Anna Lemańska

Prawda a matematyka

Studia Philosophiae Christianae 46/1, 37-54

2010

Studia Philosophiae Christianae
UKSW
46(2010)1

ANNA LEMAŃSKA
Instytut Filozofii UKSW, Warszawa

PRAWDA A MATEMATYKA

Określenie, co to jest matematyka, jaka jest jej istota, co jest jej przedmiotem i jak on istnieje, nie jest łatwe. Między matematykami i filozofami matematyki toczą się na te tematy spory, mimo precyzyjnie scharakteryzowanej metody badawczej i zgody co do akceptowania wyników. Istnienie kontrowersji wokół istoty matematyki wynika m.in. z wielości funkcji spełnianych przez matematykę. Matematyka jest nauką formalną, jakby „oderwaną" od rzeczywistości fizycznej, która jednak „słucha" praw matematycznych. Jest zarazem językiem nauk przyrodniczych. W szczególności tylko za pomocą jej formalizmu można ująć rzeczywistość świata kwantów. Metodą matematyki jest metoda aksjomatyczno-dedukcyjna, lecz jednocześnie rozwój wiedzy matematycznej jest uzależniony od intuicji matematyków i nieformalnych metod heurystycznych. Te zróżnicowane cechy matematyki dają podstawy do często diametralnie odmiennych interpretacji wiedzy matematycznej i jej przedmiotu: od skrajnego platonizmu po nominalizm, od formalizmu po intuicjonizm[1]. Jak się jednak wydaje, większość z kierunków w filozofii matematyki ujmuje tylko jeden z aspektów matematyki i, koncentrując się na nim, uwypukla jego rolę, pomijając inne.

Wśród wielu spornych kwestii filozoficznych mieści się również problem prawdy w matematyce. Na pytanie: co znaczy, że zdanie matematyczne jest prawdziwe, oczywista wydaje się być odpowiedź następująca: dane zdanie jest prawdziwe, gdy jest aksjomatem teorii lub posiada dedukcyjny dowód, którego przesłankami są aksjomaty. W za-

---

[1] Przegląd współczesnych stanowisk w filozofii matematyki można znaleźć m.in. w: M. Balaguer, *Platonism and Anti-Platonism in Mathematics*, Oxford–New York 1998; K. Wójtowicz, *Spór o istnienie w matematyce*, Warszawa 2003.

sadzie od czasów Euklidesa ta odpowiedź nie uległa zmianie, ale przeobrażało się rozumienie poszczególnych jej elementów, co wpływało na pojmowanie prawdziwości w matematyce. Ponieważ aksjomaty uznawane były za oczywiste, więc do XIX wieku matematyka była uważana za naukę o wiecznych, absolutnych prawdach. W XX w. odrzucono ten obraz matematyki; gwarantowana do tej pory przez oczywistość aksjomatów i metodę dedukcyjną pewność matematyki została zanegowana. Taki stan rzeczy spowodowany został nie tylko ogólnym „klimatem" w filozofii i kulturze XX wieku, w którym, jak pisze F. Fernández-Armesto: „prawda została pogrzebana na »cmentarzu pewności«, jak nazywam cywilizację braku zaufania, w której trudno być czegokolwiek pewnym"[2], lecz również rozwojem matematyki, zwłaszcza powstaniem geometrii nieeuklidesowych oraz teorii mnogości G. Cantora. Przede wszystkim powstanie geometrii nieeuklidesowych przyczyniło się do tego, że aksjomaty geometrii utraciły status oczywistych prawd o otaczającej człowieka przestrzeni fizycznej. Aksjomaty geometrii, a także innych teorii aksjomatyczno-dedukcyjnych, nie muszą już być oczywiste, a ich wybór może być arbitralny. Okazują się one być założeniami, które można zmieniać, konstruując np. różne rodzaje przestrzeni. Matematyka zaczyna być traktowana jako nauka hipotetyczno-dedukcyjna, w której mówi się „o prawdziwości okresu warunkowego, a nie zdania w postaci orzekającej"[3]. Z tego punktu widzenia nie ma sensu odwoływanie się do pewności i oczywistości aksjomatów, ważne jest tylko, by układ przyjmowanych aksjomatów był niesprzeczny. Ten obraz matematyki ugruntowały próby przezwyciężenia tzw. kryzysu w podstawach matematyki wywołanego m.in. powstaniem teorii mnogości Cantora. Programy logicyzmu, intuicjonizmu i formalizmu wprawdzie stawiały przed sobą zadanie oparcia matematyki na pewnych, niewzruszonych fundamentach, ale okazały się niemożliwe do zrealizowania. Co więcej, wbrew pierwotnym zamierzeniom, dokonania Hilberta doprowadziły do traktowania matematyki jako nauki formalnej. Przy takim podejściu prawdziwość

---

[2] F. Fernández-Armesto, *Historia prawdy*, tłum. z ang. J. Ruszkowski, Poznań 1999, 198.

[3] J. Musielak, *Prawda i istnienie w matematyce*, broszura, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 1996, 8.

sprowadza się do niesprzeczności formalnego systemu aksjomatyczno-dedukcyjnego. Nie ma już mowy o jakiejś obiektywnej prawdziwości twierdzeń matematycznych, ale wyłącznie o koherencji.

