STUDIA Z TEORII
WYCHOWANIA
TOM VIII: 2017 NR 4(21)

Aleksander Gemel
Uniwersytet Łódzki

Od metafory do matematyki
Kognitywna teoria metafory a model nabywania dokładnych reprezentacji numerycznych

Wprowadzenie

Termin „metafora" zwykle wywołuje w nas skojarzenia z poezją, z niekonwencjonalnym i niecodziennym użyciem języka, zarezerwowanym dla okazji w których jak mawiał Wittgenstein „język świętuje"[1]. Pomijając komunikaty poetyckie, metafory używamy głównie wtedy gdy to co chcemy przekazać wymyka się procesowi potocznej komunikacji, lub treść jest trudnej do bezpośredniej eksplikacji natury, gdy – by znowu użyć określenia Wittgensteina – chcemy wykroczyć poza granice naszego języka, a przynajmniej tego konwencjonalnego. To przekonanie przez bardzo długi czas było podsycane przez naukę o języku i literaturze, w której funkcjonował ostry podział na poetycki, metaforyczny język figuratywny oraz codzienny i dosłowny język literalny. W zgodzie z tym klasycznym ujęciem wypowiedzią drugiego rodzaju byłoby np. zdanie *Jan wpadł na ciekawy pomysł,* zaś zdanie *Janowi wykluł się w głowie ciekawy pomysł* stanowiłoby jego wariant metaforyczny.

Na tym tle dość ciekawie rysuje się pogląd szeroko rozpowszechniony na gruncie językoznawstwa kognitywnego, zgodnie z którym metaforyczne jest również nie tylko pierwsze z powyższych zdań, lecz również większość naszych codziennych wypowiedzi i naszego systemu pojęciowego. Jak dobitnie ujmują to Georg Lakoff i Mark Johnson:

> „Dla większości ludzi metafora jest środkiem wyobraźni poetyckiej i ozdobą retoryczną, a więc czymś niezwykłym, co w języku

[1] L. Wittgenstein, *Dociekania filozoficzne*, przeł. B. Wolniewicz, PWN 2000, s. 32.

> codziennym się nie pojawia. (...) My zaś, przeciwnie, odkrywamy obecność metafory w życiu codziennym, nie tylko w języku, lecz też w myślach i czynach. System pojęć, którymi się zwykle posługujemy, by myśleć i działać, jest w swej istocie metaforyczny"[2].

Jeżeli Lakoff i Johnson mają rację i metafora faktycznie obecna jest niemal na każdym kroku naszej mentalnej aktywności, to czy również proces edukacyjny daje się opisywać w jej kategoriach?; a co z wiedzą naukową? Czy również ona, a w szczególności wiedza matematyczna, może zostać uznana za efekt aktywności metaforycznej?

Celem tego tekstu jest pośrednio próba odpowiedzi między innymi na te pytania. Bezpośrednio zaś poruszanym problemem jest pytanie czy teoria metafory pojęciowej może nam pomóc rozwiązać – cały czas nierozstrzygnięty – problem nabywania przez dzieci podstawowych reprezentacji matematycznych tj. dokładnych reprezentacji numerycznych? Plan tekstu wygląda następująco: w pierwszej części tekstu przedstawię kognitywną teorię metafory oraz kilka związanych z nią problemów, zwłaszcza tych dotyczących statusu wiedzy matematycznej. W części drugiej zaproponuję wzbogacenie teorii Lakoffa i Johnsona o teorie wiedzy rdzennej, które pozwala uniknąć wzmiankowanych teoretycznych trudności. Dalej skupię się na opisie postulowanych przez zwolenników teorii wiedzy rdzennej przed -pojęciowych systemach reprezentacji liczebności. W części trzeciej zarysuję problemy teorii nabywania podstawowych reprezentacji wiedzy rdzennej autorstwa Susan Carey. Wreszcie w części ostatniej zaproponuję koneksjonistyczny model nabywania dokładnych reprezentacji liczbowych przez dzieci, w którym została wykorzystana wcześniej zmodyfikowana teoria Lakoffa.

