Robert Podkoński

"Jak Arystoteles z Euklidesem..." : dowody matematyczne w filozofii oksfordzkiej XIV wieku

Studia Warmińskie 4142, 113-123

2004/2005

Robert PODKOŃSKI
Uniwersytet Łódzki

Studia Warmińskie
XLI–XLII (2004–2005)

„JAK ARYSTOTELES Z EUKLIDESEM...” DOWODY MATEMATYCZNE W FILOZOFII OKSFORDZKIEJ XIV WIEKU

Arystoteles matematykiem nie był. Nauka ta pozostawała raczej na marginesie jego zainteresowań. Poza wspomnianą przez Diogenesa Laertiosa, zaginioną rozprawą *O matematyce*[1] nie poświęcił jej żadnej osobnej pracy. W swoich dziełach zawarł pewne uwagi odnoszące się do matematyki, jednak znaczna większość z nich znajduje się w księgach logicznych i dotyczy głównie zagadnienia miejsca tej nauki pośród innych[2]. Euklides natomiast nie był filozofem przyrody. Jego najsłynniejsze dzieło — *Elementy*, to wyczerpujący, systematyczny wykład wiedzy geometrycznej podsumowujący trzysta lat działalności matematyków greckich. Co istotne, Euklides wyraźnie odrzucił myśl o jakimkolwiek odniesieniu geometrii do rzeczywistości przyrodniczej, nawet — co wydawałoby się oczywiste — w praktyce mierniczej[3].

Nie znaczy to, że gdyby Euklides miał okazję spotkać Arystotelesa, to nie mieliby wspólnych tematów dla naukowej dyskusji. Dyskusja ta jednak — co na podstawie powyższych stwierdzeń można przyjąć z dużą pewnością — nie przyniosłaby żadnych zmian w postrzeganiu świata i przydatności matematyki do jego opisu, zarówno przez jednego, jak i przez drugiego z wymienionych geniuszy nauki starożytnej. Albowiem tylko w odniesieniu do jednego faktu można mówić o bezpośrednim związku pomiędzy myślą Arystotelesa a dziełem Euklidesa. Metoda wykładu zastosowana w *Elementach*, jak podkreślają historycy nauki[4], wydaje się być pierwszym konsekwentnym zastosowaniem w praktyce zasad konstrukcji systemu aksjomatycznego i dedukcyjnego przedstawionych przez Arystotelesa w *Analitykach wtórych*[5]. Bezzasadnym byłoby natomiast, jak sądzę, oczekiwać od autora *Elementów* uwag odnoszących się do filozofii Arystotelesa. Historia jednak potoczyła się tak, że na przełomie trzynastego i czternastego wieku w Oksfordzie twierdzenia matematyczne, zawarte w najsłynniejszym dziele Euklidesa stawały się argumentami już to potwierdzającymi, już to zaprzeczającymi arystotelesowskie opinie w filozofii przyrody, by ostatecznie stać się podstawowym elementem nowego sposobu opisywania świata.

---

[1] D. Laertios, Żywoty i poglądy słynnych filozofów, Warszawa 1988, s. 267.
[2] R. Murawski, Filozofia matematyki — zarys dziejów, Warszawa 2001, s. 26.
[3] Tamże, s. 31.
[4] Tamże, s. 28; G.E.R. Lloyd, Nauka grecka po Arystotelesie, Warszawa 1998, s. 45–46.
[5] Arystoteles, Analityki wtóre, 76a–77a, ks. I, rozdz. 10, w: Arystoteles, Dzieła wszystkie, przekł. K. Leśniak, t. 1, Warszawa 1990, s. 269–271.

Jest to fakt zaskakujący choćby dlatego, że Arystoteles wielokrotnie w swoich pismach zastrzegał, by nie wykorzystywać twierdzeń i zasad jednej nauki w obrębie innej, a szczególnie silnie zalecana była przezeń separacja fizyki i nauk matematycznych[6]. Dopuszczał on, co prawda, zastosowanie geometrii w dowodach twierdzeń z zakresu mechaniki lub optyki oraz reguł arytmetyki w harmonice, były to jednak jedyne wyjątki od wspomnianej przed chwilą reguły[7]. Większość filozofów średniowiecznych także uznawała to arystotelesowskie zastrzeżenie za obowiązujące. Nawet ci, którzy, jak Kilwardby czy Bacon, podkreślali, że matematyki należy się uczyć przed fizyką, ponieważ jest ona niezbędna dla zrozumienia tej ostatniej, nie sprowadzali przyrodoznawstwa do matematyki[8]. Podobnie uważał także Robert Grosseteste, którego teoria struktury wszechświata zwana czasem *metafizyką światła*[9] najlepiej ze wszystkich powstałych w średniowieczu nadawałaby się do matematyzacji, a ściślej — „geometryzacji". Wszak uznanie światła za podłoże i pierwotne tworzywo wszechświata oznacza w zasadzie przyjęcie, ściśle geometrycznych w swej strukturze, praw optyki jako rządzących światem, podstawowych praw natury[10]. Grosseteste sprzeciwiał się jednak redukcji filozofii przyrody do optyki, a tej do geometrii. Przyjmował on, że istnieją dwa sposoby dowodzenia: pierwszy daje wiedzę pewną, demonstratywną, dotyczącą przyczyn *(propter quid)* i jest możliwy do osiągnięcia na gruncie matematyki; drugi pozostaje w obrębie fizyki i rozpatrując skutki działania przyczyn, może dostarczyć tylko wiedzy niepewnej i prawdopodobnej *(quia)*. Mimo tego, że geometria jest metodą gwarantującą osiągnięcie wiedzy pewnej, Grosseteste nie upierał się, by odwoływać się do niej musiała każda refleksja nad przyrodą[11].

