontyczne denotują określone zbiory czynów (i zaniechań). Funktor V (*wykonalności czynu*) obejmuje zbiór czynów maksymalny, przyjąwszy, że normy prawne mogą się odnosić tylko do wszystkich czynów dających się zrealizować. Natomiast sprzeczny z nim funktor Λ (*niewykonalności czynu*) jest – co do swego zakresu – pusty, założywszy, że na adresatów norm racjonalny suweren nie nakłada powinności nie dających się zrealizować. Niepuste są funktory: N (*nakazu*), Z (*zakazu*), O (*obowiązku*), D (*dozwolenia*), F (*fakultatywności*) i I (*indyferencji*)[1]. Pojęcia wszystkich tych ośmiu funktorów deontycznych tworzą – ze względu na stosunek inkluzji – algebrę Boole'a. Tę ośmioelementową algebrę przedstawia diagram:




[1] W gruncie rzeczy istnieją trzy rodzaje *obowiązku*: obowiązek powinności czynu (*nakaz*), obowiązek powinności zaniechania (*zakaz*) i obowiązek powinności czynu lub zaniechania (*obowiązek* po prostu); oraz trzy rodzaje *pozwolenia*: pozwolenie powinności czynu (*dozwolenie*), pozwolenie powinności zaniechania (*fakultatywność*) i pozwolenie powinności czynu i zaniechania (*indyferencja*).

Z tego diagramu odczytujemy związki formalne:

- $\Lambda = -V$, $V = -\Lambda$
- $F = -N$, $N = -F$
- $Z = -D$, $D = -Z$
- $I = -O$, $O = -I$
- $Z \subseteq F$, $Z \subseteq O$
- $N \subseteq D$, $N \subseteq O$
- $I \subseteq F$, $I \subseteq D$
- $I = F \cap D$, $O = N \cup Z$[2].

Wprawdzie G. H. von Wright twierdzi, że „istnieje wiele pojęć pozwolenia i obowiązku, a «paradoksy» logiki deontycznej wynikają z ich pomieszania"[3], zamieszanie wokół rozumienia funktorów deontycznych jest mniejsze niż w sporze o naturę ich argumentu. Już w swoim pierwszym systemie logiki deontycznej z roku 1951 von Wright przyjmował, że argumentami funktorów deontycznych są predykaty symbolizowane przez zmienne ogólno-nazwowe, a w swych systemach po roku 1964 zakładał, że rolę argumentu tych funktorów pełnią zdania deskryptywne[4]. Tym torem interpretacji poszli również A. R. Anderson, A. N. Prior i wielu innych. Jerzy Kalinowski takiemu rozwiązaniu stawia zarzut językowej wady: funktory deontyczne wymagają, by ich argument miał tryb łączący, a zdania deskryptywne takiego trybu nie mają[5]. Według J. Jørgensena[6], A. Hofstadtera i J. C. C. Mc Kinsey'a, którzy publikowali w latach 30-ych, funktory deontyczne należy łączyć z rozkazami. Pierwszy z tych logików postawił jednak problem, znany pod nazwą *dylematu Jørgensena*: jak wyjaśnić fakt, że rozkazy (i normy) nie mają wartości prawdy ni fałszu, a mogą być jednak między sobą sprzeczne lub wynikać jedne z drugich? Kazimierz Opałek twierdzi z kolei[7], że takie funktory, jak „jest rzeczą konieczną...", czy „jest rzeczą obowiązującą..." mogą mieć za argument jedynie zdania

---

[2] „Obowiązek prawny – to wyrażony w normie prawnej, skierowany do jednostki nakaz lub zakaz określonego zachowania się w danej sytuacji". *Encyklopedia prawa*, red. U. Kalina-Prasznic, „C. H. Beck", Warszawa 1999, 381.

[3] Zob. J. Kalinowski, *Logika norm*, Instytut Wydawniczy „Daimonion", Lublin 1993, 108.

[4] Zob. G. H. Von Wright, *Deontic Logic*, Mind 60(1951), 58-74; Tenże, *A New System of Deontic Logic*, Danish Yearbook of Philosophy 1(1964), 173-182.

[5] J. Kalinowski, dz. cyt., 137.

[6] J. Jørgensen, *Imperatives and Logic*, Erkenntnis 7(1937-1938), 288-296.

[7] K. Opałek, *On the Logical-semantic Structure of Directives*, Logique et analyse 13(1970), 49-50.

w trybie łączącym – *ut-propositions* – a więc wyrażenia, takie jak: „żeby A było", „żeby A było B" lub „żeby A było dokonane". Rozróżnienie von Wrighta i Castañedy argumentów funktora deontycznego na *propositions* i *action terms* doprowadziło wielu logików do uznania, że „Norms are not expressions but acts of making something obligatory or prohibed"[8]. Wówczas wypowiedzi normatywne to tylko wypowiedzi performatywne – zdania deklaratywne, a logika tych zdań to tzw. dynamiczna logika deontyczna (K. Segerberg[9] 1982, J.-J. Ch. Meyer[10] 1988, J. Czelakowski[11] 1997).

W niniejszym artykule przyjmujemy stanowisko J. Kalinowskiego: „Czyż nie prostsze jest trzymanie się zdań normatywnych analogicznych do zdań modalnych *de re* i posługiwanie się koniec końców takimi funkcjami, jak np. «x powinien robić α» niż uciekać się do nowej kategorii zmiennych reprezentujących *ut-propositions* normatywne?"[12]. Określamy zatem, że zdanie deontyczne składa się z funktora deontycznego i z jego argumentu: zdania normatywnego, typu '*x* powinien robić α'. Np.: Jest nakazane, że świadek ma informować sąd o wszystkim, co wie w sprawie. Rzecz jasna, rozumiemy – tak jak Zygmunt Ziembiński[13] – że normę o postaci „*x* powinien czynić *C*" należy uważać za skrótowy zapis wypowiedzi o postaci „*x* powinien w warunkach *W* czynić *C*", a ze swej strony proponujemy domyślne rozwinięcie zdania deontycznego według schematu: „Suweren *s* nakazuje (zakazuje, dozwala) adresatowi *x*, że powinien w warunkach *W* czynić *C*". Przy tym *C* to „wzór powinnego zachowania się" (wedle określenia E. Waśkowskiego), a zmienne „*s*" i „*x*" reprezentują stosowne nazwy indywidualne lub generalne.

Leibniz sugerował, że modalności deontyczne mogą być zdefiniowane w terminach modalności aletycznych. Według niego pozwolone (*licitum*) jest to, co dobry człowiek czynić może, a obowiązkowe (*de-*

---

[8] J. Woleński, *Remarks on the is/ought Problem*, Archivum Iuridicum Cracoviense 29-30(1996-1997), 14.

[9] K. Segerberg, *A Deontic Logic of Action*, Studia Logica 41(1982), 269-282.

[10] J.-J. Ch. Meyer, *A Different Approach to Deontic Logic: Deontic Logic Viewed as a Variant of Dynamic Logic*, Notre Dame Journal of Formal Logic 29(1988), 109-136.

[11] J. Czelakowski, *Action and Deontology*, w: *Logic, Action and Cognition*, red. S. Lindström, E. Ejerhed, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht-Boston 1997, 47-88.

[12] J. Kalinowski, dz. cyt., 151.

[13] Z. Ziembiński, *O zdaniowym charakterze norm tetycznych*, Studia Logica 11(1961), 37.

*bitum*) – co czynić musi[14]. Koncepcję Leibniza odtworzyli w języku sformalizowanym A. R. Anderson[15] 1967 i S. Kanger[16] 1972. Przyjęli:

$K_D$: O $(p \rightarrow q) \rightarrow (\mathrm{O}p \rightarrow \mathrm{O}q)$,

$RN_D$: $p$ |– O$p$ (tezą systemu jest O$p$, gdy tezą jest $p$),

$D_G$: ◊G (założenie, że dobro jest możliwe),

$D_D$: O$p$ → P$p$, gdzie *permission (pozwolenie)* jest rozumiane według definicji:

P: P$p$ ↔ ~O~p. Przyjmują też definicję *prohibition (zakazu)*:

F: F$p$ ↔ O~$p$.

System zdaniowej logiki deontycznej otrzymany przez dodanie do rachunku zdań aksjomatów (lub schematów aksjomatów) $K_D$ i $D_D$ oraz reguły $RN_D$ jest zwykle nazywany standardowym systemem logiki deontycznej[17]. Wobec faktu, że w systemie tym argumenty funktorów deontycznych są zdaniami deskryptywnymi (ich zmiennymi) i formuły deontyczne z deskryptywnymi argumentami funktorów są gramatycznie ułomne, skierujemy swoje wysiłki w stronę innego sposobu powiązania modalności deontycznych z modalnościami aletycznymi.