Kognitywna teoria metafory i jej problemy

Najogólniej rzecz ujmując kognitywna teoria metafory stanowi swoisty językowy mechanizm konceptualizacji, tj. pojęciowej reprezentacji treści mentalnych. Formalnie sprowadza się on do relacji odwzorowania pomiędzy elementami dwóch domen poznawczych (tj. uporządkowanych obszarów wiedzy), które można opisać w kategorii funkcji rzutującej strukturę znaczeniową zbioru A (tzw. domeny źródłowej) na zbiór B (domenę docelową). Istotą metafory poznawczej jest to, że treść tej ostatniej jest konceptualizowana za pomocą pojęć składających się na tę pierwszą. Domeny źródłowe zdaniem Lakoffa stanowią sfery mniej abstrakcyjne oraz mniej

[2] G. Lakoff, M. Johnson, *Metafory w naszym życiu*, przeł. T.P Krzeszowski, Wydawnictwo Aletheia, Warszawa 2010, s. 29.

zsubiektywizowane niż domeny źródłowe. Co więcej zwykle wywodzą się one bezpośrednio ze sfery doświadczenia fizyczno-kinetycznego (codziennego potocznego doświadczenia bycia w świecie). Językowym przykładem takiej metafory może być konceptualizacja sfery myślenia kreatywnego w kategoriach doświadczenia kinetycznego związanego z umieszczaniem przedmiotów w pojemniku. Zilustrujmy to przykładem zdania: *Mariuszowi wpadł do głowy błyskotliwy pomysł*. W tym z pozoru nie metaforycznym zdaniu, umysł jest konceptualizowany w kategoriach pojemnika, proces myślenia jest konceptualizowany jako umieszczanie przedmiotu w pojemniku, zaś myśl/pomysł to właśnie umieszczany w nim przedmiot. Przy okazji warto zauważyć, że w powyższym zdaniu mamy również do czynienia z jeszcze jedną metaforą mianowicie: coś wartościowego/dobrego jest skonceptualizowane w kategoriach przedmiotu błyszczącego. Domeną źródłową jest zatem doświadczenie fizyczno-kinetyczne, proces kreatywny zaś stanowi domenę docelową. Warto nadmienić, że zdaniem Lakoffa i Johnsona wszelka wiedza abstrakcyjna ma charakter metaforyczny, co w istocie oznacza, że jest ona konceptualizowana przy pomocy zaczerpniętych z codziennego doświadczenia schematów poznawczych. Oznacza to że status kognitywnej teorii metafory stanowi oryginalną wersję empiryzmu, zgodnie z nią nie ma bowiem niczego w myśleniu abstrakcyjnym czego wcześniej nie byłoby w doświadczeniu fizycznym. Innymi słowy ujęcie jakiegokolwiek abstrakcyjnego elementu doświadczenia jest możliwe jedynie dzięki istnieniu domen należących do porządku empirycznego. Codzienne doświadczenie konieczne jest zatem dla ujęcia jakiejkolwiek wiedzy abstrakcyjnej, a co za tym idzie komunikacji, myślenia, planowania czy też procesu edukacji i wychowania. Prościej mówiąc, gdyby nie doświadczenia zaczerpnięte ze sfery przestrzenno-kinetycznej, (takie jak np. poruszanie się do przodu), konceptualizacja domeny abstrakcyjnej (związanej np. czasem) byłaby całkowicie niemożliwa, brakowałoby bowiem pojęć nadających jej strukturę rozumienia.

Teoria Lakoffa nie jest jednak wolna od teoretycznych problemów[3]. Warto wskazać na kilka z nich, nie tylko z racji, że wiążą się one z tematyką podejmowaną w pracy, lecz również dlatego, że ich przezwyciężenie przynosi nie tylko korzyści dla samej teorii metafor pojęciowych, lecz daje również nadzieje na rozwiązanie podejmowanych na dalszych stronach niniejszej

[3] Szerzej na temat kwestii koherencyjności teorii metafory poznawczej, zob. A. Gemel, *Codzienność metafory w perspektywie kognitywistycznej. Próba krytycznej analizy*, „Nauki o Wychowaniu. Studia Interdyscyplinarne" 2016, 2(1) s. 172-186. Tutaj przedstawiam tylko skrótowy zarys argumentów krytycznych.