Wielu historyków myśli średniowiecznej twierdzi, że matematyka zadomowiła się na dobre w filozofii przyrody dzięki najsłynniejszemu chyba czternastowiecznemu filozofowi oksfordzkiemu, Wilhelmowi Ockhamowi. Rzeczywiście, modyfikując nieco arystotelesowską hierarchię nauk w swojej *Sumie logicznej*, zmienił on całkowicie rolę i znaczenie matematyki dla całości wiedzy. O ile Arystoteles tylko wyjątkowo dopuszczał wyjaśnienia i dowody matematyczne w obrębie astronomii, optyki i harmoniki, broniąc całkowitej autonomii pozostałych nauk szczegółowych[12], o tyle Ockham uznał, że każdą naukę wolno całkowicie lub częściowo

[6] Tamże, 75a–75b, ks. I, rozdz. 7, jw., s. 267–268; t e n ż e, Metafizyka, 1077b–1078a, ks. M (XIII), rozdz. 3, w: A r y s t o t e l e s, Dzieła wszystkie, jw., t. 2, Warszawa 1990, s. 825–826; t e n ż e, Fizyka, 193b–194a, ks. II, rozdz. 2, w: A r y s t o t e l e s, Dzieła wszystkie, t. 2, jw., s. 47–48.

[7] A r y s t o t e l e s, Analityki wtóre, 76a, ks. I, rozdz. 9, jw., s. 269.

[8] A.C. C r o m b i e, Nauka średniowieczna i początki nauki nowożytnej, t. I, Warszawa 1960, s. 97–98.

[9] S. S w i e ż a w s k i, Dzieje europejskiej filozofii klasycznej, Warszawa – Wrocław 2000, s. 577; U. E c o, Sztuka i piękno w średniowieczu, Kraków 1994, s. 77.

[10] R. G r o s s e t e s t e, O liniach, kątach i figurach, albo o załamaniu i odbiciu promieni, w: M. B o c z a r, Grosseteste, Warszawa 1994, s. 140–145.

[11] E. J u n g-P a l c z e w s k a, Między filozofią przyrody a nowożytnym przyrodoznawstwem. Ryszard Kilvington i fizyka matematyczna w średniowieczu, Łódź 2002, s. 87; A.C. C r o m b i e, jw., t. II, Warszawa 1960, s. 32.

[12] Zob. przypis 7 powyżej.

podporządkować w ten sposób arytmetyce lub geometrii[13]. Z drugiej strony, tak jak ogromna większość filozofów średniowiecznych, Wilhelm Ockham wskazywał, iż matematyka i fizyka są odrębnymi naukami, jako że rozważają różne twierdzenia dotyczące różnych przedmiotów i różnych własności. Co więcej, w jego opinii astronomia, optyka i harmonika są dużo bliższe fizyce niż matematyce — co pozwala nam stwierdzić, że Ockham przyjmował mimo wszystko wzajemne rozróżnienie nauk w duchu ściśle arystotelesowskim i nie zamierzał wykorzystywać praw arytmetyki ani geometrii w wyjaśnianiu przyrody[14]. Świadczyć o tym mogą także jego pisma, w których nie znajdziemy nic na temat astronomicznych modeli matematycznych czy zastosowania arytmetyki w teorii muzyki. Nawet, kiedy Ockham wprowadzał rozważania natury geometrycznej, to skupiał się na kwestiach logicznych bądź ontologicznych a nie na wykorzystaniu tej nauki w fizyce[15].

Nietrudno zauważyć, że dowody i twierdzenia geometryczne pojawiają się w średniowiecznej oksfordzkiej filozofii przyrody wcześniej niż rewolucyjne teorie Ockhama. Impulsem dla przywołania argumentów natury *stricte* matematycznej stała się, rozpoczęta pod koniec trzynastego wieku dyskusja na temat struktury wielkości ciągłych, w terminologii średniowiecznej określanych mianem *continua*. Niektórzy z ówczesnych filozofów — jak Henryk Harclay, Walter Chatton czy Gerard Odo — przyjmowali, że wszystkie substancje materialne składają się ze skończonej według jednych, nieskończonej wedle innych, liczby bezwymiarowych *atomów*[16]. Zaprzeczyli oni tym samym twierdzeniu z VI księgi *Fizyki* Arystotelesa, wedle którego wszelkie *continua są podzielne na części podzielne, to znaczy podzielne w nieskończoność*[17]. Znakomita większość filozofów tamtego okresu akceptowała opinię Arystotelesa w tej kwestii, starając się wykazać, że „atomiści” propagują fałszywy obraz rzeczywistości. Jednym z najwybitniejszych uczestników tego sporu był Jan Duns Szkot. Właśnie w jego pismach odnajdziemy geometryczne argumenty skierowane przeciw współczesnemu mu atomizmowi. Dla przykładu, gdybyśmy w kwadracie — dowodził Szkot — którego boki składałyby się z „atomów”, poprowadzili linie równoległe od każdego z „atomów” zawartych w jednym z boków tego kwadratu do każdego z „atomów” zawartych w boku przeciwległym, to wówczas musimy przyjąć, że poprowadzone w ten sposób linie przechodzą przez tyle „atomów” zawartych w przekątnej tego kwadratu, ile zawarte jest w dowolnym z boków owego kwadratu. Tym samym musielibyśmy zaprzeczyć jednemu z podstawowych twierdzeń matematyki, że przekątna kwadratu jest niewspółmierna w stosunku do jego boków. Zdaniem Johna Murdocha, Jan Duns Szkot swoje argumenty zapożyczył głównie z *Metafizyki* Al-Ghazalego[18]. Nato-

---

[13] Gulielmus Ockham, Summa logicae, III, ii, c. 21 [Opera Philosophica 1.541] — fragment ten pominięty jest w polskim tłumaczeniu „Sumy logicznej” Ockhama (Wilhelm Ockham, Suma logiczna, Warszawa 1971); S.J. Livesey, William of Ockham, The Subalternate Sciences, and Aristotle’s Theory of metabasis, *British Journal for the History of Science* 18(1985), s. 138–139.