Wykład proponowanego tu rachunku logicznego rozpoczniemy od prezentacji języka deontycznego (jego słownika, składni i semantyki), a następnie – kładąc jego formalne podstawy – przedstawimy reguły wnioskowania, aksjomaty i definicje klasycznego rachunku zdań, aksjomaty i definicje logiki deontycznej, aksjomaty i definicje aletycznej logiki modalnej, a w końcu udowodnimy wybrane twierdzenia logiki deontycznej i jej rozszerzeń o modalności aletyczne i kwantyfikatory.

## JĘZYK DEONTYCZNY

Słownik

– *x, y* – zmienne nazwowe kategorii *n* (bez rozróżnienia na kategorie *i, g*);

– α, β- zmienne reprezentujące predykaty *de re* kategorii *z/n*, złożone według schematu „musi [bezokolicznik]";

---

[14] R. Hilpinen, *Deontic Logic*, w: *The Blackwell Guide to Philosophical Logic*, red. L. Goble, Blackwell Publishers, Malden, Oxford 2001, 159.

[15] A. R. Anderson, *The Formal Analysis of Normative Systems*, w: *The Logic of Decision and Action*, red. N. Rescher, University of Pittsburg Press, Pittsburg 1967, 147-213.

[16] S. Kanger, *Law and Logic*, Theoria 38(1972), 105-132.

[17] R. Hilpinen, *Deontic Logic*, dz. cyt., 160.

– funktory kategorii *z/z*:
– $N$ – „jest nakazane, że...",
– $\Box$ – „jest konieczne, że...",
– $\sim$ – spójnik negacji;
– $\rightarrow$ – spójnik implikacji kategorii *z/zz*;
– $\forall x$ – kwantyfikator „dla każdego $x$ jest tak, że..." kategorii *z/z*.

Składnia

– Atomowe wyrażenia modalne *de re:* $\alpha x$, $\beta x$ (czytane „$x$ musi $\alpha$", „$x$ powinien $\alpha$"[18], „$x$ ma $\alpha$",...) są formułami języka deontycznego;

– Jeżeli $\Phi$ jest formułą języka deontycznego, to formułami tego języka są również: $\sim\Phi$, $\Box\Phi$, $N\Phi$, $\forall x\Phi$;

– Jeżeli formułami języka deontycznego są formuły $\Phi$, $\Psi$, to formułą tego języka jest $\Phi\rightarrow\Psi$.

Semantyka

Gdyby argumenty funktorów deontycznych były rozkazami (zdaniami rozkazującymi), to zdania deontyczne nie miałyby logicznych wartości i semantyka takiego języka byłaby niemożliwa. W pozostałych przypadkach, gdy ów argument nie jest zdaniem rozkazującym, logicy przypisują zdaniom deontycznym wartość prawdy lub fałszu, choć upatrują różne ich podstawy. A. Naes[19] i H. N. Castañeda na przykład, zgadzają się, że takie wyrażenie, jak „Karol musi spłacić swój dług" jest prawdą wtedy i tylko wtedy, gdy Karol musi spłacić swój dług[20]. Z. Ziembiński akcentuje rolę suwerena: „Stwierdzenie, iż ktoś prawnie powinien to a to uczynić, jest przede wszystkim informacją o ustanowieniu takiej powinności przez organizację państwową"[21]. Z kolei Jan Woleński uważa, że wypowiedź performatywna (normatywna) jest prawdziwa „wtedy i tylko wtedy,

[18] „«Powinien» – w powiązaniu z podmiotem osobowym wyraża obowiązek wykonania tego, co oznacza bezokolicznik". *Słownik języka polskiego*, red. M. Szymczak, t. 2, PWN, Warszawa 1984, 870.

[19] A. Naes, *Do We Know that Basis Norms Cannot Be True or False?*, Theoria 25(1959), 31-53.

[20] Zob. J. Kalinowski, dz. cyt., 27. Możemy zauważyć, że przytoczony przykład podpada pod schemat A. Tarskiego, zwany cząstkową definicją prawdy: *x jest zdaniem prawdziwym wtedy i tylko wtedy, gdy p*, gdzie „*p*" reprezentuje dowolne zdanie, a „*x*" – nazwę tego zdania. Zob. A. Tarski, *Teoria prawdy w językach nauk dedukcyjnych*, Nakładem Towarzystwa Naukowego Warszawskiego, Warszawa 1933, 5.

[21] Z. Ziembiński, dz. cyt., 41.

gdy działanie performatywne, do którego się odnosi, jest ważne"[22], a także „(...) jeżeli mamy normę, która coś nakazuje, to norma ta jest spełniona wtedy i tylko wtedy, gdy adresat (adresaci) tej normy zachowują się tak właśnie, jak tego ona wymaga"[23].

Niech „J" denotuje zbiór formuł języka deontycznego, zaś $M = \langle A\times C, f, w\rangle$ określa złożony z korelatów języka semimodel, w którym: A – to zbiór adresatów norm, C – zbiór czynów (i zaniechań), $A\times C \neq \varnothing$, $f$: $J\rightarrow 2^C$, $w$: $J\times(A\times C)\rightarrow\{1,0\}$. Rozumiemy przy tym, że funkcja $f$ przyporządkowuje formułom te podzbiory czynów, które są *zakresami normowania norm*[24]. Przyjmujemy skrót:

SP (x, c,Φ) dla 'adresat *x* czynem *c* spełnia Φ', w szczególności:

SP (x, c, αx) ↔ (adresat *x* czynem *c* spełnia powinność α).

Schemat: $w$ (αx, ⟨x, c⟩) = 1 czytamy: wartością wyrażenia 'x ma czynić α' dla pary ⟨x, c⟩ jest *prawda*. Indukcyjnie określamy pojęcie wartości logicznej zdań normatywnych ($w$):

$w(\alpha x, \langle x, c\rangle) = 1 \leftrightarrow [c\in f(\alpha x) \wedge SP\ (x, c, \alpha x)]$,

$w(\alpha x, \langle x, c\rangle) = 0 \leftrightarrow [c\notin f(\alpha x) \vee {\sim}SP\ (x, c, \alpha x)]$,

$w(\Phi, \langle x, c\rangle) = 1 \leftrightarrow [c\in f(\Phi) \wedge SP\ (x, c, \Phi)]$,

$w(\Phi, \langle x, c\rangle) = 0 \leftrightarrow [c\notin f(\Phi) \vee {\sim}SP\ (x, c, \Phi)]$,

$w({\sim}\Phi, \langle x, c\rangle) = 1 \leftrightarrow w(\Phi, \langle x, c\rangle) = 0$,

$w({\sim}\Phi, \langle x, c\rangle) = 0 \leftrightarrow w(\Phi, \langle x, c\rangle) = 1$,

$w(\Phi\rightarrow\Psi, \langle x, c\rangle) = 1 \leftrightarrow [w(\Phi, \langle x, c\rangle) = 0 \vee w(\Psi, \langle x, c\rangle) = 1]$,

$w(\Phi\rightarrow\Psi, \langle x, c\rangle) = 0 \leftrightarrow [w(\Phi, \langle x, c\rangle) = 1 \wedge w(\Psi, \langle x, c\rangle) = 0]$,

$w(N\Phi, \langle x, c\rangle) = 1 \leftrightarrow \{c\in f(\Phi) \wedge \forall d\ [d\in f(\Phi) \rightarrow w(\Phi, \langle x, c\rangle) = 1]\}$

$w(N\Phi, \langle x, c\rangle) = 0 \leftrightarrow \{c\notin f\ (\Phi) \vee \exists d\ [d\in f(\Phi) \wedge w\ (\Phi, \langle x, c\rangle) = 0]\}$.

Skonstruowana tu semantyka jest typu semantyki Kripke'go dla systemów modalnych S5. $A\times C$ – to zbiór „światów możliwych", a 'c, $d\in f(\Phi)$' jest relacją „dostępności światów", która jest zwrotna, symetryczna i przechodnia. W ramach tej semantyki przeprowadzimy, dla przykładu, dowód (nie wprost) prawdziwości twierdzenia:

---

[22] J. Woleński, *Z zagadnień analitycznej filozofii prawa*, Zeszyty Naukowe UJ, Prace Prawnicze 9(1980), 93.