pracy problemów procesu nabywania dokładnych reprezentacji liczbowych. Pierwszy problem związany jest z kwestią istnienia wstępnej struktury domeny docelowej, a jego konsekwencje prowadzą do problemu całkowitej arbitralności metafory poznawczej. Lakoff twierdzi bowiem, że w wyniku procesu metaforycznego domena docelowa zyskuje strukturę od domeny źródłowej. Jednakże aby to było możliwe domena docelowa nie może być zatem nawet jakoś wstępnie skonceptualizowana, gdyż w przeciwnym razie proces ten nie polegałby na nadawaniu struktury, tylko na korelowaniu uprzednio istniejących struktur. W tym ostatnim przypadku nie może być zatem mowy o konceptualizowaniu domeny docelowej w kategoriach domeny źródłowej, gdyż obie domeny są już skonceptualizowane. Aby konceptualizacja była zatem możliwa domena docelowa musi stanowić swoiste wewnętrznie niezróżnicowane kontinuum, tylko taka jej forma gwarantuje bowiem brak struktury. Jednakże bez wstępnej struktury domeny docelowej odwzorowanie metaforyczne staje się całkowicie arbitralne, nie ma bowiem żadnej racji ku temu aby konkretna domena źródłowa determinowała akurat dany obszar wiedzy abstrakcyjnej a inna domena inny jej obszar. Studia z językoznawstwa komparatystycznego pokazują jednak, że istnieją duże regularności między językami w sposobach konceptualizacji treści abstrakcyjnych, co niestety podważa możliwość arbitralności całego procesu.

Drugi problem ma charakter logiczny i dotyczy empirycznego statusu odwzorowywania relacji w procesie metaforycznej konceptualizacji. Zgodnie z teorią Lakoffa odwzorowanie polega bowiem na rzutowaniu relacji, lub schematów, które formalnie rzecz biorąc stanowią abstrakcyjne pojęcia z jednej domeny na drugą. Owe relacje muszą zatem być już wstępnie skonceptualizowane aby nadać strukturę codziennemu empirycznemu doświadczeniu i jako takie muszą być obecne w domenie źródłowej związanej z codziennym doświadczeniem. Relacje jednak przynależą do porządku abstrakcyjnego, ten zaś miał być przecież wynikiem rzutowania z empirii. Porządek abstrakcyjny (domena docelowa) musi zatem istnieć w porządku konkretnym (domena źródłowa), aby było możliwe wyłonienie się porządku abstrakcyjnego (domeny docelowej). Schemat odwzorowania metaforycznego nosi zatem klasyczne znamiona błędnego koła. Ten zarzut dotyczy oczywiście wszystkich domen abstrakcyjnych, w tym zwłaszcza, tak czysto abstrakcyjnej domeny jaką jest wiedza matematyczna. Status matematyki jest w teorii Lakoffa tym samym mocno problematyczny, gdyż relacje matematyczne nie mogą być bowiem rzutowane z empirii, godziłoby to bowiem chociażby w powszechność jej ustaleń?

Wzmiankowane problemy teorii Lakoffa & Johnsona dają się jednak w dość prosty sposób ominąć, rozwiązanie to wymusza jednak zmianę statusu ich teorii, które objawia się w złagodzenie radykalizmu postulowanego przez nich empiryzmu. Rozwiązaniem wzmiankowanych problemów jest przyjęcie pewnych proto-pojęciowych struktur poznawczych, czyli swoistych wrodzonych mechanizmów kognitywnych, które pozwoliłyby na wstępne i powszechne określenie struktury codziennego doświadczenia. Taką możliwość oferuje teoria wiedzy rdzennej, której struktury mogą teoretycznie wzbogacić teorię Lakoffa i Johnsona oraz ocalić intersubiektywność fizyczno-kinetycznych doświadczeń związanych z domenami źródłowymi. Szczególnie istotne z perspektywy celów nakreślonych w artykule jest jednak to, że to rozwiązanie umożliwia wyjaśnienie nabywania podstawowych zdolności matematycznych w kategoriach teorii metafory poznawczej. W dalszej części tekstu skupię się zwłaszcza na wykorzystaniu koncepcji Lakoffa do wyjaśnienia problemu nabywania przez dzieci pojęć liczebników dokładnych, na które pozwala właśnie wzbogacenie teorii metafor pojęciowych o model wiedzy rdzennej. Zanim jednak do tego przejdę kilka słów chciałbym poświęcić omówieniu koncepcji wiedzy rdzennej.