[14] A. Goddu, Ockham’s Philosophy of Nature, w: The Cambridge Companion to Ockham, P.V. Spade (ed.), Cambridge University Press 1999, s. 151.

[15] Tamże, s. 143–144.

[16] J.E. Murdoch, Infinity and Continuity, w: The Cambridge History of Later Medieval Philosophy, N. Kretzmann, A. Kenny, J. Pinborg (eds.), Cambridge University Press 1982, s. 575–576.

[17] Arystoteles, Fizyka, 232b, ks. VI, rozdz. 2; jw., s. 134.

[18] J.E. Murdoch, jw., s. 579.

miast kolejni przeciwnicy „atomistów" niemal natychmiast włączyli do swoich tekstów twierdzenia zaczerpnięte wprost, bądź pozostające pod bezpośrednim wpływem *Elementów* Euklidesa. Skonstruowany jako ciąg geometrycznych argumentów przemawiających przeciw atomizmowi *Tractatus de continuo* Tomasza Bradwardine, jednego z założycieli szkoły tzw. Oksfordzkich Kalkulatorów, jest najdoskonalszym tego przykładem[19].

Od samej treści dowodów geometrycznych przywoływanych przez tychże filozofów bardziej istotne jest tutaj kryjące się za nimi założenie. Rozumowali oni w sposób następujący: przyjęcie, że wszelkie wielkości ciągłe składają się z „atomów" pociągałoby za sobą uznanie pewnej liczby praw geometrii za fałszywe. To jest niemożliwe, a zatem „atomizm" musi być odrzucony[20]. Skoro zaś wniosek ten był powszechnie uznawany za wiążący, znaczy to, że zarówno czternastowieczni filozofowie wykorzystujący twierdzenia Euklidesa przeciw „atomistom", jak i sami „atomiści" przyjmowali bezpośredni i ścisły związek praw geometrii z rzeczywistością fizykalną.

Trzeba tutaj podkreślić, że żaden z odwołujących się do Euklidesa czternastowiecznych filozofów oksfordzkich nie uznawał, że byty matematyczne konstytuują świat rzeczywisty. Co więcej, przyjmowali oni powszechnie punkt widzenia Arystotelesa, wedle którego byty te istnieją tylko w intelekcie, jako wyabstrahowane z realnych substancji fizycznych[21]. Tak pojęty związek pomiędzy rzeczywistością fizykalną a geometrią pozwalał im jednakże na w pełni uzasadnione wykorzystywanie praw geometrii w argumentacjach odnoszących się do filozofii przyrody. Jak bowiem wskazywał współczesny Ockhamowi filozof oksfordzki Walter Burley, zarówno w fizyce, jak i w geometrii dowody wyprowadzane są z przesłanek prawdziwych. A skoro — jak twierdził Arystoteles[22] — związki logiczne pomiędzy twierdzeniami matematyki mają charakter konieczny, trudno byłoby utrzymywać, iż zachodzi sprzeczność pomiędzy rzeczywistością a geometrią[23]. Tym bardziej, że ta ostatnia jest we wspomniany wyżej sposób wtórna wobec świata przyrody.

Tym sposobem filozofowie oksfordzcy w początkach czternastego wieku odnaleźli uzasadnienie dla tego, by — w pewnym sensie wbrew Arystotelesowi — wykorzystywać twierdzenia geometryczne zawarte w *Elementach* Euklidesa jako argumenty w dziedzinie filozofii przyrody. Co więcej, twierdzenia te w większości przypadków miały służyć wsparciu tradycyjnych, arystotelesowskich poglądów na strukturę rzeczywistości. Tylko jeden z czternastowiecznych oksfordczyków w swoich rozważaniach na temat *continuum* odważył się przeciwstawić Euklidesa autorytetowi Arystotelesa.

Ryszard Kilvington, bo o nim tutaj mowa, należał do pokolenia młodszego od Ockhama i Burleya. Jego nazwisko wymienia się często wraz z nazwiskiem Tomasza Bradwardine, jako założycieli tzw. szkoły Oksfordzkich Kalkulatorów. Przyjmuje się, że przedstawiciele tej szkoły jako pierwsi w historii powszechnie

[19] Tamże.
[20] J.M. Thijssen, Buridan on Mathematics, *Vivarium* XXIII: 1985, nr 1, s. 56.
[21] Tamże, s. 74.
[22] R. Murawski, jw., s. 27.
[23] J.M. Thijssen, jw., s. 71.

wykorzystywali metody matematyczne w swoich filozoficznych rozważaniach, nie tylko z dziedziny fizyki[24]. Ryszard Kilvington tak, jak wielu jego poprzedników i współczesnych mu filozofów oksfordzkich przedyskutował problem struktury wielkości ciągłych. Uczynił to jednak nieco inaczej niż pozostali. Po pierwsze, kwestię zatytułowaną: *Utrum continuum sit divisibile in infinitum*[25] zawarł on w swoim komentarzu do *De generatione et corruptione*, podczas gdy zazwyczaj rozważano ten problem komentując *Fizykę* Arystotelesa[26]. Po drugie — i jest to dla nas bardziej istotne — Kilvington przywoływał argumenty i prawa matematyczne zaczerpnięte z *Elementów* Euklidesa po to, aby w toku swojego wywodu zaprzeczać twierdzeniom Arystotelesa. Jest to fakt na tyle wyjątkowy i interesujący z punktu widzenia historii czternastowiecznej filozofii oksfordzkiej, że warto — jak sądzę — poświęcić temu tekstowi nieco więcej uwagi.