W XX wieku sformułowano różne koncepcje na temat istoty matematyki, w których prawdziwość została usunięta na margines bądź w ogóle zakwestionowana. Na przykład, w ujęciu formalistycznym matematyka jest traktowana jako język formalny bądź „gra" symbolami bez treści. Zamiast o prawdziwości mówi się o niesprzeczności systemu aksjomatyczno-dedukcyjnego, dla którego nie ma znaczenia treść przyjętych aksjomatów, gdyż liczą się tylko związki wynikania między formułami. Część filozofów z kolei matematykę porównuje do nauk przyrodniczych, a jej metody – do metod postępowania przyrodnika[4]. Przy takim podejściu twierdzenia matematyczne są traktowane jak hipotezy w naukach przyrodniczych. Zastosowanie komputerów do rozwiązywania problemów matematycznych sprawiło, że zwolennicy takiego traktowania matematyki uzyskali dodatkowe argumenty[5]. Wielu zwolenników ma też stanowisko głoszące, że matematyka jest elementem kultury, która w istotny sposób wpływa na jej rozwój[6]. W tym ujęciu prawdziwość twierdzeń zostaje uzależniona od kultu-

---

[4] Interesujące z tego względu są poglądy G. Pólya'i (G. Pólya, *Jak to rozwiązać? Nowy aspekt metody matematycznej*, tłum. z ang. L. Kubik, Warszawa 2009[3]; Tenże, *Mathematics and Plausible Reasoning*, vol. I: *Induction and Analogy in Mathematics*, Princeton–New Jersey 1954, vol. II: *Patterns of Plausible Inference*, Princeton–New Jersey 1954) oraz I. Lakatosa (I. Lakatos, *Proofs and Refutations. The logic of Mathematical Discovery*, red. J. Worrall, E. Zahar, Cambridge University Press 1976; Tenże, *Mathematics, science and epistemology*, *Philosophical Papers*, vol. 2, red. J. Worrall, G. Currie, Cambridge 1983).

[5] Zob. np.: A. Borel, *Mathematics: Art. and Science*, The Mathematical Intelligencer 5(1985)4, 9-17; P. J. Davis, *Fidelity in Mathematical Discource: Is One and One Really Two?*, The American Mathematical Monthly 79(1972)5, 252-263; T. Tymoczko, *The Four-Color Problem and Its Philosophical Significance*, w: *New Directions in the Philosophy of Mathematics*, red. T. Tymoczko, Boston-Basel-Stuttgart 1985, 243-266.

[6] Zob. np. R. L. Wilder, *Introduction to the Foundations of Mathematics*, New York-London-Sydney 1965; Tenże, *Kulturowa baza matematyki*, tłum. z ang. R. Murawski, w: *Współczesna filozofia matematyki. Wybór tekstów*, red. nauk. R. Murawski, Warszawa 2002, 275-292; J. Waszkiewicz, *O pewnych kulturowych uwarunkowaniach rozwoju matematyki*, Zagadnienia Naukoznawstwa 52(1977)4, 549-570.

ry i nabiera charakteru historycznego. Żadne jednak z tych stanowisk nie ujmuje w pełni istoty matematyki i nie rozwiązuje problemu prawdy. Na przykład stanowiska formalistyczne nie uwzględniają tego, że matematyka nie stanowi jakiegoś wyizolowanego obszaru wiedzy i jest w różnorodny sposób powiązana z rozmaitymi dziedzinami nauki, techniki i doświadczenia ludzkiego, a jak pokazują metamatematyczne twierdzenia limitacyjne, nie mieści się w ramach schematu formalistycznego. Również pojawienie się dowodów wspomaganych komputerowo podważa stanowisko formalistyczne. Ramy systemu formalnego stanowią w tym przypadku zbyt duże ograniczenie i uniemożliwiają uznawanie takich twierdzeń za pełnoprawne twierdzenia matematyczne. Z kolei porównania matematyki do nauk przyrodniczych zacierają jej specyfikę, a widzenie jej tylko jako jednego z elementów kulturowych nie uwzględnia jedności wiedzy matematycznej i jej niezależności od czasu i miejsca powstania. Zatem wprawdzie odpowiedzi na pytanie o kryteria uznawania zdań za prawdziwe w matematyce jest tyle, ile jest stanowisk w filozofii matematyki, ale problem prawdy w matematyce wydaje się być ciągle otwarty.

Różnorodność stanowisk w filozofii matematyki jest, być może, związana z tym, że matematyka stanowi rozbudowany dział wiedzy, bada bardzo różnorodne obiekty, jest w rozmaity sposób wykorzystywana przez inne nauki. Tę wieloaspektowość problematyki prawdy zilustruję na przykładzie sześciu następujących stwierdzeń matematycznych:

1. Dowolny nieskończony podzbiór zbioru liczb rzeczywistych jest albo równoliczny ze zbiorem liczb naturalnych, albo ze zbiorem liczb rzeczywistych.

2. Suma kątów w dowolnym trójkącie jest równa sumie dwóch kątów prostych.

3. Dla $n>2$ równanie: $x^n + y^n = z^n$ nie ma rozwiązania w liczbach całkowitych większych od zera.

4. Każda liczba naturalna parzysta większa od 2 jest sumą dwóch liczb pierwszych.

5. Każdą mapę normalną[7] można pokolorować za pomocą czterech barw.

6. 2+2=4.

Pierwsze zdanie jest to tzw. hipoteza *continuum*, postawiona w 1878 roku przez G. Cantora. W artykule została ona sformułowana tak, by dotyczyła podzbiorów zbioru liczb rzeczywistych, gdyż w tym przypadku jest bardziej konkretna, niejako uchwytna, ponieważ dotyczy własności czegoś, co wydaje się nam jakoś znajome i „namacalne"[8]. Jednak na pytanie o moce podzbiorów liczb rzeczywistych nie ma rozstrzygającej odpowiedzi. K. Gödel wykazał w 1938 roku, że hipoteza *continuum* jest niesprzeczna z aksjomatyczną teorią mnogości Zermelo-Fraenkla (ZF), a P. Cohen w pracy z 1963 roku skonstruował model dla teorii mnogości, w którym hipoteza *continuum* nie zachodzi. Zatem prawdziwość hipotezy *continuum* zależy od rozpatrywanego systemu. Mamy do czynienia z klasycznym niejako przypadkiem koherencyjnego rozumienia prawdziwości: nie ma sensu mówienie o prawdziwości hipotezy *continuum*, a tylko o niesprzeczności systemu, w którym jest przyjęta ta hipoteza. Mimo „namacalnego" charakteru zbioru liczb rzeczywistych, okazuje się, że część jego własności może być dowolnie mu przypisywana.