[23] Tenże, *Logiczne problemy wykładni prawa*, Zeszyty Naukowe UJ, Prace Prawnicze, 56(1972), 32.

[24] „Zakresem normowania normy nazywamy zbiór zachowań adresatów norm, które ta norma reguluje. Zbiór ten może obejmować zarazem działania, od których adresat winien się powstrzymać, jak i działania, które adresat powinien wykonać". S. Lewandowski i in., *Logika dla prawników*, Wydawnictwo Prawnicze Lexis Nexis, Warszawa 2002, 232.

$N\Phi \rightarrow \Phi$, czyli $w(N\Phi \rightarrow \Phi, \langle x, c\rangle) = 1$. W tym celu zakładamy nie wprost, że $w(N\Phi \rightarrow \Phi, \langle x, c\rangle) = 0$. Stąd wynika (1) $w(N\Phi, \langle x, c\rangle) = 1$ i (2) $w(\Phi, \langle x, c\rangle) = 0$. Z (2) wynika (3) $c \notin f(\Phi) \vee \sim SP\ (x, c, \Phi)$. Z (1) otrzymujemy (4) $c \in f(\Phi)$ i (5) $\forall d\ [d \in f(\Phi) \rightarrow w(\Phi, \langle x, d\rangle) = 1]$. Po opuszczeniu dużego kwantyfikatora w (5) uzyskujemy (6) $c \in f(\Phi) \rightarrow w(\Phi, \langle x, c\rangle) = 1$. Z (6) i (4) przez odrywanie mamy (7) $w(\Phi, \langle x, c\rangle) = 1$, a stąd (8) $SP\ (x, c, \Phi)$. Natomiast z (3) i (4) wynika (9) $\sim SP(x, c, \Phi)$, czyli sprzeczność (9) z (8).

## LOGIKA DEONTYCZNA

Reguły wnioskowania:

– *Reguła podstawiania (RP):*

Jeżeli formuła języka deontycznego $\Phi$ jest twierdzeniem logiki deontycznej, to jest twierdzeniem logiki deontycznej również każda formuła powstająca z $\Phi$ w wyniku zastąpienia każdej (lub pewnej) wolnej zmiennej kategorii *k* wyrażeniem języka deontycznego tej samej kategorii *k* (za te same zmienne podstawia się te same wyrażenia w każdym miejscu występowania tych zmiennych, przy czym w wyniku podstawiania żadna zmienna wolna nie staje się związaną);

– *Reguła odrywania (RO):*

Jeżeli twierdzeniami logiki deontycznej są formuły języka deontycznego: $\Phi$ i $\Phi \rightarrow \Psi$, to twierdzeniem logiki deontycznej jest formuła $\Psi$;

– *Reguła zastępowania (RZ):*

Jeżeli twierdzeniami logiki deontycznej są formuły języka deontycznego: $\Phi$ i $\Psi \leftrightarrow \Xi$, to twierdzeniem logiki deontycznej jest formuła powstała z $\Phi$ przez zastąpienie jej fragmentu $\Xi$ formułą $\Psi$;

– *Deontyczna reguła Gödla ($N^+$):*

Jeżeli formuła języka deontycznego $\Phi$ jest twierdzeniem logiki deontycznej, to $N\Phi$ jest również twierdzeniem logiki deontycznej;

– *Aletyczna reguła Gödla ($\Box^+$):*

Jeżeli formuła języka deontycznego (jest twierdzeniem logiki deontycznej, to $\Box\Phi$ jest również twierdzeniem logiki deontycznej;

– *Reguła uogólniania (RU):*

Jeżeli formuła języka deontycznego $\Phi$ jest twierdzeniem logiki deontycznej, to $\forall x\Phi$ jest również twierdzeniem logiki deontycznej;

– *Reguła opuszczania dużego kwantyfikatora ($\forall^-$):*

Jeżeli twierdzeniem logiki deontycznej jest formuła $\Phi \rightarrow \forall x\Psi$, to jej twierdzeniem jest również formuła: $\Phi \rightarrow \Psi$;

– *Reguła opuszczania małego kwantyfikatora* ($\exists^{-}$):
Jeżeli twierdzeniem logiki deontycznej jest formuła $\exists x\Phi \rightarrow \Psi$, to jej twierdzeniem jest również formuła: $\Phi \rightarrow \Psi$;
– *Reguła dołączania dużego kwantyfikatora* ($\forall^{+}$):
Jeżeli formuła $\Phi \rightarrow \Psi$ jest twierdzeniem logiki deontycznej i zmienna $x$ nie jest wolna w formule $\Phi$, to twierdzeniem logiki deontycznej jest: $\Phi \rightarrow \forall x\Psi$;
– *Reguła dołączania małego kwantyfikatora* ($\exists^{+}$):
Jeżeli formuła $\Phi \rightarrow \Psi$ jest twierdzeniem logiki deontycznej i zmienna $x$ nie jest wolna w formule $\Psi$, to twierdzeniem logiki deontycznej jest: $\exists x\Phi \rightarrow \Psi$.

Aksjomaty i definicje
*Aksjomaty i definicje klasycznego rachunku zdań:*
Niech $\Phi$, $\Psi$, $\Xi$ reprezentują formuły języka deontycznego, wówczas:
S1. $(\Phi \rightarrow \Psi) \rightarrow [(\Psi \rightarrow \Xi) \rightarrow (\Phi \rightarrow \Xi)]$,
S2. $(\sim\Phi \rightarrow \Phi) \rightarrow \Phi$,
S3. $\Phi \rightarrow (\sim\Phi \rightarrow \Psi)$;
Df.$\vee$: $(\Phi \vee \Psi) \leftrightarrow (\sim\Phi \rightarrow \Psi)$,
Df.$\wedge$: $(\Phi \wedge \Psi) \leftrightarrow \sim(\Phi \rightarrow \sim\Psi)$,
Df.$\leftrightarrow$: $(\Phi \leftrightarrow \Psi) \leftrightarrow \sim[(\Phi \rightarrow \Psi) \rightarrow \sim(\Psi \rightarrow \Phi)]$;
*Aksjomaty i definicje logiki deontycznej:*
Niech $\Phi$, $\Psi$ reprezentują formuły języka deontycznego, wówczas:
A1. $N\Phi \rightarrow \Phi$[25],
A2. $N(\Phi \rightarrow \Psi) \rightarrow (N\Phi \rightarrow N\Psi)$,
A3. $N\Phi \rightarrow NN\Phi$,
A4. $\sim N\Phi \rightarrow N\sim N\Phi$;
Df. V: $V\Phi \leftrightarrow (N\Phi \vee \sim N\Phi)$,
Df.$\Lambda$: $\Lambda\Phi \leftrightarrow (N\Phi \wedge \sim N\Phi)$,

---

[25] Formułę o postaci $Np \rightarrow p$ logicy na ogół uznają za fałszywą, bo interpretują, że znaczy: „nakazy są spełniane". Wyjątkiem jest O. Becker, który godzi się na przyjęcie związku $Np \rightarrow p$ za ważny ze względu na wprowadzone przez niego pojęcie *spełniania legalnego* (w miejsce spełniania po prostu), uznając że „legalnie spełniona jest taka czynność, która jest nakazana i spełniona, legalnie zaniechana jest taka czynność, która jest zabroniona i zaniechana". J. Kalinowski, dz. cyt., 111. O. Becker, *Untersuchungen über den Modalkalkül*, Kulturverlag Anton Hain, Meisenheim am Glan 1952. W naszym systemie formuła $N\Phi \rightarrow \Phi$ wyraża sąd „nakazana powinność jest powinnością". Np.: Jeżeli jest nakazane, że świadek ma informować sąd o wszystkim, co wie w sprawie, to świadek ma informować sąd o wszystkim, co wie w sprawie.

Df. Z: $Z\Phi \leftrightarrow N{\sim}\Phi$,
Df. O: $O\Phi \leftrightarrow (N\Phi \vee N{\sim}\Phi)$,
Df. D: $D\Phi \leftrightarrow {\sim}N{\sim}\Phi$,
Df. F: $F\Phi \leftrightarrow {\sim}N\Phi$,
Df. I: $I\Phi \leftrightarrow ({\sim}N\Phi \wedge {\sim}N{\sim}\Phi)$.