Numeryczne systemy wiedzy rdzennej

Teoria wiedzy rdzennej wywodzi się z natywistyczno-racjonalistycznego nurtu w filozofii a jej bezpośrednich korzeni można doszukiwać się w epistemologii neokantowskiej[4]. Głównym postulatem teorii jest istnienie apriorycznych i wrodzonych składników poznawczych, które wpływają na finalny kształt doświadczenia. Jak pisze Carey w *Origin of Concepts*:

> „W zgodzie z twierdzeniem racjonalistów, istnieją wrodzone mechanizmy przetwarzania, które przeliczają percepcyjne reprezentacje – tj. bezpośrednie reprezentacje świata zewnętrznego. W przeciwieństwie do teorii empirystycznych, mechanizmy te nie są konstruowane na drodze procesu uczenia, który dokonuje się w oparciu o reprezentacje zmysłowe"[5].

[4] Szerzej na temat teorii wiedzy rdzennej zob. E. Spalke, K. Breinlinger, J. Macomber, K. Jacobson, *Origins of Knowledge*, „Psychological Review", 99(4), 1992, s. 605-632; E. S. Spelke, *Core knowledge*, „American Psychologist", 55, 2000, s. 1233–1243 oraz S. Carey, *Bootstrapping and the origins of concepts*, „Daedalus" 2004, 133(1), s. 59-68.

[5] S. Carey, *The Origin of Concepts*, Oxford University Press, New York 2009, s. 448–449.

Wrodzony charakter systemów wiedzy rdzennej oznacz, „że nie stanowią one produktu procesu uczenia się, lecz że mechanizmy przetwarzania, które odpowiadają za identyfikację reprezentowanych bytów, oraz przynajmniej niektóre spośród ich obliczeniowych funkcji stanowią produkt ewolucji”[6]. Systemy wiedzy rdzennej stanowią zatem natywne filogeniczne mechanizmy przetwarzające informację, które ulegają aktywacji pod wpływem bodźców zewnętrznych. W skład domen wiedzy rdzennej których istnienie zostało potwierdzone przez badania empirycznie wchodzą domeny związane z pojęciem obiektu, sprawstwa, oraz te związane z pojęciem liczby. W skład tej ostatniej wchodzą dwa podstawowe systemy numeryczne[7].

Zanim jednak przejdę do ich omówienia na wstępie chciałbym podkreślić, że będące powodem licznych nieporozumień wyrażenie „numeryczny” używane w kontekście systemów wiedzy rdzennej, nie ma formalnego znaczenia matematycznego. Nie należy go zatem rozumieć w ścisłym aksjomatycznym i technicznym sensie jako np. kardynalność zbioru, w jakim funkcjonuje ono w matematycznych teoriach liczb. Systemy te mają raczej charakter przetwarzania ilości, ewentualnie liczebności. Co więcej w niektórych teoriach nawet ich liczebnościowa natura nie jest przesądzona[8]. Systemy numeryczne należy zatem rozumieć jako pewne systemy protoliczbowe, polegające na reprezentowaniu informacji związanej z ilością/liczebnością. Systemy te oczywiście mogą się przyczynić do wykształcania tzw. teorii liczby dokładnej. Warto nadmienić, że to pojęcie również pełne jest nieporozumień. Należy pamiętać, że odnosi się ono bowiem wyłącznie do mentalnej reprezentacji dokładnych wielkości liczbowych, nie zaś w zgodzie z często podnoszonym zarzutem do wiedzy matematycznej na temat liczb naturalnych, rzekomo posiadanej przez kilku letnie dzieci. Dane empiryczne potwierdzają bowiem, że dzieci mają zdolność reprezentowania dokładnych

[6] Tamże, s. 453.

[7] L. Feigenson, S. Dehaene, E. S. Spelke, *Core systems of number*. „Trends in Cognitive Sciences” 2004, 8(10), s. 307–314.