Drugie zdanie jest twierdzeniem geometrii euklidesowej i, jak wiadomo, jest równoważne tzw. piątemu postulatowi Euklidesa[9]. Po odkryciu geometrii nieeuklidesowych status tego zdania wydaje się być taki sam jak hipotezy *continuum*. Ujawnia się tu znowu koherencyjny charakter prawdy w matematyce. Ale w przypadku twierdzeń geometrycznych sprawa nie jest tak jednoznaczna, jak w przypadku teo-

---

[7] Mapa jest normalna, gdy granice państw nie redukują się do punktu, a terytoria państw są spójne.

[8] Hipotezę *continuum* (CH) formułuje się dla dowolnego zbioru mocy *continuum*. Sformułowano również uogólnioną hipotezę *continuum* (GCH), mówiącą, że dla żadnego zbioru nieskończonego A nie istnieje zbiór B, którego moc byłaby większa od mocy zbioru A, ale mniejsza od mocy zbioru potęgowego A.

[9] Piąty postulat sformułowany przez Euklidesa w *Elementach geometrii* brzmi: „Jeżeli dwie proste na płaszczyźnie tworzą z trzecią kąty jednostronne wewnętrzne o sumie mniejszej od dwóch kątów prostych, to te proste, po przedłużeniu, przetną się i to z tej właśnie strony". M. Kordos, *Wykłady z historii matematyki*, Warszawa 2005, 80.

rii mnogości. Można bowiem próbować wyjść poza ramy systemu aksjomatyczno-dedukcyjnego geometrii i do zbadania prawdziwości jej twierdzeń spróbować wykorzystać zastosowanie geometrii w fizyce. Odpowiedź fizyka na pytanie o geometrię przestrzeni fizycznej może mianowicie posłużyć do empirycznej weryfikacji bądź falsyfikacji tego (i innych) twierdzeń geometrii euklidesowej. W przypadku twierdzenia o sumie kątów w trójkącie wydaje się, że jest prosty test na sprawdzenie prawdziwości: można po prostu zmierzyć kąty w jakimś trójkącie i przekonać się, czy ich suma jest, czy nie jest równa sumie dwóch kątów prostych. Takie pomiary rzeczywiście wykonano i wynika z nich, że obszar przestrzeni bezpośrednio nas otaczającej jest prawie euklidesowy, a ewentualne różnice mieszczą się w granicach błędów pomiarowych. Zatem prawdziwość twierdzenia o sumie kątów w trójkącie nie tylko jest związana z niesprzecznością systemu aksjomatyczno-dedukcyjnego, ale w pewnym sensie potwierdzana przez doświadczenie.

W przypadku geometrii euklidesowej mamy do czynienia dodatkowo z następującą sytuacją. W codziennym funkcjonowaniu w przyrodzie rozpoznawanie relacji przestrzennych stanowi niezbędny warunek przeżycia. Toteż człowiek jako gatunek biologiczny został ewolucyjnie niejako wyposażony w rozpoznawanie „struktur geometrycznych" otaczającego go środowiska. Ponieważ przestrzeń tego środowiska jest prawie euklidesowa, więc te wrodzone struktury muszą odzwierciedlać własności tej właśnie przestrzeni, gdyż w przeciwnym przypadku człowiek miałby fałszywy obraz środowiska i nie mógłby w nim przeżyć[10]. Wprawdzie przedmiotem matematyki nie są materialne, przestrzenno-czasowe obiekty, dostrzegalne przez zmysły, ale niektóre z obiektów matematycznych, jak figury geometryczne, dają się reprezentować przez obiekty fizyczne. Toteż można mówić o pewnej

---

[10] Zwraca na to uwagę m.in. Konrad Lorenz, który stwierdza, że informacje, napływające ze środowiska, są przetwarzane w swoisty dla naszego gatunku sposób i „leżą u podstaw (apriorycznej) oglądowej formy trójwymiarowej przestrzeni «euklidesowej» i że wręcz s ą w pewnym sensie tą formą oglądu". K. Lorenz, *Odwrotna strona zwierciadła. Próba historii naturalnej ludzkiego poznania*, tłum z niem. K. Wolicki, Warszawa 1977, 43.

odpowiedniości między abstrakcyjnymi obiektami geometrii a przedmiotami materialnymi.

Co więcej, niektóre z własności figur geometrycznych w przestrzeni euklidesowej są dla nas oczywiste, natomiast własności w innym systemie geometrii przeczą naszym intuicjom. Stosunkowo łatwo wyobrazić sobie powierzchnie nieeuklidesowe, gdyż można je zanurzyć w euklidesowej przestrzeni trójwymiarowej, ale wyobrażenie naoczne trójwymiarowej przestrzeni nieeuklidesowej wydaje mi się niemożliwe. Być może, gdybyśmy żyli w pobliżu jakiejś czarnej dziury, to twierdzenia geometrii Euklidesa wydawałyby się nam dziwaczne i sprzeczne z naszymi intuicjami geometrycznymi, ale żyjemy w przestrzeni, której zakrzywienia nie jesteśmy w stanie dostrzec, toteż płaska przestrzeń euklidesowa jest dla nas naturalna. Czy zatem prawdziwość twierdzenia o sumie kątów w trójkącie nie jest w pewien sposób potwierdzana empirycznie, a tym samym można uznać, że istnieje również dodatkowa motywacja poza systemem aksjomatycznym niejako zmuszająca nas do uznania prawdziwości tego stwierdzenia?