*Aksjomaty i definicje aletycznej logiki modalnej:*

Niech $\Phi$, $\Psi$ reprezentują formuły języka deontycznego, wówczas:

Ax1. $\Box\Phi \rightarrow \Phi$,
Ax2. $\Box(\Phi\rightarrow\Psi) \rightarrow (\Box\Phi \rightarrow \Box\Psi)$,
Ax3. $\Box\Phi \rightarrow \Box\Box\Phi$,
Ax4. ${\sim}\Box \rightarrow \Box{\sim}\Box\Phi$;
Df.$\Diamond$: $\Diamond\Phi \leftrightarrow {\sim}\Box{\sim}\Phi$.

*Definicja małego kwantyfikatora:*

Niech $\Phi$ reprezentuje formuły języka deontycznego, wówczas:
Df.$\exists$: $\exists x\Phi \leftrightarrow {\sim}\,\forall x{\sim}\Phi$.

Twierdzenia

*Twierdzenia klasycznego rachunku zdań (KRZ).*

Twierdzenia klasycznego rachunku zdań deontycznych są logicznymi konsekwencjami według reguł *RP, RO* i *RZ* aksjomatów S1, S2, S3 i definicji Df.$\vee$, Df.$\wedge$, Df.$\leftrightarrow$. Jest to system w stylu rachunku zdań Jana Łukasiewicza[26].

*Twierdzenia logiki deontycznej:*

T1. $N\alpha x \rightarrow \alpha x$, bo A1.
T2. $N(\alpha x \rightarrow \beta x) \rightarrow (N\alpha x \rightarrow N\beta x)$, bo A2.
T3. $N\alpha x \rightarrow NN\alpha x$, bo A3.
T4. $D\alpha x \rightarrow ND\alpha x$, bo A4 i Df. D.
T5. $D{\sim}\alpha x \leftrightarrow {\sim}N\alpha x$, bo Df. D, $\Phi/{\sim}\Phi x$, RZ: ${\sim\sim}\alpha x \leftrightarrow \alpha x$.
T6. ${\sim}D\alpha x \leftrightarrow N{\sim}\alpha x$, bo Df. D, ${\sim}D\Phi \leftrightarrow N{\sim}\Phi$, $\Phi/\alpha x$.
T7. $N\alpha x \leftrightarrow {\sim}D{\sim}\alpha x$, bo T5.
T8. $ND\alpha x \leftrightarrow D\alpha x$, bo A1: $\Phi/D\alpha x$, T4, KRZ.
T9. $\alpha x \rightarrow D\alpha x$, bo A1, więc ${\sim}\Phi\rightarrow{\sim}N\Phi$, $\Phi/{\sim}\alpha x$, więc ${\sim\sim}\alpha x \rightarrow {\sim}N{\sim}\alpha x$, KRZ, Df. D.
T10. $\alpha x \rightarrow ND\alpha x$, bo KRZ, T9, T4.
T11. $N\,\alpha x \rightarrow D\alpha x$, bo T1, T10, KRZ.

[26] J. Łukasiewicz, *Elementy logiki matematycznej*, skrypt 1929 (2 wyd. – PWN, Warszawa 1958).

T12. $DN\alpha x \leftrightarrow N\alpha x$[27], bo T8, RP: $\alpha/{\sim}\alpha$, KRZ, więc ${\sim}ND{\sim}\alpha x \leftrightarrow {\sim}D{\sim}\alpha x$, RZ: T5, więc $D{\sim}D{\sim}\alpha x \leftrightarrow {\sim}D{\sim}\alpha x$, RZ: T7, więc T12.

T13. $N(\alpha x \rightarrow \beta x) \rightarrow (D\alpha x \rightarrow D\beta x)$, bo KRZ, więc $(\alpha x \rightarrow \beta x) \rightarrow ({\sim}\beta x \rightarrow {\sim}\alpha x)$, $N^+$, A2, więc $N(\alpha x \rightarrow \beta x) \rightarrow N({\sim}\beta x \rightarrow {\sim}\alpha x)$, A2, więc $N(\alpha x \rightarrow \beta x) \rightarrow (N{\sim}\beta x \rightarrow N{\sim}\alpha x)$, więc $N(\alpha x \rightarrow \beta x) \rightarrow ({\sim}N{\sim}\alpha x \rightarrow {\sim}N{\sim}\beta x)$, Df. D, więc T13.

T14. $N(ax \wedge \beta x) \rightarrow N\alpha x \wedge N\alpha x$, bo KRZ, więc $\alpha x \wedge \beta x \rightarrow \alpha x$, $\alpha x \wedge \beta x \rightarrow \beta x$, $N^+$, A2, więc $N(\alpha x \wedge \beta x) \rightarrow N\alpha x$, $N(\alpha x \wedge \beta x) \rightarrow N\beta x$, KRZ, więc T14.

T15. $N\alpha x \wedge N\beta x \rightarrow N(\alpha x \wedge \beta x)$, bo KRZ, więc $\alpha x \rightarrow (\beta x \rightarrow \alpha x \wedge \beta x)$, $N^+$, A2, więc $N\alpha x \rightarrow [N\beta x \rightarrow N(\alpha x \wedge \beta x)]$, KRZ, więc T15.

T16. $N(\alpha x \wedge \beta x) \leftrightarrow N\alpha x \wedge N\beta x$, bo T14, T15.

T17. $D(\alpha x \wedge \beta x) \rightarrow D\alpha x \wedge D\beta x$, bo KRZ, więc $\alpha x \wedge \beta x \rightarrow \alpha x$, $\alpha x \wedge \beta x \rightarrow \beta x$, $N^+$, więc $N(\alpha x \wedge \beta x \rightarrow \alpha x)$, $N(\alpha x \wedge \beta x \rightarrow \beta x)$, T13, więc $D(\alpha x \wedge \beta x) \rightarrow D\alpha x$, $D(\alpha x \wedge \beta x) \rightarrow D\beta x$, KRZ, więc T17.

T18. $D(\alpha x \rightarrow \beta x) \leftrightarrow (N\alpha x \rightarrow D\beta x)$, bo T16, RP: $\beta/{\sim}\beta$, więc $N(\alpha x \wedge {\sim}\beta x) \leftrightarrow N\alpha x \wedge N{\sim}\beta x$, KRZ, więc ${\sim}N(\alpha x \wedge {\sim}\beta x) \leftrightarrow {\sim}(N\alpha x \wedge N{\sim}\beta x)$, Df. D: $\Phi/\alpha x \rightarrow \beta x$, KRZ, więc T18.

T19. $(N\alpha x \vee N\beta x) \rightarrow N(\alpha x \vee \beta x)$, bo KRZ, więc $\alpha x \rightarrow (\alpha x \vee \beta x)$, $\beta x \rightarrow (\alpha x \vee \beta x)$, $N^+$, A2, więc $N\beta x \rightarrow N(\alpha x \vee \beta x)$, KRZ, więc T19.

T20. $D(\alpha x \vee \beta x) \leftrightarrow (D\alpha x \vee D\beta x)$, bo T16, RP: $\alpha/{\sim}\alpha$, $\beta/{\sim}\beta$, więc $N({\sim}\alpha x \wedge {\sim}\beta x) \leftrightarrow N{\sim}\alpha x \wedge N{\sim}\beta x$, KRZ, więc ${\sim} N({\sim}\alpha x \wedge {\sim}\beta x) \leftrightarrow {\sim} N{\sim}\alpha x \wedge N{\sim}\beta x$, T5, KRZ, RZ, więc $D{\sim}({\sim}\alpha x \wedge {\sim}\beta x) \leftrightarrow (D\alpha x \vee D\beta x)$, RZ, więc T20.

T21. $N(\alpha x \leftrightarrow \beta x) \rightarrow (N\alpha x \leftrightarrow N\beta x)$, bo A2, więc $N(\alpha x \rightarrow \beta x) \rightarrow (N\alpha x \rightarrow N\beta x)$, $N(\beta x \rightarrow \alpha x) \rightarrow (N\beta x \rightarrow N\alpha x)$, KRZ, więc $N(\alpha x \rightarrow \beta x) \wedge N(\beta x \rightarrow \alpha x) \rightarrow (N\alpha x \rightarrow N\beta x) \wedge (N\beta x \rightarrow N\alpha x)$, T16, RP: $\alpha x/(\alpha x \rightarrow \beta x)$, $\beta x/(\beta x \rightarrow \alpha x)$, KRZ, więc T21.