[8] Przykładem takiej teorii jest koncepcja zespołu K. Mix. Ich zdaniem, systemy te odpowiadają za przetwarzanie wielkości związanej z całkowitą powierzchnią obserwowanych bodźców wizualnych ich, gęstością, rozciągłością i rozpiętością a wymiar numeryczny jest przetwarzany jedynie *implicite*, gdyż jest z wymiarem wielkości siłą rzeczy skorelowany. Szerzej na ten temat zob. K.S. Mix, J. Huttenlocher, S.C. Levine, *Multiple cues for quantification in infancy: Is number one of them?*, “Psychological Bulletin”, 128, 2002, 278–294; K. S. Mix, S.C Levine, N.S. Newcombe, *Development of quantitative thinking across correlated dimensions*, w: A. Henik, *Continuous issues in numerical cognition*, Elsevier 2016, s. 1-33, oraz K.S. Mix, C.M. Sandhofer, *Do we need a number sense?* w: M. J. Roberts, *Integrating the mind*, Psychology Press 2007 s. 293–326.

liczebności zbiorów, bez konieczności jednoczesnej wyraźnej reprezentacji ich aksjomatyki, bądź formalnych właściwości jako mocy zbioru w sensie dystrybutywnym. Innymi słowy liczbę dokładną należy rozumieć w potocznym, nie zaś w ściśle technicznym sensie tego słowa.

W skład domeny wiedzy rdzennej związanej z przetwarzaniem liczebności wchodzą dwa systemy: system paralelnej indywiduacji (PIS) i liczb przybliżonych (ANS), oraz pojęcia i mechanizmy związane z językową kwantyfikacją zbiorowości. Na wstępie warto zaznaczyć, że pierwszy system, nie jest systemem przetwarzania liczebności *par excellence*, jego rolą nie jest bowiem reprezentacja wielkości numerycznej danego zbioru *explicite*, lecz tworzenie modelu mentalnego pozwalającego śledzić kilka obiektów jednocześnie. Innymi słowy reprezentacje systemu śledzenia obiektu nie dostarczają pojęcia zbioru. Teoretycznym kontekstem odkrycia systemu paralelnej indywiduacji były szeroko zakrojone badania poświęcone testowaniu natury zmysłu numerycznego u dzieci. Eksperyment, który bezpośrednio przełożył się w opracowanie teorii PIS został przeprowadzony przez Feigenson, Carey, and Spelke i polegał na zbadaniu korelacji pomiędzy wymiarami bodźca a łatwością rozróżniania par zbiorów złożonych odpowiednio z 1 i 2 oraz 2 i 3 elementów[9]. Interpretacja wyników badań zaproponowana przez autorki eksperymentu, wiąże się z określeniem pierwszego systemu wiedzy rdzennej związanego z przetwarzaniem ilości opartego o model mentalny złożony z reprezentacji rejestru obiektowego (*object-file*) tzw. systemu śledzenia obiektów (zwanego też *Parallel Individuation System*). Zdaniem autorek w przypadku dzieci w wieku niemowlęcym zjawiska o ograniczonej liczbie obiektów do około czterech, nie są przetwarzane *stricte* numerycznie, lecz są podtrzymywane w pamięci roboczej przy pomocy modelu mentalnego zawierającego zespół cech przypisanych do każdego z nich. Rola rejestru obiektowego (lub indeksu obiektowego) polega na przechowywaniu określonego minimalnego zestawu właściwości reprezentowanego obiektu, jak np. kolor, kształt, lokalizacja przestrzenna, etc., które umożliwiają jego wizualną indywidualizacje, identyfikacje, oraz śledzenie trajektorii jego ruchu[10]. Liczba obiektów możliwych do jednoczesnego śledzenia, zależna jest od zdolności do równoległego przetwarzania i zwykle ogranicza się do około trzech -czterech obiektów jednocześnie. Choć reprezentacje systemu śledzenia

[9] L. Feigenson, S. Carey, E. Spelke, *Infants' discrimination of number vs. continuous extent*, "Cognitive Psychology", 44, 2002, s. 33–66.