Trzecie zdanie jest to tzw. wielkie twierdzenie P. de Fermata. Ma ono barwną i długą historię. Mianowicie po śmierci Fermata, na marginesie jego egzemplarza tłumaczenia *Arytmetyki* Diofantosa znaleziono notatkę następującej treści: „Wiadomo, że nie można rozłożyć sześcianu na dwa sześciany ani bikwadratu na dwa bikwadraty, ani żadnej potęgi, oprócz kwadratu, na dwie inne potęgi o takim samym wykładniku. Odkryłem prawdziwie cudowny dowód tego faktu, jednakże ten margines jest zbyt wąski, by go zmieścić”[11]. Ponieważ problem jest interesujący i łatwy do zrozumienia, matematycy (i nie tylko matematycy) usiłowali znaleźć ten dowód. Próby kończyły się niepowodzeniem, choć uzyskiwano częściowe wyniki. Nie udawało się też znaleźć żadnego kontrprzykładu. W wieku XX zastanawiano się nawet, czy nie jest to zdanie niezależne od aksjomatów arytmetyki Peano. Wreszcie w 1993 roku A. Wiles ogłosił dowód twierdzenia Fermata. Choć szybko znaleziono w tym dowodzie lukę, to w 1995 roku udało się ją zapełnić. Tym samym wielkie twierdzenie Fermata zostało udowodnione. Można więc powiedzieć, że jest prawdziwe. Akceptacja dowo-

[11] A. D. Aczel, *Wielkie twierdzenie Fermata. Rozwiązania zagadki starego matematycznego problemu*, tłum. z ang. P. Strzelecki, Warszawa 1998, 19.

du Wilesa oznacza zarazem uznanie, iż zaprzeczenie tego zdania jest fałszywe. Jednak dowód Wilesa uzupełniony przez R. Taylora korzysta z teorii krzywych eliptycznych[12], a więc odwołuje się do faktów wykraczających poza algebrę[13]. Problem dotyczy własności liczb naturalnych, jednak przy jego rozwiązaniu korzysta się z różnych działów matematyki, wyraźnie wychodząc poza ramy jakiegoś jednego ustalonego systemu aksjomatycznego, choć jest to dowód dedukcyjny i wykorzystywane są w nim tylko wcześniej już udowodnione twierdzenia, a więc znane matematykom fakty. Jest to zatem przykład zdania o niejako interteoretycznym charakterze. Da się wprawdzie odtworzyć wszystkie założenia, na których opiera się dowód, ale czy będą one wszystkie razem tworzyć „ładną" teorię matematyczną?

Warto zaznaczyć, że poszukiwania dowodu twierdzenia Fermata doprowadziły do rozwoju, oprócz teorii liczb, również algebry, topologii, analizy rzeczywistej i zespolonej. Można zatem na jego przykładzie pokazać jedność matematyki, powiązanie ze sobą różnych jej działów, a także, do pewnego stopnia, przekraczanie przez matematyków ograniczeń narzucanych metodą aksjomatyczno-dedukcyjną. Ta sytuacja jest typowa. Matematycy wykraczają poza ograniczenia narzucane przez aksjomaty jakiegoś systemu dedukcyjnego i w dowodach wielu istotnych dla matematyki twierdzeń wykorzystują wyniki uzyskane niekiedy w odległych obszarach matematyki. Matematycy, mając do rozwiązania jakiś problem, poszukują wszelkich możliwych sposobów jego rozwiązania, nie kłopocząc się zbytnio o to, by pozostawać w ramach jakiegoś ściśle określonego systemu aksjomatycznego[14]. Nie oznacza to zarazem, że „wszystkie chwyty są dozwolone". Standardy metody matematycznej są dobrze określone i tylko takie rozumowania, które je spełniają, są akceptowane przez matematyków.

---

[12] Ogólna postać równania krzywej eliptycznej: $y^2=ax^3+bx^2+c$, gdzie a, b, c są wymierne.

[13] O historii poszukiwania dowodu wielkiego twierdzenia Fermata zob. np.: A. D. Aczel, dz. cyt.; W. Narkiewicz, *Wielkie Twierdzenie Fermata*, Wiadomości Matematyczne 30(1993)1, 1-5; P. Ribenboim, *Wielkie twierdzenie Fermata dla laików*, tłum. z ang. J. Browkin, Warszawa 2001.

[14] R. Murawski, *Funkcje rekurencyjne i elementy metamatematyki. Problemy zupełności, rozstrzygalności, twierdzenia Gödla*, Poznań 1990, 173-174.

Może to zarazem świadczyć o tym, że przy rozpatrywaniu prawdziwości w matematyce poziom teorii i koherencyjna prawdziwość są niewystarczające. Konieczne jest bowiem całościowe ujmowanie wiedzy matematycznej, a nie dzielenie jej na poszczególne odizolowane od siebie teorie formalne. W przypadku twierdzenia Fermata trudno zatem mówić wyłącznie o prawdziwości w sensie koherencji. Przy jego dowodzie odwołujemy się bowiem do faktów z różnych dziedzin matematyki. Prawdziwość twierdzenia Fermata jest zatem ufundowana nie tyle przez doświadczenie, jak w przypadku twierdzeń geometrii euklidesowej, ale przez całość wiedzy matematycznej. Matematyka nie jest w tym przypadku dzielona na szereg teorii aksjomatyczno-dedukcyjnych, ale jawi się jako w znacznym stopniu zintegrowana dyscyplina wiedzy. Co więcej, wydaje się, że w przypadku twierdzenia Fermata jego prawdziwość ma charakter obiektywny, nie jest uwarunkowana tylko niesprzecznością jakiegoś systemu aksjomatyczno-dedukcyjnego.

Czwarte zdanie jest to tzw. hipoteza Ch. Goldbacha, sformułowana jeszcze w 1742 roku i głosząca, że każda liczba parzysta większa bądź równa cztery jest sumą dwóch liczb pierwszych[15]. Jest to jeden ze starszych problemów matematycznych dotychczas nierozwiązanych. Ponieważ ani nie została udowodniona, ani nie znaleziono dla niej kontrprzykładu[16], więc obecnie nie można stwierdzić, czy jest prawdziwa, czy fałszywa. Powstaje też interesujący filozoficznie problem, czy w ogóle jest sens stawiać pytanie o jej prawdziwość. Z jednej strony wydaje się, że ponieważ dotyczy ona własności liczb naturalnych, więc musi mieć dobrze określą wartość logiczną, a tylko jej na razie nie znamy. Z drugiej strony może to być zdanie niezależne od aksjomatów arytmetyki Peano, zatem jego status może być podobny, w pewnym sensie, do twierdzenia o sumie kątów w trójkącie.