---

[27] O. Becker (dz. cyt.) wprowadza wyrażenia z powtórzonymi funktorami deontycznymi (ich superpozycje), które interpretuje w następujący sposób: „Instytucja wyższa nakazuje instytucji niższej pozwolenie na czynność *p*. Instytucja wyższa pozwala instytucji niższej na nakazanie czynności *p*, itd... Metajęzykowy charakter omawianych wyrażeń jest oczywisty". J. Kalinowski, dz. cyt., 115. W systemach deontycznych istotny jest problem redukcji tzw. iterowanych modalności. W deontycznym systemie S5 dowolne skończone ciągi funktorów deontycznych są redukowalne – bez hierarchizacji instytucji – tylko do sześciu modalności: $\Phi$, ${\sim}\Phi$, $N\Phi$, ${\sim}N\Phi$, $N{\sim}\Phi$, ${\sim}N{\sim}\Phi$. I tak się przedstawia sprawa redukcji iteracji modalności tylko w systemie S5.

T22. $N(\alpha x \leftrightarrow \beta x) \rightarrow (D\alpha x \leftrightarrow D\beta x)$, bo T13, więc $N(\alpha x \rightarrow \beta x) \rightarrow (D\alpha x \rightarrow D\beta x)$, $N(\beta x \rightarrow \alpha x) \rightarrow (D\beta x \rightarrow D\alpha x)$, KRZ, więc $N(\alpha x \rightarrow \beta x) \wedge N(\beta x \rightarrow \alpha x) \rightarrow (D\alpha x \rightarrow D\beta x) \wedge (D\beta x \rightarrow D\alpha x)$, T16, RP: $\alpha x/(\alpha x \rightarrow \beta x)$, $\beta x/(\beta x \rightarrow \alpha x)$, KRZ, więc T22.

L1. $V\Phi$, bo $\Phi \vee \sim\Phi$, więc $N\Phi \vee \sim N\Phi$, Df. V, więc L1.

L2. $\sim\Lambda\Phi$, bo $\sim(\Phi \wedge \sim\Phi)$, więc $\sim(N\Phi \wedge \sim N\Phi)$, Df.$\Lambda$, więc L2.

L3. $\Phi \rightarrow V\Phi$, bo $\Psi \rightarrow (\Phi \rightarrow \Psi)$, więc $V\Phi \rightarrow (\Phi \rightarrow V\Phi)$, RO: L1, więc L3.

L4. $\Lambda\Phi \rightarrow \Phi$, bo $\sim\Psi \rightarrow (\Psi \rightarrow \Phi)$, więc $\sim\Lambda\Phi \rightarrow (\Lambda\Phi \rightarrow \Phi)$, RO: L2, więc L4.

T23. $V\alpha x$, bo L1.

T24. $\sim\Lambda\alpha x$, bo L2.

T25. $\Lambda\alpha x \leftrightarrow \sim V\alpha x$, bo $\Phi \wedge \sim\Psi \rightarrow (\Psi \leftrightarrow \sim\Phi)$, T23, T24.

T26. $N\alpha x \leftrightarrow Z\sim\alpha x$, bo Df. Z: $\Phi/\sim\alpha x$.

T27. $D\sim\alpha x \leftrightarrow \sim N\alpha x$, bo Df. D: $\Phi/\sim\alpha x$.

T28. $F\alpha x \leftrightarrow D\sim\alpha x$, bo Df. F: $\Phi/\alpha x$, T27.

T29. $F\sim\alpha x \leftrightarrow D\alpha x$, bo T28: $\alpha/\sim\alpha$.

T30. $I\alpha x \leftrightarrow \sim O\alpha x$, bo Df. O, Df. I: $\Phi/\alpha x$, więc $\sim O\alpha x \leftrightarrow \sim(N\alpha x \vee N\sim\alpha x) \leftrightarrow \sim N\alpha x \wedge \sim N\alpha x \leftrightarrow I\alpha x$.

T31. $I\alpha x \leftrightarrow (F\alpha x \wedge D\alpha x)$, bo Df. I, Df. F, Df. D: $\Phi/\alpha x$, więc $I\alpha x \leftrightarrow (\sim N\alpha x \wedge \sim N\sim\alpha x) \leftrightarrow (F\alpha x \wedge D\alpha x)$.

T32. $I\alpha x \leftrightarrow (D\alpha x \wedge D\sim\alpha x)$, bo Df. I, Df. D.

T33. $I\alpha x \leftrightarrow I\sim\alpha x$, bo T32, T32: $\alpha/\sim\alpha$.

T34. $D\alpha x \leftrightarrow \sim Z\alpha x$, bo Df. D, Df. Z.

T35. $O\alpha x \leftrightarrow (N\alpha x \vee Z\alpha x)$, bo Df. O, Df. Z.

T36. $O\alpha x \leftrightarrow O\sim\alpha x$, bo Df. O.

T37. $O\alpha x \leftrightarrow \sim I\alpha x$, bo T30.

T38. $Z\alpha x \leftrightarrow \sim D\alpha x$, bo T34.

T39. $N\alpha x \leftrightarrow \sim F\alpha x$, bo Df. F.

T40. $N\alpha x \leftrightarrow \sim D\sim\alpha x$, bo T27.

*Rozszerzenie teorii o modalności aletyczne*

T41. $\Box\alpha x \rightarrow \alpha x$, bo Ax1: $\Phi/\alpha x$.

T42. $\Box(\alpha x \rightarrow \beta x) \rightarrow (\Box\alpha x \rightarrow \Box\beta x)$, bo Ax2: $\Phi/\alpha x$, $\Psi/Bx$.

T43. $\Box\alpha x \rightarrow \Box\Box\alpha x$, bo Ax3: $\Phi/\alpha x$.

T44. $\Diamond\alpha x \rightarrow \Box\Diamond\alpha x$, bo Ax4: $\Phi/\alpha x$.

T45. $V\alpha x \leftrightarrow D\Diamond\sim\alpha x \vee D\Diamond\alpha x$, *bo*

1) T41: $\alpha/\sim\alpha$, Df.$\Diamond$, więc $\alpha x \rightarrow \Diamond\alpha x$, $N^+$, A2, więc $N\alpha x \rightarrow N\Diamond\alpha x$, T11: $\alpha/\Diamond\alpha$, więc $N\alpha x \rightarrow D\Diamond\alpha x$, KRZ, więc $N\alpha x \rightarrow (D\Diamond\alpha x \vee D\Diamond\sim\alpha x)$;

2) $\sim\alpha x \to \Diamond\sim\alpha x$, $N^+$, T13, więc $D\sim\alpha x \to D\Diamond\sim\alpha x$, więc $\sim N\alpha x \to (D\Diamond\alpha x \vee D\Diamond\sim\alpha x)$;
3) $(N\alpha x \vee \sim N\alpha x) \to (D\Diamond\alpha x \vee D\Diamond\sim\alpha x)$, więc $V\alpha x \to (D\Diamond\alpha x \vee D\Diamond\sim\alpha x)$;
4) $(N\alpha x \vee \sim N\alpha x) \to [(D\Diamond\alpha x \vee D\Diamond\sim\alpha x) \to (N\alpha x \vee \sim N\alpha x)]$, Df. V, więc $(D\Diamond\alpha x \vee D\Diamond\sim\alpha x) \to V\alpha x$.

T46. $\Lambda\alpha x \leftrightarrow N\Box\alpha x \wedge N\Box\sim\alpha x$, bo T46, więc $\sim V\alpha x \leftrightarrow \sim(D\Diamond\alpha x \vee D\Diamond\sim\alpha x)$, T25, Df.$\Diamond$, więc T46.

T47. $Z\Diamond\alpha x \leftrightarrow N\Box\sim\alpha x$, bo Df. Z, więc $Z\alpha x \leftrightarrow N\sim\alpha x$: $\alpha/\Diamond\alpha$, więc $Z\Diamond\alpha x \leftrightarrow N\sim\Diamond\alpha x \leftrightarrow N\Box\sim\alpha x$.

T48. $Z\Box\alpha x \leftrightarrow N\Diamond\sim\alpha x$, bo Df. Z: $\alpha/\Box\alpha$.

T49. $F\Diamond\alpha x \leftrightarrow D\Box\sim\alpha x$, bo T28, więc $F\alpha x \leftrightarrow \sim N\alpha x$: $\alpha/\Diamond\alpha$, więc $F\Diamond\alpha x \leftrightarrow \sim N\Diamond\alpha x \leftrightarrow D\sim\Diamond\alpha x \leftrightarrow D\Box\sim\alpha x$.

T50. $F\Box\alpha x \leftrightarrow D\Diamond\sim\alpha x$, bo T28: $\alpha/\Box\alpha$.