Kwestia Ryszarda Kilvingtona *Utrum continuum sit divisibile in infinitum* ma typową, scholastyczną strukturę. Bezpośrednio po pytaniu rozpoczynającym kwestię następuje w niej kolejno dwanaście bardziej lub mniej rozbudowanych argumentów zasadniczych *(argumenta principalia)* mających wykazać, iż *continuum* nie jest podzielne w nieskończoność. Dalej autor krótko stwierdza, że tej opinii sprzeciwiają się twierdzenia Arystotelesa zawarte w I księdze *O powstawaniu i ginięciu*, w I księdze *O niebie i świecie*, VI księdze *Fizyki*, oraz wiele innych[27]. Następnie, także pokrótce, rozwiązuje kwestię, dokonując rozróżnienia na *continuum per se* i *continuum per accidens* i stwierdzając, że odpowiedź na podstawowe pytanie kwestii dla *continuum* pierwszego rodzaju będzie przecząca, zaś dla *continuum* drugiego rodzaju — twierdząca[28]. Tekst kwestii kończą odpowiedzi na argumenty zasadnicze. Chociaż sam sposób rozwiązania kwestii jest także bardzo interesujący, obecnie skupię się jedynie na argumentach *quod non*, w ponad połowie których autor przywołał dowody bądź twierdzenia euklidesowej proweniencji.

Pierwszy z argumentów zasadniczych kwestii *Utrum continuum sit divisibile in infinitum* to dość długa i skomplikowana dyskusja oparta głównie na twierdzeniach zaczerpniętych z *Elementów* Euklidesa. Wedle Kilvingtona wynika z nich, że przy założeniu podzielności *continuum* w nieskończoność możliwe staje się wyrażenie

[24] E. Jung-Palczewska, Procedura *secundum imaginationem* w czternastowiecznej filozofii przyrody, w: Księga pamiątkowa ku czci Profesora Zdzisława Kuksewicza, E. Jung-Palczewska (red.), Łódź 2000, s. 57, 64; zob. także: E. Sylla, Oxford Calculators, w: The Cambridge History of Later, jw., s. 540–563.

[25] Ricardus Kilvington, Utrum continuum sit divisibile in infinitum, Ms. Paryż, BN. lat. 6559, f. 89ra–97vb.

[26] J.M. Thijssen, jw., s. 56.

[27] Ricardus Kilvington, jw., f. 95 ra: „Ad oppositum est Aristoteles primo De generatione in principio et primo De coelo et mundo, et 6 Physicorum, et in multis aliis locis”.

[28] Tamże: „Ad rationem quando quaeritur et cetera dico quod continuum est duplex sicut quantum, quia aliquod est continuum per se et aliquod per accidens. Continuum per se est illud quod per se est quantum et illud est tale quod habet divisiones quae sunt accidentia sua. Alio modo sumitur continuum per accidens et sic dicimus quod albedo est continuum. Divisibile etiam accipitur dupla. Uno modo pro illo cuius partes possunt actualiter dividi sive separari per divisionem. Alio modo pro eo quod habet partes quae possunt separari ab invicem sive per divisionem sive non, et sic dicimus quod coelum est continuum et non divisibile quia partes eius non possunt ab invicem separari. Sed primo modo accipiendo continuum et hoc modo continuum qualitercumque intelligendo quaestionem universaliter quaestio est falsa, accipiendo secundo modo quaestio est vera”.

wartości proporcji pomiędzy długościami obwodów okręgów o różnych średnicach, a nawet przyrównanie ich do prostego odcinka o określonej długości[29]. To jednak, jak dalej zauważył autor kwestii, jest sprzeczne z opinią Arystotelesa, który w swojej *Fizyce* autorytatywnie stwierdził, że linie prosta i kolista nie mogą być ze sobą porównywane[30]. Mimo to, Kilvington w toku dyskusji nadal próbuje znaleźć sposób pozwalający na przyrównanie dowolnej linii krzywej do prostej. Nawiązał tutaj także, jak się wydaje, do rozważań Wilhelma Ockhama zawartych w jego *Expositio* do *Fizyki*, gdzie ten ostatni wykazywał, że wyprostowana lina nie jest ani krótsza ani też dłuższa od niej samej zwiniętej spiralnie[31]. Podobnie Kilvington stwierdził, że krzywe można nawzajem do siebie porównywać po ich wyprostowaniu. To założenie jednak także uznał za sprzeczne z przywołaną wcześniej opinią Arystotelesa. Stwierdziwszy to Kilvington przechodzi nagle na wyższy poziom refleksji filozoficznej i zauważa, że mówiąc o równości Stagiryta ma na myśli równość *per se*, czyli identyczność danych substancji, zaś powyższa dyskusja dotyczyła równości *per accidens*, to jest równości jedynie w odniesieniu do długości. Lecz takie postawienie sprawy, jak zauważył dalej nasz autor, zmusza nas do przyjęcia, że w matematyce pewien wniosek nie jest prawdziwy *per se*, a tylko *per accidens* — a tego uznać nie można, bo dowody matematyczne mają charakter konieczny i wypływają z koniecznych przesłanek[32]. Dalej, w końcowej części pierwszego argumentu zasadniczego, Kilvington wykazuje nadto, że matematyka sprowadza substancję do kategorii wielkości, co jest nie do przyjęcia na gruncie arystotelesowskiej filozofii przyrody[33]. W ten sposób autor nasz występuje niejako