---

[15] C. Goldbach w liście do Eulera wyraził następujące przypuszczenie: „Każda liczba całkowita $n>5$ jest sumą trzech liczb pierwszych". Euler odpowiedział, że jest to równoważne temu, że „każda liczba całkowita parzysta $2n\geq 4$ jest sumą dwóch liczb pierwszych". P. Ribenboim, *Mała księga wielkich liczb pierwszych*, tłum. z ang. J. Browkin, Warszawa 1997, 190.

[16] Dzięki komputerom obecnie wiadomo, że ewentualny kontrprzykład musiałby być liczbą co najmniej piętnastocyfrową.

Zdanie piąte to twierdzenie o czterech barwach. Pytanie, czy do pokolorowania każdej mapy wystarczy użyć tylko czterech kolorów postawił swemu bratu w 1852 r. F. Guthrie[17]. Jest to problem właściwie czysto praktyczny. Okazał się jednak interesujący dla matematyków. Stosunkowo łatwo jest pokazać, że każdą mapę da się pomalować za pomocą pięciu kolorów. Trywialny jest też przykład mapy, której nie da się pomalować przy użyciu tylko trzech barw. Natomiast próby udowodnienia, że cztery kolory są wystarczające, długo kończyły się niepowodzeniem. Podejmowali je m.in. A. Kempe, P.G. Tait. Jednak okazywało się, że w ich dowodach istniały luki. Poszukiwanie dowodu stawało się, podobnie jak w przypadku twierdzenia Fermata, impulsem do rozwijania nowych działów matematyki m.in. teorii grafów. Zagadnienie dotyczące mapy można bowiem przeformułować tak, by dotyczyło własności grafu. Dowód twierdzenia o czterech barwach został podany dopiero w 1976 r. przez K. Appela, W. Hakena, J. Kocha[18]. Dowód ten nie jest jednak „zwykłym" dowodem matematycznym, a w istotny sposób wykorzystuje się w nim komputer, który jest niezbędny, by sprawdzić prawie dwa tysiące konfiguracji, co bez jego udziału jest praktycznie niemożliwe. Czy można mieć jednak zaufanie do takiego dowodu? W dowodzie mogą być błędy mające różne źródła, m.in. w budowie komputera, w jego oprogramowaniu, w algorytmach służących do rozwiązania poszczególnych zagadnień, w programach, w pracy samego komputera. Sprawdzenie poprawności wszystkich tych elementów może odbyć się tylko za pomocą innego komputera oraz napisania innego programu. Taką próbę podjęli w 1996 r. czterej matematycy: N. Robertson, D.P. Sanders, P.D. Seymour, R. Thomas, którzy znaleźli nieco prostszy i szybszy algorytm sprawdzania poszczególnych przypadków[19]. Czy jednak usuwa to wszystkie wątpliwości w stosunku do tego dowodu? Matematycy bez

---

[17] O historii problemu czterech barw zob. np.: K. Appel, W. Haken, *Zagadnienie czterech barw*, tłum. z ang. J. Kucharczyk, w: *Matematyka współczesna. Dwanaście esejów*, red. L. A. Steen, Warszawa 1983,170-198.

[18] K. Appel, W. Haken, J. Koch, *Every Planar Map Is Four Colorable*, Illinois Journal of Mathematics 21(1977), 429-567.

[19] N. Robertson, D. P. Sanders, P. D. Seymour, R. Thomas, *A new proof of the four-colour theorem*, Electronic Research Announcements of the American Mathematical

większych oporów wykorzystują komputery przy dowodzeniu twierdzeń. Czy jednak prawdziwość takich twierdzeń, które zostały udowodnione przy udziale komputera, a których standardowych dowodów nie ma, można tak samo traktować jak prawdziwość twierdzeń, które zostały udowodnione w sposób tradycyjny? Czy możemy być przekonani o prawdziwości twierdzenia o czterech barwach?

Szóste zdanie z kolei jest jedną z podstawowych prawd arytmetyki. Często jest przytaczane jako przykład zdania ilustrującego pewność wiedzy matematycznej. Czy w tym przypadku jest w ogóle sens mówić o prawdziwości w sensie koherencyjnym? Oczywiście, na to zdanie można spojrzeć jak na twierdzenie pewnego systemu aksjomatyczno-dedukcyjnego, na przykład arytmetyki Peano. Ale przeciwnie niż w przypadku dwóch pierwszych zdań, nie istnieje żaden system arytmetyki, w którym dwa dodać dwa byłoby różne od czterech. Jeżeli w jakimś systemie algebraicznym używamy tych samych symboli co w arytmetyce i na przykład uzyskujemy, że 2+2=1, to znaczy to tylko tyle, że inaczej rozumiemy te symbole, na przykład zamiast „zwykłego" dodawania mamy do czynienia z dodawaniem modulo 3, a więc znak „+" co innego znaczy niż w arytmetyce liczb naturalnych. Zdanie: 2+2=4 jest dla każdego, kto rozumie występujące w nim symbole, oczywiste. Prawdziwość jego zatem znowu ma inne źródło niż tylko spójność określonego systemu. Co więcej, choć można konstruować inne geometrie, to konstruowanie innych „arytmetyk", w których liczby naturalne, te nasze „prawdziwe" liczby naturalne, miałyby inne własności, nie jest możliwe, gdyż konstrukcja kolejnych liczb naturalnych przez dodawanie jedynki do liczby poprzedniej wyznacza tzw. standardowy model[20] dla arytmetyki liczb naturalnych.