T51. $I\Diamond\alpha x \leftrightarrow D\Diamond\alpha x \wedge D\Box\sim\alpha x$, bo T32: $\alpha/\Diamond\alpha$, więc $I\Diamond\alpha x \leftrightarrow D\Diamond\alpha x \wedge D\sim\Diamond\alpha x \leftrightarrow D\Diamond\alpha x \wedge D\Box\sim\alpha x$.

T52. $I\Box\alpha x \leftrightarrow D\Box\alpha x \wedge D\Diamond\sim\alpha x$, bo T32: $\alpha/\Box\alpha$.

T53. $O\Box\alpha x \leftrightarrow (N\Box\alpha x \vee N\Diamond\sim\alpha x)$, bo Df. O: $\alpha/\Box\alpha$.

T54. $I\Diamond\alpha x \leftrightarrow \sim O\Diamond\alpha x$, bo T30: $\alpha/\Diamond\alpha$.

T55. $I\Box\alpha x \leftrightarrow \sim O\Box\alpha x$, bo T30: $\alpha/\Box\alpha$.

T56. $O\Diamond\alpha x \leftrightarrow (N\Box\sim\alpha x \vee N\Diamond\alpha x)$, bo Df. O: $\alpha/\Diamond\alpha$, więc $O\Diamond\alpha x \leftrightarrow (N\Diamond\alpha x \vee N\sim\Diamond\alpha x) \leftrightarrow (N\Box\sim\alpha x \vee N\Diamond\alpha x)$.

T57. $I\Box\alpha x \leftrightarrow I\Diamond\sim\alpha x$, bo T33: $\alpha/\Box\alpha$, więc $I\Box\alpha x \leftrightarrow I\sim\Box\alpha x \leftrightarrow I\Diamond\sim\alpha x$.

T58. $O\Box\alpha x \leftrightarrow O\Diamond\sim\alpha x$, bo T36: $\alpha/\Box\alpha$, więc $O\Box\alpha x \leftrightarrow O\sim\Box\alpha x \leftrightarrow O\Diamond\sim\alpha x$.

T59. $Z\Diamond\alpha x \leftrightarrow N\Box\sim\alpha x$, bo Df. Z: $\alpha/\Diamond\alpha$, więc $Z\Diamond\alpha x \leftrightarrow N\sim\Diamond\alpha x \leftrightarrow N\Box\sim\alpha x$.

T60. $O\Box\alpha x \leftrightarrow (N\Box\alpha x \vee Z\Box\alpha x)$, bo T35: $\alpha/\Box\alpha$.

T61. $O\Diamond\alpha x \leftrightarrow (N\Diamond\alpha x \vee Z\Diamond\alpha x)$, bo T35: $\alpha/\Diamond\alpha$.

L5. $f, g \in \{\Box, \Diamond\} \to [N(f\alpha x \wedge g\beta x) \leftrightarrow (Nf\alpha x \wedge Ng\beta x)]$, bo T16: $\alpha/f\alpha$, $\beta/g\beta$.

L6. $f, g \in \{\Box, \Diamond\} \to [D(f\alpha x \wedge g\beta x) \to (Df\alpha x \wedge Dg\beta x)]$, bo T17: $\alpha/f\alpha$, $\beta/g\beta$.

L7. $f, g \in \{\Box, \Diamond\} \to [N(f\alpha x \to g\beta x) \to (Nf\alpha x \to Ng\beta x)]$, bo A2: $\alpha/f\alpha$, $\beta/g\beta$.

L8. $f, g \in \{\Box, \Diamond\} \to [N(f\alpha x \to g\beta x) \to (Df\alpha x \to Dg\beta x)]$, bo T13: $\alpha/f\alpha$, $\beta/g\beta$.

L9. $f, g \in \{\Box, \Diamond\} \to [D(f\alpha x \to g\beta x) \leftrightarrow (Nf\alpha x \to Dg\beta x)]$, bo T18: $\alpha/f\alpha$, $\beta/g\beta$.

L10. $f, g \in \{\Box, \Diamond\} \rightarrow [(Nf\alpha x \vee Ng\beta x) \leftrightarrow N(f\alpha x \vee g\beta x)]$, bo T19: $\alpha/\mathrm{f}\alpha$, $\beta/\mathrm{g}\beta$.

L11. $f, g \in \{\Box, \Diamond\} \rightarrow [D(f\alpha x \vee g\beta x) \leftrightarrow (Df\alpha x \vee Dg\beta x)]$, bo T20: $\alpha/\mathrm{f}\alpha$, $\beta/\mathrm{g}\beta$.

L12. $f, g \in \{\Box, \Diamond\} \rightarrow [N(f\alpha x \leftrightarrow g\beta x) \rightarrow (Nf\alpha x \leftrightarrow Ng\beta x)]$, bo T21: $\alpha/\mathrm{f}\alpha$, $\beta/\mathrm{g}\beta$.

L13. $f, g \in \{\Box, \Diamond\} \rightarrow [N(f\alpha x \leftrightarrow g\beta x) \rightarrow (Df\alpha x \leftrightarrow Dg\beta x)]$, bo T22: $\alpha/\mathrm{f}\alpha$, $\beta/\mathrm{g}\beta$.

*Rozszerzenie teorii o kwantyfikatory*

L14. $\exists x\Phi \leftrightarrow \sim\forall x\sim\Phi$, *bo*

1) $\exists x\Phi \rightarrow \exists x\Phi$, $\exists^-$, więc $\Phi \rightarrow \exists x\Phi$, więc $\sim\exists x\Phi \rightarrow \sim\Phi$, $\forall^+$, więc $\sim\exists x\Phi \rightarrow \forall x\sim\Phi$, więc $\sim\forall x\sim\Phi \rightarrow \exists x\Phi$;

2) $\forall x\sim\Phi \rightarrow \forall x\sim\Phi$, $\forall^-$, więc $\forall x\sim\Phi \rightarrow \sim\Phi$, więc $\Phi \rightarrow \sim\forall x\sim\Phi$, $\exists^+$, więc $\exists x\Phi \rightarrow \sim\forall x\sim\Phi$.

T62. $\exists xN\alpha x \leftrightarrow \sim\forall xD\sim\alpha x$, bo L14.

Inne przykłady według L14:

– $\exists xN\Box\alpha x \leftrightarrow \sim\forall x\sim N\Box\alpha x \leftrightarrow \sim\forall xD\Diamond\sim\alpha x$;
– $\exists x\Box N\alpha x \leftrightarrow \sim\forall x\sim\Box N\alpha x \leftrightarrow \sim\forall x\Diamond D\sim\alpha x$;
– $\exists xN\Diamond\alpha x \leftrightarrow \sim\forall x\sim N\Diamond\alpha x \leftrightarrow \sim\forall xD\Box\sim\alpha x$;
– $\exists x\Diamond N\alpha x \leftrightarrow \sim\forall x\sim\Diamond N\alpha x \leftrightarrow \sim\forall x\Box D\sim\alpha x$;
– $\exists x\Box N\Box\alpha x \leftrightarrow \sim\forall x\sim\Box N\Box\alpha x \leftrightarrow \sim\forall x\Diamond D\Diamond\sim\alpha x$;
– $\exists x\Box N\Diamond\alpha x \leftrightarrow \sim\forall x\sim\Box N\Diamond\alpha x \leftrightarrow \sim\forall x\Diamond D\Box\sim\alpha x$;
– $\exists x\Diamond N\Box\alpha x \leftrightarrow \sim\forall x\sim\Diamond N\Box\alpha x \leftrightarrow \sim\forall x\Box D\Diamond\sim\alpha x$;
– $\exists x\Diamond N\Diamond\alpha x \leftrightarrow \sim\forall x\sim\Diamond N\Diamond\alpha x \leftrightarrow \sim\forall x\Box D\Box\sim\alpha x$;

T63. $\forall xD\sim\alpha x \leftrightarrow \sim\exists xN\alpha x$, bo T62.

T64. $\exists xN\sim\alpha x \leftrightarrow \sim\forall xD\alpha x$, bo T62: $\alpha/\sim\alpha$, RZ: $\sim\sim\alpha x \leftrightarrow \alpha x$.

T65. $\forall xD\alpha x \leftrightarrow \sim\exists xN\sim\alpha x$, bo T64.

L15. $\forall x\Phi \leftrightarrow \sim\exists x\sim\Phi$, bo L14: $\Phi/\sim\Phi$, RZ: $\sim\sim\Phi \leftrightarrow \Phi$.

T66. $\forall xN\alpha x \leftrightarrow \sim\exists xD\sim\alpha x$, bo L15: $\Phi/\mathrm{N}\alpha x$, T27.