---

[29] Tamże, f. 89ra: „Et probo quod non, quia tunc circumferentia circuli cum sit continua esset divisibilis in infinitum. Et cum aliqua circumferentia sit dupla ad suam medietatem, et etiam eadem circumferentia est dupla ad aliam circumferentiam cuius dyameter sit subdupla ad dyametrum primae circumferentiae; igitur medietas primae circumferentiae est aequalis toti alteri circumferentiae. Consequentia patet per secundam partem 9 conclusionis 5 Euclidis quae est ista: aliquarum quantitatum ad unam proportio una si vero unius ad eas proportio una ipsas esse aequales ex qua secunda parte patet consequentia".

[30] Tamże: „Et hoc non [est], quia est contra Aristotelem et Commentatorem 5 Physicorum commento 44 et 45 ubi dicunt quod linea recta non potest superponi circulari vel curvae et cetera"; zob. Arystoteles, Fizyka, 248b, ks. VII, rozdz. 4, jw., s. 162.

[31] A. Goddu, jw., s. 153.

[32] Ricardus Kilvington, jw., f. 89 rb: „Aliter dicitur quod a et b sunt aequalia quia a et b si essent rectificata forent aequalia. Contra; si a et b illo modo forent aequalia, igitur duae lineae quarum una est recta et altera circularis. Consequens est falsum et contra Commentatorem 5 Physicorum commento preallegato. Nec potest dici quod Aristoteles et Commentator loquantur de aequalitate per se, et sic verum est quod a et b non sunt aequalia, sed sunt aequalia per accidens. Contra; quia hoc dato sequitur quod mathematicus concluderet unam conclusionem quae non est vera per se sed per accidens. Quod non est verum, quia demonstrationes mathematicae sunt maxime necessarie et ex necessariis".

[33] Tamże: „Item arguitur: si a et b cum rectificatae fuerunt sunt aequales, et cum non sint aequales nisi per longitudinem, igitur a et b erunt aequaliter longae, et tunc linea esset longitudo et longitudo longa et quantitas quanta. Sed probo quod non, quia capio aliquod corpus quantum, tunc si quantitas illius corporis sit quanta, igitur aliquod quantum est quantitas illa et aliquod quantum est illa substantia, igitur in idem quantum est substantia et quantitas vel aliud quantum est substantia et aliud quantum est quantitas. Si primo modo, sequitur quod substantia sit quantitas, sicut patet per similem expositionem in 3ª figura sic arguendo: hoc quantum est substantia, hoc quantum est quantitas; igitur substantia est quantitas. Cuius oppositum dicit Commentator 4 capitulo De vacuo commento 60 illius libri, et primo Physicorum commento 15, ubi probat Aristoteles plura esse sic arguendo: substantia est et quantitas,

przeciwko, powszechnie przyjmowanej przez wielu filozofów czternastowiecznych, ścisłej odpowiedniości dowodów geometrycznych i fizykalnych.

Nie przeszkadza mu to jednak wykorzystywać dowodów opartych na twierdzeniach Euklidesa lub samych tych twierdzeń w kolejnych argumentach zasadniczych kwestii *Utrum continuum sit divisibile in infinitum.* W trzecim argumencie, dla przykładu, Kilvington przywołał Euklidesa po to, by wykazać, że przy przecięciu prostą ramion dowolnego trójkąta długość podstawy uzyskanego w ten sposób trójkąta pozostaje w dokładnie tej samej proporcji do długości podstawy trójkąta wyjściowego, co długość ramion skonstruowanego tak trójkąta względem długości ramion trójkąta wyjściowego[34]. Dowód ten także wykorzystany jest jako część większej argumentacji, którą tutaj pominę, skierowanej przeciw twierdzeniu Arystotelesa, wedle którego niemożliwy jest aktualnie nieskończony podział kontinuum[35].

Ryszard Kilvington przywołał twierdzenia i konstrukcje geometryczne jeszcze w kilku innych argumentach zasadniczych omawianej kwestii[36]. Szczególnie interesujący jest tutaj — i moim zdaniem warty przedstawienia — jedenasty, przedostatni z tychże argumentów. Kilvington wykazywał w nim, że założenie o nieskończonej podzielności *continuum* zmusza nas do przyjęcia wniosku, który stoi w wyraźnej sprzeczności z jednym z twierdzeń Euklidesa. Ściśle mówiąc, autor nasz dowodził, że jeśli uznamy nieskończoną podzielność dowolnego *continuum* to musimy się zgodzić, iż dzielony w nieskończoność może być także dowolny kąt łukowy (tj. kąt zawarty pomiędzy łukiem okręgu a styczną do tego łuku prostą), co zaprzecza twierdzeniu z III księgi *Elementów*[37].

Ten argument ostatecznie przekonuje, że dla Kilvingtona różne opinie tego samego autora, obojętne czy to będzie Euklides, czy Arystoteles, mogą być nawzajem sprzeczne — przynajmniej w odniesieniu do struktury *continuum.* Widzimy bowiem, że w toku omawianej tutaj kwestii zarówno fragmenty *Elemen-*

---

igitur plura sunt; quod argumentum non valeret si substantia esset quantitas; por. tamże, f. 89 va: et sequitur ex alia parte quod si aliquod quantum sit substantia et aliquod quantum accidens, sequitur quod in eodem loco erunt duo quanta aequalia quorum utrumque sit corpus, et sequitur quod duo corpora erunt in eodem loco praecise — quod est contra Aristotelem primo De generatione, capitulo De augmentatione”.