Society 2(1996), 26-33, http://www.ams.org/journals/era/1996-02-01/ pozyskano 25.02.2010.

[20] Intuicyjnie model standardowy danej teorii matematycznej jest to dziedzina takich przedmiotów matematycznych, które są uważane za „prawdziwe" obiekty opisywane przez tę teorię. Dla arytmetyki liczb naturalnych model standardowy tworzą liczby naturalne konstruowane począwszy od zera przez kolejne dodawanie jedynki. Z kolei dla liczb rzeczywistych model standardowy może być skonstruowany przez podanie definicji liczby rzeczywistej, odwołującej się do pojęcia liczby naturalnej. Z reguły jest tak, że nawet gdy istnieje model standardowy, to teoria posiada również

Arytmetykę liczb naturalnych można oczywiście przedstawić w postaci formalnej teorii aksjomatyczno-dedukcyjnej. Co więcej, z twierdzenia Gödla wynika, że istnieją w niej zdania nierozstrzygalne, będą także istniały dla niej modele niestandardowe. We wszystkich takich modelach jednak istnieje część standardowa, do której należą standardowe liczby naturalne, czyli „prawdziwe liczby naturalne", mające dokładnie te same własności, co w modelu standardowym. Z tego punktu widzenia liczby niestandardowe są czymś sztucznym, nienaturalnym. Zatem szczególne miejsce, które zajmują w matematyce liczby naturalne, zdaje się też leżeć u podstaw przekonania o prawdziwości tego typu zdań co: 2+2=4. Gdy rozumie się znaczenie poszczególnych symboli występujących w tym równaniu, musi się uznać, że stwierdza ono faktyczny stan rzeczy. Mamy zatem do czynienia z prawdą nieobalalną, obiektywną, niezależną od jakichkolwiek uwarunkowań, w szczególności od jakiegoś systemu aksjomatyczno-dedukcyjnego.

W matematyce mamy zatem do czynienia z różnymi „rodzajami prawdziwości" zdań: od zdań typu hipotezy *continuum*, której nie można przypisać obiektywnej prawdziwości, do niepodważalnych prawd arytmetyki. Przyjęcie bądź odrzucenie zdania typu hipotezy *continuum* jest uzależnione od celu, jakiemu ma służyć teoria. Egzystują więc niejako obok siebie różne „światy matematyczne" o odmiennych własnościach. W tym kontekście nie można mówić o prawdzie obiektywnej. Z tego punktu widzenia ani hipoteza *continuum*, ani twierdzenie o sumie kątów w trójkącie nie są obiektywnie prawdziwe. Można mówić o ich niesprzeczności z określonym układem formuł bądź o prawdziwości w danym modelu. Wprawdzie w przypadku hipotezy *continuum* Cantor sądził, że musi istnieć jakiejś jej rozstrzygnięcie, miał bowiem intuicyjne wyobrażenie tego, czym jest zbiór[21], co miało stanowić dla

---

wiele modeli niezamierzonych, niestandardowych. Często ich elementy i sama struktura modelu odbiegają istotnie od intuicji, które wiąże się z elementami należącymi do modelu standardowego.

[21] G. Cantor pisał: „Przez pojęcie »zbioru« rozumiemy każde zebranie w jedną całość M określonych, dobrze odróżnionych przedmiotów m naszego oglądu czy naszych myśli (które nazywane są »elementami« M) (...) każdy ogół określonych elementów, które na mocy prawa mogą być złączone w jedną całość". Cyt. za: R. Murawski, *G. Cantora filozofia teorii mnogości*, Studia Filozoficzne 11-12(1984), 212-213.

niego podstawę dla rozstrzygnięcia prawdziwości hipotezy *continuum* i innych tego rodzaju zdań. Okazuje się jednak, że te intuicje są niewystarczające. Przeciwnie niż w przypadku arytmetyki liczb naturalnych czy geometrii euklidesowej nie istnieje żaden standardowy model dla teorii zbiorów. W tym przypadku nie pomaga też, analogiczne jak w przypadku liczb naturalnych, „konstruowanie" uniwersum zbiorów, na przykład przez stosowanie operacji brania zbioru potęgowego i operacji sumy zbiorów[22]. Oczekiwania Cantora nie mogą być zatem zrealizowane i w przypadku hipotezy *continuum* pozostajemy na poziomie tylko relatywnej, koherencyjnej prawdziwości. Można badać tylko jej prawdziwość w konkretnych modelach teorii mnogości. W matematyce istnieją zatem takie dziedziny, które nie są w pełni określone ani przez teorię, ani model. W tym przypadku prawdziwość jest rzeczywiście względna, zależy od użyteczności rozpatrywanego zdania w danej sytuacji[23]. Jednak już w odniesieniu do twierdzenia o sumie kątów w trójkącie poprzestanie tylko na koherencji systemu geometrii byłoby zbytnim uproszczeniem. Twierdzenie to jest konsekwencją postulatów geometrii euklidesowej, które dla nas są oczywiste. Oczywisty jest również piąty postulat. W systemach geometrii nieeuklidesowych suma kątów w trójkącie będzie większa lub mniejsza od sumy dwóch kątów prostych. Takie stwierdzenia jednak będą sprzeczne z naszą intuicją geometryczną. Zatem uznanie zdania drugiego za obiektywnie prawdziwe, a nie tylko za niesprzeczne z pozostałymi aksjomatami geometrii Euklidesa, ma swe podstawy w naszym doświadczeniu.

Prawdziwość w matematyce może być zatem ufundowana również przez odniesienie do rzeczywistości przyrodniczej. Związek z empirią jest widoczny w całej historii matematyki, a początki wiedzy matematycznej są zakorzenione w praktycznych problemach, które niosło ze

---

[22] W teorii mnogości można „skonstruować" następującą hierarchię zbiorów indeksowaną liczbami porządkowymi: $V_0=\emptyset$, $V_{\alpha+1}=P(V_\alpha)$, $V_\lambda=\bigcup_{\alpha<\lambda} V_\alpha$, dla liczb porządkowych λ granicznych.