T67. $\exists xD\sim\alpha x \leftrightarrow \sim\forall xN\alpha x$, bo T66.

T68. $\exists xD\alpha x \leftrightarrow \sim\forall xN\sim\alpha x$, bo T67: $\alpha/\sim\alpha$, RZ: $\sim\sim\alpha x \leftrightarrow \alpha x$.

T69. $\forall xN\sim\alpha x \leftrightarrow \sim\exists xD\alpha x$, bo T68.

T70. $\exists xI\alpha x \leftrightarrow \sim\forall xO\alpha x$, bo L14, T37.

T71. $\forall xI\alpha x \leftrightarrow \sim\exists xO\alpha x$, bo L15, T37.

T72. $\exists xO\alpha x \leftrightarrow \sim\forall xI\alpha x$, bo T71.

T73. $\forall xO\alpha x \leftrightarrow \sim\exists xI\alpha x$, bo T70.

T74. $\exists xD\alpha x \leftrightarrow \sim\forall xZ\alpha x$, bo L14, T38.

T75. $\forall xD\alpha x \leftrightarrow \sim\exists xZ\alpha x$, bo L15, T38.

T76. $\exists xZ\alpha x \leftrightarrow \sim\forall xD\alpha x$, bo T75.

T77. $\forall xZ\alpha x \leftrightarrow \sim\exists xD\alpha x$, bo T74.
T78. $\exists xF\alpha x \leftrightarrow \sim\forall xN\alpha x$, bo L14, T39
T79. $\forall xF\alpha x \leftrightarrow \sim\exists xN\alpha x$, bo L15, T39.
T80. $\exists xN\alpha x \leftrightarrow \sim\forall xF\alpha x$, bo T79.
T81. $\forall xN\alpha x \leftrightarrow \sim\exists xF\alpha x$, bo T78
L16. $\forall x\, \Phi \to \Phi$, bo$\forall x\, \Phi \to \forall x\, \Phi$, $\forall^-$, więc L16.
T82. $\forall xN\alpha x \to \forall x\alpha x$, bo L16, więc $\forall xN\alpha x \to N\alpha x$, $\forall^+$, więc T82.
T83. $\forall xZ\alpha x \to \forall xN\sim\alpha x$, bo L16, więc $\forall xZ\alpha x \to Z\alpha x$, Df. Z, więc $\forall xZ\alpha x \to N\sim\alpha x$, $\forall^+$, więc T83.
T84. $\forall xN\alpha x \to N\forall x\alpha x$, bo L16, więc $\forall xN\alpha x \to N\alpha x$, $N^+$, więc $N(\forall xN\alpha x \to N\alpha x)$, T13, więc $D\forall xN\alpha x \to DN\alpha x$, RZ: T12, więc $D\forall xN\alpha x \to N\alpha x$, A1, więc $D\forall xN\alpha x \to \alpha x$, $\forall^+$, więc $D\forall xN\alpha x \to \forall x\alpha x$, $N^+$, A2, więc $ND\exists xN\alpha x \to N\forall x\alpha x$, T10, więc T84.
T85. $N\forall x\alpha x \to \forall xN\alpha x$, bo L16, więc $\forall x\alpha x \to \alpha x$, $N^+$, A2, więc $N\forall x\alpha x \to N\alpha x$, $\forall^+$, więc T85.
T86. $\forall xN\alpha x \leftrightarrow N\forall x\alpha x$, bo T84, T85.
T87. $\exists xD\alpha x \leftrightarrow D\exists x\alpha x$, bo T86: $\alpha/\sim\alpha$, więc $\sim\forall xN\sim\alpha x \leftrightarrow \sim N\forall x\sim\alpha x$, więc $\exists x\sim N\sim\alpha x \leftrightarrow D\sim\forall x\sim\alpha x$, RZ: Df. D, RZ: L14, więc T87.
T88. $F\ \forall x\alpha x \leftrightarrow \exists xF\alpha x$, boT86, RZ: T39, więc $\forall x\sim F\alpha x \to \sim F\forall x\alpha x$, więc $F\forall x\alpha x \leftrightarrow \sim\forall x\sim F\alpha x$, RZ: L14, więc T88.
T89. $Z\exists x\alpha x \leftrightarrow \forall xZ\alpha x$, bo T87, T75, więc $\sim\forall xZ\alpha x \leftrightarrow D\exists x\alpha x$, T34, więc $\sim\forall xZ\alpha x \leftrightarrow \sim Z\exists x\alpha x$, więc T89.
L17. $\forall x(\Phi\wedge\Psi) \leftrightarrow (\forall x\Phi \wedge \forall x\Psi)$, bo:
1) L16: $\Phi/(\Phi\wedge\Psi)$, więc $\forall x\ (\Phi\wedge\Psi) \to \Phi\wedge\Psi$, więc $\forall x\ (\Phi\wedge\Psi) \to \Phi$, $\forall x\ (\Phi\wedge\Psi) \to \Psi$, $\forall^+$, więc $\forall x\ (\Phi\wedge\Psi) \to \forall x\Psi$, $\forall x\ (\Phi\wedge\Psi) \to \forall x\Psi$, więc $\forall x\ (\Phi\wedge\Psi) \to \forall x\Phi\wedge\forall x\ \Psi$;
2) L16, więc $\forall x\Phi \to \Phi$, $\forall x\Psi \to \Psi$, więc $\forall x\Phi\wedge\forall x\Psi \to \Phi\wedge\Psi$, $\forall^+$, więc $\forall x\Phi\wedge\forall x\Psi \to \forall x\ (\Phi\wedge\Psi)$.
T90. $\forall x(N\alpha x\wedge N\beta x) \leftrightarrow (\forall xN\alpha x\wedge\forall xN\beta x)$, bo L17.
T91. $\forall xN(\alpha x\wedge\beta x) \leftrightarrow (\forall xN\alpha x\wedge\forall xN\beta x)$, bo T90, T16.
T92. $\forall x(D\alpha x\wedge D\beta x) \leftrightarrow (\forall xD\alpha x\wedge\forall xD\beta x)$, bo L17.
T93. $\forall xD(\alpha x\wedge\beta x) \to \forall xD\alpha x\wedge\forall xD\beta x$, bo T92, T17.
L18. $X, Y \in \{V, \Lambda, N, D, O, Z, I, F\} \to [\forall x(X\alpha x\wedge Y\beta x) \leftrightarrow (\forall xX\alpha x\wedge\forall xY\beta x)]$, bo L17.
L19. $\Phi \to \exists x\Phi$, bo L16: $\Phi/\sim\Phi$, więc $\forall x\sim\Phi \to \sim\Phi$, więc $\Phi \to \sim\forall x\sim\Phi$, L14.
L20. $\exists x(\Phi\wedge\Psi) \to (\exists x\Phi\wedge\exists x\Psi)$, bo L19, więc $\Phi \to \exists x\Phi$, $\Psi \to \exists x\Psi$, $\Phi\wedge\Psi \to \exists x\Phi x\wedge\exists x\Psi$, $\exists^+$, więc L20.

L21. $X, Y \in \{V, \Lambda, N, D, O, Z, I, F\} \rightarrow [\exists x(X\alpha x \wedge Y\beta x) \rightarrow (\exists x X\alpha x \wedge \exists x Y\beta x)]$, bo L20.

L22. $\exists x(\Phi \vee \Psi) \leftrightarrow (\exists x\Phi \vee \exists x\Psi)$, bo L17: $\Phi/{\sim}\Phi$, $\Psi/{\sim}\Psi$, więc $\forall x({\sim}\Phi \wedge {\sim}\Psi) \leftrightarrow (\forall x{\sim}\Phi \wedge \forall x{\sim}\Psi)$, więc ${\sim}\forall x\ ({\sim}\Phi \wedge {\sim}\Psi) \leftrightarrow {\sim}(\forall x{\sim}\Phi \wedge \forall x{\sim}\Psi)$, więc ${\sim}\forall x{\sim}(\Phi \vee \Psi) \leftrightarrow {\sim}({\sim}\forall x{\sim}\Phi \vee {\sim}\forall x{\sim}\Psi)$, L14, więc L22.

L23. $X, Y \in \{V, \Lambda, N, D, O, Z, I, F\} \rightarrow [\exists x(X\alpha x \vee Y\beta x) \leftrightarrow (\exists x X\alpha x \vee \exists x Y\beta x)]$, bo L22.

T94. $N\alpha x \rightarrow \exists x N\alpha x$, bo L19: $\Phi/N\alpha x$.