[34] Tamże, f. 90ra–90rb: „Duae lineae cum praedicto dyametro causant unum triangulum qui sit bcd, ut patet in figura. Capio tunc aliam lineam rectam secantem bd et cd per latera aequalia, qua linea est ef. Quo posito arguo sic: bc linea est dupla ad ef lineam, quod probo sic: quia ef linea secat duo latera bd [et c]d de triangulo bcd per aequalia, igitur est aeque distans bc. Consequentiam probo per secundam partem 2 conclusionis 6 Euclidis, quae est ista: si linea recta alicuius trianguli latera secans reliquo lateri fuerit aeque distans illa duo latera proportionaliter secare necesse est. Si vero proportionaliter secet reliquo lateri aeque distante necesse est. Et tunc ultra per secundam partem 24 conclusionis primi Euclidis erit angulus e trianguli efd aequalis angulo b trianguli bcd et etiam angulus f aequalis angulo c et cum d sit communis utroque sequitur quod [angulis] efd sunt aequales angulis bcd ex quo conclusio 4ª 6 Euclidis sequitur quod qualis est proportio bd ad ed talis erit bc ad ef. Sed bd ad ed dupla est per casum, igitur bc duplum est ad ef, quod est probandum”.

[35] Tamże, f. 90 vb: „Contra istam responsionem est Aristoteles 3 Physicorum, ubi dicit quod divisio mensuratum inter duas medietates et medietatis in duas medietates est processus infinitus in potentia et non in actu.

[36] Tamże, f. 91rb–92ra, f. 92rb, 94rb–94va.

[37] Tamże, f. 94 vb: „Si quaestio sit vera, aliquis angulus contingentiae sit divisibilis in infinitum. Consequens falsum et contra 16 conclusionem 3 libri Euclidis”.

tów, jak i dzieł Arystotelesa, pojawiają się już to w celu potwierdzenia nieskończonej podzielności *continuum*, już to jej zaprzeczenia. Wydaje się wręcz, że celem Kilvingtona było raczej wskazanie i przedyskutowanie wszystkich tego rodzaju sprzeczności. Możemy zatem przyjąć, że autor nasz nie miał zamiaru ustalić, jak jest w rzeczywistości, a raczej chciał usunąć te sprzeczności poprzez uściślenie terminów i pojęć — i tak pomyślane jest rozwiązanie omawianej tutaj kwestii[38]. Wszakże gdyby tekst ten traktować jako głos Kilvingtona w odniesieniu do „atomizmu"[39], to nie bylibyśmy w stanie określić, czy jego zdaniem prawa geometrii potwierdzają, czy raczej są sprzeczne z opiniami Arystotelesa w dziedzinie filozofii przyrody. Musielibyśmy także przyjąć, że sam Kilvington dopuszczał niespójności w swoim wywodzie, gdy postawiwszy w wątpliwość wykorzystywanie dowodów matematycznych w obrębie filozofii przyrody już na samym początku dyskusji dalej kilkakrotnie się do takich dowodów odwołał.

Wspominany już tutaj rówieśnik Kilvingtona, Tomasz Bradwardine w swoim traktacie *De continuo* także zastanawiał się nad zasadnością przywoływania praw i dowodów geometrycznych w dyskusjach na temat struktury wielkości ciągłych. Co ciekawe, najpierw rozprawił się on z „atomistami" tradycyjnie wykorzystując przeciw ich opiniom argumenty zaczerpnięte z *Elementów* Euklidesa, by następnie stwierdzić, że takie postępowanie może być nieuczciwe. Zauważył bowiem, że nieskończona podzielność wszelkich wielkości wydaje się być jednym z podstawowych założeń geometrii[40]. Jeśliby tak było, to każdy odwołujący się do argumentacji geometrycznych przeciwko „atomizmowi" dopuszczałby w swoich wywodach błędne koło. Bradwardine w omawianym tutaj traktacie wykazał ostatecznie, że wszystkie twierdzenia geometrii obowiązywać będą także wtedy, gdy przyjmiemy złożenie każdej wielkości z pewnego rodzaju „atomów", przez co — w swojej opinii — usunął wyżej wspomnianą wątpliwość[41]. Jednak kolejni myśliciele czternastowieczni, pomimo powyższych ustaleń Tomasza Bradwardine, twierdzili już wprost, że wykorzystywanie argumentów geometrycznych przeciwko „atomizmowi" obarczone jest błędem *petitio principii*[42]. W ten sposób, wydawać by się mogło, ostatecznie zaprzeczona została możliwość zastosowania praw i twierdzeń zawartych w *Elementach* Euklidesa w odniesieniu do arystotelesowskiej filozofii przyrody.

Czternastowieczni oksfordzcy filozofowie przyrody jednakże wykorzystywali swoją wiedzę matematyczną nie tylko w dyskusjach na temat struktury *continuum*. Dlatego, chociaż powoływanie się na *Elementy* Euklidesa na tym ostatnim polu refleksji filozoficznej stało się wątpliwe, w innych dziedzinach ówczesnej filozofii

[38] Zob. przypis 28 powyżej.

[39] Warto zwrócić także uwagę na to, że w omawianej tutaj kwestii Kilvington nie odwołał się nigdzie do twierdzeń któregokolwiek z czternastowiecznych „atomistów", ani nawet nie przywołał ich nazwisk.