[23] Matematycy częściej przyjmują hipotezę *continuum* niż jej negację. Wszystkie podzbiory zbioru liczb rzeczywistych, które są w jakichś sposób konstruowane czy opisywane, są bądź przeliczalne, bądź mocy *continuum*. Przykłady zbiorów o mocach pośrednich można podać, konstruując wyrafinowane modele matematyczne. Ten fakt zapewne skłania do przyjmowania hipotezy *continuum*.

sobą codzienne życie. Bardzo często konieczność rozwiązywania rozmaitych problemów, które pojawiały się w naukach przyrodniczych, stawała się bodźcem do rozwijania nowych teorii matematycznych. Tworząc nową teorię, matematycy raczej nie zaczynają od wyboru aksjomatów. Gromadzą najpierw pewien zasób wiedzy, opierając się na oczywistych, wielokrotnie sprawdzonych faktach. Dopiero z czasem wiedza ta jest porządkowana w postaci systemu dedukcyjnego. Koherencyjne rozumienie prawdziwości pojawia się zatem dopiero na późnym etapie rozwoju matematyki.

Na odniesieniu do empirii, wydaje się, że gruntuje się również intuicja matematyczna, doświadczenie matematyczne, stanowiące swoiste kryterium wyboru prawd matematycznych. Intuicja tworzyła się w trakcie „manipulowania" przez matematyków obiektami matematycznymi. W znacznym zakresie doświadczenie matematyczne jest wspólne wszystkim ludziom. Nie zależy od uwarunkowań kulturowych, języka itp. Stanowi zarazem regulator pozwalający uzyskać poprawny wynik, nawet w tych sytuacjach, gdy od strony formalnej pozostawia on wiele do życzenia.

W niektórych sytuacjach zatem prawdziwość twierdzenia może być w pewnym stopniu dostępna naszemu poznaniu zmysłowemu. Mamy więc do czynienia z nowymi aspektami zagadnienia prawdziwości w matematyce. Wprawdzie przedmiotem matematyki nie są materialne, przestrzenno-czasowe obiekty, dostrzegalne przez nasze zmysły, ale niektóre z obiektów matematycznych, jak figury geometryczne, dają się reprezentować przez obiekty fizyczne. Innymi przykładami takich obiektów matematycznych mogą być tabele, grafy, diagramy reprezentujące m.in. działania, relacje czy morfizmy. Możliwość dostrzeżenia na graficznym przedstawieniu pewnych zależności sprawia, że niektóre z nich stają się dla nas oczywiste, że niejako zostajemy zmuszeni do uznania prawdziwości stwierdzeń o nich mówiących. Istnieją również uzasadnienia twierdzeń za pomocą obrazowej reprezentacji[24]. W tym przypadku te twierdzenia jawią się jako pewne i niewymagające już żadnych dodatkowych uzasadnień.

[24] Istnieje na przykład kilka tego typu dowodów twierdzenia Pitagorasa. Szerzej zob. A. Lemańska, *Zagadnienie obrazowości niektórych rozumowań w matematyce*, w: *Logiczne podstawy rozumowań III*, red. J. Mrozek, Gdańsk 2003, 110-125.

Wykorzystywanie komputerów przy dowodzeniu twierdzeń stawia problem prawdziwości w jeszcze innym świetle. Wchodzi się bowiem w problem istoty samego dowodu matematycznego, a dokładniej, rodzaju przesłanek, na których można się opierać. W tego typu dowodach przyjmuje się bowiem założenia dotyczące sprawności urządzenia pomagającego matematykowi, a więc wykraczające wyraźnie poza dziedzinę matematyki. Analogiczne uwagi można poczynić w stosunku do dowodu twierdzenia Fermata. Choć jest to dowód tradycyjny i można go sprawdzić krok po kroku, to wykorzystywana jest w nim wiedza matematyczna jako pewna całość bynajmniej nie rozpatrywana jako aksjomatyczna teoria. W obu tych jednak przypadkach problem leży niejako po stronie samego sposobu uzasadnienia (dowodu) twierdzeń, a nie ich prawdziwości. Warto dodać, że nie wydaje się możliwe, by w jakimś „rozsądnym" systemie aksjomatyczno-dedukcyjnym równanie $x^n + y^n = z^n$ dla $n>2$ miało rozwiązania naturalne, a do pomalowania jakiejś mapy nie wystarczyły cztery barwy.

Twierdzenie Fermata nie jest z punktu widzenia naszego doświadczenia oczywiste. Dowód twierdzenia również nie jest prosty. Wykorzystuje się w nim wiele faktów z innych dziedzin niż arytmetyka liczb naturalnych. Niemniej w tym przypadku jednak jest do czego odnosić prawdziwość tego twierdzenia: istnieje bowiem model standardowy liczb naturalnych, czyli ciąg kolejnych liczb, z których następna powstaje z poprzedniej przez dodanie jedynki. Jest zatem sens pytać, czy wśród tak określonych liczb istnieją czy też nie istnieją liczby naturalne: m, k, l oraz n większe od dwóch, spełniające równanie: $m^n+k^n=l^n$. To pytanie jest dobrze postawione w tym sensie, że musi mieć jednoznaczną odpowiedź. Podobnie wydaje się być odnośnie do hipotezy Goldbacha, choć w jej przypadku nie znamy odpowiedzi. Mamy tu do czynienia z odmienną sytuacją niż w przypadku hipotezy *continuum*. Na pytanie o istnienie zbioru o mocy pośredniej między mocą zbioru liczb naturalnych a rzeczywistych odpowiedź jest zaskakująca: hipoteza *continuum* jest zdaniem niezależnym od aksjomatów teorii mnogości Zermelo-Fraenkla, nie istnieje dla tej teorii model standardowy, a więc na to pytanie nie można udzielić jednoznacznej odpowiedzi.