T95. $D\alpha x \rightarrow \exists x D\alpha x$, bo L19: $\Phi/D\alpha x$.

T96. $\exists x(N\alpha x \wedge N\beta x) \rightarrow (\exists x N\alpha x \wedge \exists x N\beta x)$, bo L21: X/N, Y/N.

T97. $\exists x(\alpha x \wedge \beta x) \rightarrow (\exists x N\alpha x \wedge \exists x N\beta x)$, bo T96, T16.

T98. $\exists x(D\alpha x \wedge D\beta x) \rightarrow (\exists x D\alpha x \wedge \exists x D\beta x)$, bo L21: X/D, Y/D.

T99. $\exists x D(\alpha x \wedge \beta x) \rightarrow (\exists x D\alpha x \wedge \exists x D\beta x)$, bo T98, T17.

T100. $\exists x(N\alpha x \wedge D\beta x) \rightarrow (\exists x N\alpha x \wedge \exists x D\beta x)$, bo L21: X/N, Y/D.

T101. $\exists x(N\alpha x \vee N\beta x) \leftrightarrow (\exists x N\alpha x \vee \exists x N\beta x)$, bo L23: X/N, Y/N.

T102. $\exists x(D\alpha x \vee D\beta x) \leftrightarrow (\exists x D\alpha x \vee \exists x D\beta x)$, bo L23: X/D, Y/D.

L24. $(\forall x\Phi \vee \forall x\Psi) \rightarrow \forall x\ (\Phi \vee \Psi)$, bo L20: $\Phi/{\sim}\Phi$, $\Psi/{\sim}\Psi$, więc $\exists x({\sim}\Phi \wedge {\sim}\Psi) \rightarrow (\exists x{\sim}\Phi \wedge \exists x{\sim}\Psi)$, więc ${\sim}(\exists x{\sim}\Phi \wedge \exists x{\sim}\Psi) \rightarrow {\sim}\exists x\ ({\sim}\Phi \wedge {\sim}\Psi)$, więc $({\sim}\exists x{\sim}\Phi \vee {\sim}\exists x{\sim}\Psi) \rightarrow {\sim}\exists x{\sim}(\Phi \vee \Psi)$, L15, więc L24.

L25. $X, Y \in \{V, \Lambda, N, D, O, Z, I, F\} \rightarrow [\forall x X\alpha x \vee \forall x Y\beta x) \rightarrow \forall x(X\alpha x \vee Y\beta x)]$, bo L24.

T103. $(\forall x N\alpha x \vee \forall x N\beta x) \rightarrow \forall x(N\alpha x \vee N\beta x)$, bo L25: X/N, Y/N.

T104. $(\forall x D\alpha x \vee \forall x D\beta x) \rightarrow \forall x(D\alpha x \vee D\beta x)$, bo L25: X/D, Y/D.

T105. $(\forall x D\alpha x \vee \forall x D\beta x) \rightarrow \forall x D(\alpha x \vee \beta x)$, bo T104, T20.

T106. $(\forall x N\alpha x \vee \forall x N\beta x) \rightarrow \forall x N(\alpha x \vee \beta x)$, bo T103, T19.

L26. $\forall x\ (\Phi \rightarrow \Psi) \rightarrow (\forall x\Phi \rightarrow \forall x\Psi)$, bo L16, więc $\forall x\ (\Phi \rightarrow \Psi) \rightarrow (\Phi \rightarrow \Psi)$, L16, więc $\forall x\ (\Phi \rightarrow \Psi) \rightarrow (\forall x\Phi \rightarrow \forall x\Psi)$, $\forall^{+}$, więc L26.

L27. $\forall x\ (\Phi \rightarrow \Psi) \rightarrow (\exists x\Phi \rightarrow \exists x\Psi)$, bo L16, więc $\forall x\ (\Phi \rightarrow \Psi) \rightarrow (\Phi \rightarrow \Psi)$, L19, więc $\forall x\ (\Phi \rightarrow \Psi) \rightarrow (\Phi \rightarrow \exists x\Psi)$, $\exists^{+}$, więc L27.

L28. $\forall x(\Phi \leftrightarrow \Psi) \rightarrow (\forall x\Phi \leftrightarrow \forall x\Psi)$, bo L26, więc $\forall x\ (\Phi \rightarrow \Psi) \rightarrow (\forall x\Phi \rightarrow \forall x\Psi)$, $\forall x\ (\Psi \rightarrow \Phi) \rightarrow (\forall x\Psi \rightarrow \forall x\Phi)$, więc $\forall x(\Phi \rightarrow \Psi) \wedge \forall x\ (\Psi \rightarrow \Phi) \rightarrow (\forall x\Phi \rightarrow \forall x\Psi) \wedge (\forall x\Psi \rightarrow \forall x\Phi)$, L17, więc L28.

L29. $\forall x\ (\Phi \leftrightarrow \Psi) \rightarrow (\exists x\ \Phi \leftrightarrow \exists x\Psi)$, bo L27, więc $\forall x(\Phi \rightarrow \Psi) \rightarrow (\exists x\Phi \rightarrow \exists x\Psi)$, $\forall x\ (\Psi \rightarrow \Phi) \rightarrow (\exists x\Psi \rightarrow \exists x\Phi)$, więc $\forall x\ (\Phi \rightarrow \Psi) \wedge \forall x\ \Psi \rightarrow \Phi) \rightarrow (\exists x\Phi \rightarrow \exists x\Psi) \wedge (\exists x\Psi \rightarrow \exists x\Phi)$, L17, więc L29.

T107. $\forall x(Z\alpha x\leftrightarrow N{\sim}\alpha x)\rightarrow(\forall xZ\alpha x\leftrightarrow\forall xN{\sim}\alpha x)$, bo L28.
T108. $\forall x(D\alpha x\leftrightarrow{\sim}N{\sim}\alpha x)\rightarrow(\forall xD\alpha x\leftrightarrow\forall x{\sim}N{\sim}\alpha x)$, bo L28.
T109. $\forall x(F\alpha x\leftrightarrow{\sim}N\alpha x)\rightarrow(\forall xF\alpha x\leftrightarrow\forall x{\sim}N\alpha x)$, bo L28.
T110. $\forall x(Z\alpha x\leftrightarrow N{\sim}\alpha x)\rightarrow(\exists xZ\alpha x\leftrightarrow\exists xN{\sim}\alpha x)$, bo L29.
T111. $\forall x(D\alpha x\leftrightarrow{\sim}N{\sim}\alpha x)\rightarrow(\exists xD\alpha x\leftrightarrow\exists x{\sim}N{\sim}\alpha x)$, bo L29.
T112. $\forall x(F\alpha x\leftrightarrow{\sim}N\alpha x)\rightarrow(\exists xF\alpha x\leftrightarrow\exists x{\sim}N\alpha x)$, bo L29.
T113. $\forall x(N\alpha x\rightarrow\alpha x)\rightarrow(\forall xN\alpha x\rightarrow\forall x\alpha x)$, bo L26.
T114. $\forall x(N\alpha x\rightarrow\alpha x)\rightarrow(\exists xN\alpha x\ \exists x\alpha x)$, bo L27.
T115. $\forall x(\alpha x\rightarrow D\alpha x)\rightarrow(\forall x\alpha x\rightarrow\forall xD\alpha x)$, bo L26.
T116. $\forall x(\alpha x\rightarrow D\alpha x)\rightarrow(\exists x\alpha x\rightarrow\exists xD\alpha x)$, bo L27.
T117. $\forall x(O\alpha x\leftrightarrow{\sim}I\alpha x)\rightarrow(\forall xOax\leftrightarrow\forall x{\sim}I\alpha x)$, bo L28.
T118. $\forall x(O\alpha x\leftrightarrow{\sim}I\alpha x)\rightarrow(\exists xO\alpha x\leftrightarrow\exists x{\sim}I\alpha x)$, bo L29.

## DEONTIC LOGIC IN S5 SYSTEM

Summary

The aim of the paper is to follow Backer's guidelines on the treatment of the duty performance, placed by the norm, as a special kind of *legal performance*, and J. Kalinowski's suggestion about the need of capturing the norms in the language of modality *de re*. The method applied in this work is a formal-logical conduct: it is a construction of axiomatic calculus. A deductive system of deontic logic is built which fulfils intentions mentioned. It turns out that this way, a deontic counterpart of the modal system S5 has been achieved. Plenty of new theorems about logical relations are derived from the deontic system S5. Some formal bases for a reduction of iteration of deontic functors to desirable minimum of modality are provided.