[40] J.E. Murdoch, Mathesis in philosophiam scholasticam introducta. The Rise and Development of the Application of Mathematics in Fourteenth Century Philosophy and Theology, w: Arts Libéraux et philosophie au Moyen Âge, Actes du Quatrième Congrès International de Philosophie Médiévale, Montréal – Paris 1969, s. 219.

[41] J.E. Murdoch, Infinity and continuity, jw., s. 580.

[42] J.M. Thijssen, jw., s. 61–62.

przyrody wiedza matematyczna zawarta w tym dziele zdobywała coraz większą popularność. Mam tutaj na myśli tak zwany rachunek kalkulacyjny, którego stosowanie w filozofii zapoczątkowali właśnie Ryszard Kilvington i Tomasz Bradwardine. Rachunek taki, wykorzystujący teorię proporcji z V księgi *Elementów* Euklidesa, odnajdziemy także w jednym z argumentów zasadniczych przywoływanej wcześniej kwestii Kilvingtona. Za pomocą proporcji autor wykazywał w nim, że to samo ciało będzie się poruszać szybciej przy większym oporze ośrodka niż przy mniejszym, mimo że wartość siły napędzającej to ciało nie zmieni się[43]. Zaprzeczał tym samym twierdzeniu Arystotelesa, wedle którego prędkość ciała jest wprost proporcjonalna do siły na nie oddziałującej i odwrotnie proporcjonalna do oporu jaki stawia temu ciału ośrodek[44]. W kwestii *Utrum continuum sit divisibile in infinitum* rachunek proporcji pojawia się jednakże tylko incydentalnie i ma niewielkie znaczenie dla całości rozważań. Na większą uwagę zasługuje tutaj jego zastosowanie przez Kilvingtona w kwestiach dotyczących *Fizyki* Arystotelesa. Stosując konsekwentnie teorię proporcjonalności Ryszard Kilvington ostatecznie zastąpił w nich arystotelesowskie równania ruchu nowymi, w jego opinii poprawnie opisującymi zależności pomiędzy szybkością poruszającego się ciała a wartościami oddziałujących na nie sił i oporów[45].

---

[43] R i c a r d u s K i l v i n g t o n, jw., f. 90vb–91ra: „Item, aliqua est linea divisa per partes habentes talem proportionem qualis est dyametris ad costam, ut patet quia capto dyametro aliquo quadrati convenit sibi addere lineam aequalem costae eiusdem quadrati, et sis sic igitur quaelibet linea potest dividi in partes habentes talem proportionem qualis est dyametri ad costam. Probo consequentiam per 13 conclusionem 6 Euclidis, quae est ista: duabus lineis proportionatis altera in divisa parte indivisa ad modum divisae dividetur, ex qua sequitur bonitas consequentiae. Capio tunc aliquam lineam divisam in a et b; et sit a sicut costa et b sicut dyameter, et subiungatur 3ª linea eis in continua proportione, quae sit c, et quod haec contingat patet per 11 conclusionem 6 Euclidis, quae est ista: datis duabus lineis 3ᵃᵐ eis in continua proportione coniugere. Quo posito arguo sic: talis est proportio a ad b sicut b ad c, igitur proportio a ad c est proportio c ad b duplicata. Consequentia patet per 20 suppositionem 6 Euclidis, quae est ista: cum fuerunt 3 quantitates proportionales proportio primae ad tertiam est proportio primae ad secundam duplicata. Et tunc arguo sic: si proportio a ad c sit proportio duplicata ad b, igitur proportio a ad b est minor proportione a ad c — quod est impossibile, cum b et c sint duae quantitates aequales, ut comparantur ad a, igitur non est maior proportio c ad a quam b ad a etenim quod maior erit proportio a ad b quam a ad c probo per 8ᵃᵐ conclusionem 5 Euclidis, quae est ista: si duae quantitates inaequales ad unam quantitatem proportionantur maiorque maiorem, minorque minorem continebit proportionem, illius [quantitatis] posita ad illas ad minorem quidem proportio maior ad maiorem proportio minor, ex qua patet quod maior est proportio a ad b quam a ad c.

Et per idem potest probari quod aliquod movetur velocius per maiorem resistentiam quam per minorem, ceteris paribus [...]. Quo posito probo primam consequentiam tam in motibus naturalibus quam in motibus violentis, quia posito quod aliquod ignis agat in aliquam aquam, sit proportio sesquialtera, et capio excedentem primum ignem sic quod proportio primi ignis ad secundum sit sicut proportio sexquialtera, et pono quod a sit aqua et b minor ignis, et c maior ignis. Quo posito arguo sic: talis est proportio a ad b sicut b ad c, igitur proportio a ad c est dupla respectu proportionis a ad b, cum a possit transmutare tam b quam c per rarefactionem, igitur a velocius transmutabit c quam b. Consequentia patet per Commentatorem commento 61, ubi dicit quod proportio motus ad motum est sicut proportio unius motoris ad rem motam et ad proportionem alterius motoris reliqui ad reliquum motum, et cum a ad c sit duplicata respectu proportionis a ad b, igitur a velocius transmutabit c quam b, et c est maioris resistentiae quam b, igitur et cetera".

[44] A r y s t o t e l e s, Fizyka, 250a–250b, ks. VII, rozdz. 5, jw., s. 165–167.

[45] E. J u n g-P a l c z e w s k a, Między filozofią przyrody, jw., s. 93–99.