Prawdziwość zaś zdania szóstego ma charakter absolutny, nie zależy bowiem ani od jakiegoś systemu formalnego, ani od zewnętrznych w stosunku do matematyki uwarunkowań, jak np. kultura. Wszędzie tam, gdzie ludzie liczą i rozumieją treść tego zdania jest ono uważane za prawdziwe. Warto dodać, że w przypadku zdań: trzeciego, czwartego i szóstego matematycy mają przed sobą pewien świat obiektów matematycznych – liczby naturalne – i ten świat starają się zbadać przez poznanie jego właściwości i zależności między obiektami w nim się znajdującymi. Jeżeli przyjmuje się obiektywne, niezależne od matematyka, istnienie tego świata, to matematyk staje się odkrywcą, zaś do formułowanych przez niego stwierdzeń daje odnieść się klasyczne rozumienie prawdy: twierdzenia matematyczne muszą oddawać faktyczny stan rzeczy, zachodzący w świecie liczb naturalnych.

Dostatecznie złożone teorie aksjomatyczne z reguły są teoriami niezupełnymi. Istnieją zatem zdania, które nie mają w nich dowodu. W przypadku, gdy istnieje standardowy, zamierzony model tej teorii, prawdziwość bądź fałszywość zdań niezależnych można stwierdzić, badając, jak jest w tym modelu. W tym sensie mówi się, że z pierwszego twierdzenia Gödla wynika istnienie zdań prawdziwych, które nie mają dowodu. Arytmetyka Peano rzędu pierwszego jest niezupełna, ale ma model standardowy, teoria mnogości Zermelo-Fraenkla również jest niezupełna, ale nie istnieje dla niej model standardowy, który stanowiłby odniesienie dla prawdziwości zdań niezależnych.

Ściśle formalistyczne ujęcie matematyki nieuchronnie prowadzi do relatywnego rozumienia prawdy, gdyż nie ma tu jakiegoś zewnętrznego, poza teorią, poza systemem aksjomatyczno-dedukcyjnym, punktu odniesienia. Jednak takie spojrzenie na matematykę, w którym pomija się treść teorii, rozumienie i prawdziwość zdań, jest niewystarczające. Dla matematyka ważna bowiem jest przede wszystkim treść rozpatrywanych zdań. Może się ona ujawniać w modelu standardowym, który daje możliwość porównania treści formuły z rzeczywistością matematycznych obiektów. W nieco inny sposób treść twierdzenia ujawnia się w przypadku twierdzenia Fermata. Tu w sposób pośredni odwołujemy się do własności standardowych liczb naturalnych, zarazem dowód tego twierdzenia pokazuje powiązania między różnymi obiektami matematycznymi.

Jednym z centralnych twierdzeń metamatematycznych jest twierdzenie głoszące, że teoria jest niesprzeczna wtedy i tylko wtedy, gdy posiada model. Modelem jest pewien system relacyjny, a prawdziwość formuły jest zdefiniowana przez relację spełniania Tarskiego. Potocznie przyjmuje się, że definicja prawdy Tarskiego określa w matematyce klasyczne (arystotelesowskie) rozumienie prawdziwości. Można zatem uważać, że do matematyki daje się odnieść i to rozumienie prawdziwości. Często jest też i tak, że matematycy mają poczucie odkrywania jakichś prawd obiektywnych o rzeczywistości matematycznej, toteż część z nich przyjmuje platoński obraz matematyki, a z nim również prawdziwość w klasycznym sensie.

W zależności zatem od aspektu wiedzy matematycznej, na który zwracamy w danym momencie szczególną uwagę, do matematyki da się odnieść rozmaite rozumienia prawdziwości oraz wykorzystać różne kryteria prawdziwości: klasyczne, koherencyjne, pragmatyczne i inne[25]. W zależności od tego, do czego w danej sytuacji służy wiedza matematyczna, będzie ona ukazywać inny aspekt prawdy. Problem jednak wydaje się głębszy niż tylko uzależnienie interpretacji prawdziwości od przyjętych rozwiązań dotyczących istoty wiedzy matematycznej i jej zastosowań.

W matematyce prawda zatem ujawnia różne swe oblicza. Do pewnych zdań w niej przyjmowanych można odnosić tylko prawdziwość w sensie koherencyjnym, ale istnieją w niej też i takie zdania, jak na przykład prawdy arytmetyki, które są prawdziwe absolutnie, niezależnie od systemów aksjomatycznych, kultury czy jakichś innych czynników. Matematyka jest nauką obiektywną, w pełni intersubiektywnie sprawdzalną. Wiedza matematyczna ma również charakter kumulacyjny, co oznacza, że przyjęte twierdzenia są nieobalalne. I chociaż do pewnych zdań w niej przyjmowanych można odnosić tylko prawdziwość w sensie koherencyjnym, nie oznacza to, że prawda jest względna. Koherencja bądź odniesienie do modelu nie sprawiają, że prawda zatraca swój obiektywny charakter.

---

[25] Szerzej zob.: A. Lemańska, *Kilka uwag o zagadnieniu prawdy w matematyce*, Studia Philosophiae Christianae 38(2002)2, 117-126.

TRUTH AND MATHEMATICS

Summary

In the article the problem of truth in mathematics is presented by the example of the six following statements:

1. The continuum hypothesis.
2. The sum of angles in any triangle is equal to the sum of two right angles.
3. For n>2 there isn't a natural solution of the equation: $x^n + y^n = z^n$.
4. Every even natural number greater than 2 is the sum of two primes.
5. Every map could be coloured with four colours.
6. 2+2=4.

The analyses carried out in the article show that in mathematics truth can be understood in various manners. We can use different criteria of truth: classical, coherence, pragmatic and others, so in mathematics truth is revealing different faces. Certain sentences are true only in a sense of coherence, but there exist such sentences, as for example truths of arithmetic, which are true independently of axiomatic systems, culture or any other factors.