Nowe reguły ruchu, jak i zastosowanie teorii proporcjonalności w rozważaniach z zakresu filozofii przyrody rozpowszechnił Tomasz Bradwardine rozpoczynając tym samym działalność tzw. szkoły Oksfordzkich Kalkulatorów. Późniejsi przedstawiciele tej szkoły stosowali „kalkulacje”, czyli teorię proporcjonalności nie tylko w fizyce w odniesieniu do ruchu lokalnego, lecz także w dziełach z zakresu etyki czy teologii[46]. Trzeba tutaj podkreślić, że prawa matematyki zawarte w *Elementach* Euklidesa nie były dla nich prawami rządzącymi rzeczywistością, a jedynie prawami ustalającymi zależności pomiędzy stosunkami liczbowymi odnoszącymi się do wartości natężenia takiej bądź innej cechy danej substancji. Teoria proporcjonalności zaś stała się językiem formalnym pomocnym przy opisie przemian zachodzących w świecie fizycznym. I tutaj nie sposób zaprzeczyć wpływowi teorii głoszonych przez Wilhelma Ockhama. Po pierwsze, dokonując redukcji metafizyki uwolnił on filozofów przyrody od konieczności poszukiwania niewidzialnych przyczyn odpowiedzialnych za zjawiska i skupił ich uwagę na badaniu samych zjawisk[47]. Po drugie, wszelkie zmiany, również jakościowe, sprowadził do postaci funkcji lokalnego ruchu części danej substancji fizycznej[48]. To pozwala także zrozumieć, dlaczego dla następców Ockhama tak istotne były rozważania dotyczące ruchu. Skoro zaś sam Arystoteles, formułując swoje prawa ruchu odwoływał się do teorii proporcji,[49] nie powinno dziwić nikogo powszechne wykorzystywanie rachunku kalkulacyjnego przez tych filozofów.

Przyjęcie zasad nominalizmu Ockhama przez czternastowiecznych filozofów oksfordzkich sprawiło ponadto, że fizyka i inne nauki szczegółowe stały się naukami spekulatywnymi, w których dowody *a priori* miały większą wartość od innych sposobów opisywania świata[50]. Jedyne kryteria prawdziwości wniosków w tego rodzaju dowodach to niesprzeczność logiczna i poprawność wynikania. Teoria proporcjonalności spełniała te dwa kryteria doskonale, a zatem mogła być, i była wykorzystywana jako narzędzie formalizacji dowodów w obrębie filozofii. W oparciu o wyżej wspomniane kryteria Ryszard Kilvington skonstruował także kwestię *Utrum continuum sit divisibile in infinitum*. One też w połączeniu z konsekwentnie zastosowaną teorią proporcjonalności doprowadziły go do ustalenia nowych, odmiennych od arystotelesowskich, równań ruchu[51], a jego następców do dokonania rzeczy, wydawałoby się, niemożliwej — wprowadzenia i stosowania matematyki w niemal całej sferze zagadnień fizycznych sformułowanych przez Stagirytę. W ten sposób teorie matematyczne zawarte w dziele Euklidesa stały się ostatecznie w czternastowiecznym Oksfordzie językiem filozofii przyrody.

---

[46] Tamże, s. 285.
[47] Tamże, s. 22.
[48] A. G o d d u, jw., s. 149.
[49] A r y s t o t e l e s, Fizyka, 250a, ks. VII, rozdz. 5, jw., s. 166.
[50] E. J u n g-P a l c z e w s k a, jw., s. 269.
[51] Tamże, s. 76.

„WHEN ARISTOTLE MET EUCLID...” MATHEMATICAL ARGUMENTS IN FOURTEENTH CENTURY OXFORD PHILOSOPHY

ABSTRACT

In his writings, Aristotle forbade taking advantage of mathematical theorems and arguments within the realm of physics many times. The majority of medieval philosophers honoured this restriction. However, one can find strictly geometrical arguments in the works of the fourteenth century Oxford thinkers. A few English philosophers assumed then that all material substances are composed of indivisibles. The theories of „atomists” contradicted commonly accepted opinion of Aristotle that *every continuum is divisible into divisible parts, that is, infinitely divisible*. In order to prove „atomism” false some Oxford philosophers applied Euclidean arguments and theorems in their works. Their line of reasoning was as follows: if we accepted that any continuum was composed of indivisibles, we should admit that certain theorems of geometry are incorrect. This is impossible, therefore „atomism” must be rejected. Since both „atomists” and the philosophers who used Euclidean theorems against them found the above consequence sound, it means that they all recognized a strict equivalence between theorems of geometry and physical world.

In most cases, medieval philosophers used geometrical arguments in order to support the traditional, Aristotelian view. Only one of early fourteenth century Oxford philosophers, Richard Kilvington contrasted Euclidean geometry and Aristotelian opinions about continuum. Yet Kilvington, in his question *Utrum continuum sit divisibile in infinitum* intended neither to refute, nor to approve „atomism”. Rather he wanted to eliminate all the contradictions between Aristotle's and Euclid's theories; and in the above-mentioned question mathematics plays a role similar to logic. This is an intellectual heritage of Ockham, whose reduction of metaphysics caused physics and other sciences to became speculative sciences, where *a priori* argumentations are recognized as better than any other way of describing the world. Since then, consistence and logical coherence of arguments were found as the criteria of correctness of conclusions. Euclidean geometry, especially the theory of proportions from book V of „Elements” fulfilled those criteria perfectly, therefore Ockham's followers started to use mathematics as a kind of formal language of philosophical argument.

Employing consequently the Euclidean theory of proportions, Richard Kilvington determined new „rules of motion”, more proper — in his opinion — than the Aristotelian ones. This way Kilvington and his contemporary, Thomas Bradwardine, became this way the founders of the so called Oxford Calculators school — the group of the fourteenth century English philosophers, who applied Euclidean theory of proportions to almost all disciplines of Aristotelian philosophy.