[10] D. Kahneman, A. Treisman, B.J. Gibbs, *The reviewing of object-files: Object specific integration of information*, "Cognitive Psychology", 24, 1992, s. 174–219.

obiektów mają dyskretny charakter i mogą z łatwością zostać policzone przez kompetentnych użytkowników języka, nie są to reprezentacje typowo numeryczne, lecz stanowią jedynie mentalne wskaźniki dla indywidualizacji. System śledzenia obiektów stanowi więc w istocie system nieprzystosowany do przetwarzania numeryczności, nawet w niewielkiej liczbie ograniczonej przez jego poznawczą przepustowość. Nie jest on bowiem w stanie dostarczyć nawet intuicyjnego pojęcia zbioru. Wszelkie określanie liczebności zbioru śledzonych obiektów muszą być więc wykonywane przez jakiś rodzaj odrębnego typowo numerycznego systemu, który operowałby na indeksowych reprezentacjach systemu śledzenia obiektów.

System liczb przybliżonych z kolei, jest podobnie jak OTS systemem poznawczym bezpośrednio skorelowanym z przetwarzaniem wielkości; jego rola polega na przybliżonym reprezentowaniu liczby jednostek w zbiorze, powyżej progu poznawczej przepustowości system śledzenia obiektów[11]. Sposób poznawczego funkcjonowania ANS, jest zgodny z psychofizycznym prawem Webera-Fechnera. Zgodnie z nim percepcja wielkości dwóch porównywanych bodźców, nie zależy od arytmetycznej różnica pomiędzy nimi, lecz od ich stosunku, zaś funkcja rozkładu wrażenia zmiany bodźca, przebiega zgodnie z rozkładem logarytmicznym. Potwierdzają to eksperymenty przeprowadzone przez Spelke i Xu, które rzeczywiście pokazały, że niemowlęta dostrzegają różnicę (objawiającą się w dyshabituacji na bodziec) między zbiorem 16 i 8 elementów, zaś nie dostrzegają jej między zbiorem 8 i 12 elementów[12]. System przetwarzający duże zbiory nie jest więc oparty na absolutnej różnicy między elementami, lecz na stosunku między liczebnościami porównywanych zbiorów. Z tego powodu reprezentacje systemu ANS często są określane mianem reprezentacji wielkości analogowych, gdyż kodowanie liczebności zbioru ma charakter ciągły i jest ściśle skorelowane z wielkością skalarną.

Warto jednak pamiętać, że żaden z wymienionych systemów nie jest w stanie reprezentować dokładnych pojęć liczbowych. Reprezentacje system liczb przybliżonych z definicji są niedokładne. Zaś system śledzenia obiektów nie jest nawet *stricte* liczbowy i co gorzej jego możliwości przetwarzania ograniczają się do jedynie 4 elementów. Naturalne zatem wydaje się pytanie o proces powstawania dokładnych reprezentacji liczbowych.

[11] L. Feigenson, S. Dehaene, E. S. Spelke, *Core systems of number*. „Trends in Cognitive Sciences" 2004, 8(10), s. 307–314.

[12] F. Xu, E. Spelke, *Large number discrimination in 6-month-old infants*, "Cognition", 74 2000, B1–B11.

Teoria formowania dokładnych reprezentacji numerycznych

Jedną z najbardziej popularnych i najszerzej chyba dyskutowanych koncepcji powstawania dokładnych reprezentacji numerycznych, jest opracowana przez Susan Carey teoria *bootstrappingu*[13]. Proces ten wedle Carey przebiega w kilku fazach. Pierwsza faza polega na opanowaniu przez dziecko jedynie samej struktury pustych beztreściowych werbalnych symboli dla znaczeń, które nie mają żadnego odniesienia przedmiotowego. Innymi słowy dziecko uczy się na pamięć wyrażeń liczebników, z którymi wstępnie nie jest skorelowany żaden sens. Kolejne fazy polegają na stopniowym seryjnym wypełnianiu beztreściowych symboli od jednego do 4 znaczeniem, przy udziale systemu śledzenia obiektów (ANS nie bierze udziału w procesie *bootstrappingu*)[14]. Kolejny poziom jest poziomem przełomowym, gdyż po nim następuje tak zwany poziom kardynalny, na którym dziecko operuje już znaczeniem liczb dokładnych. Przejście na ostatni poziom wiąże się ze zrozumieniem tzw. kardynalnej zasady liczenia (tj. pojęć następstwa i równoliczności)[15] i następuje zdaniem Carey w wyniku testowania hipotezy i rozumowania indukcyjnego dokonywanego na już pozyskanych dokładnych reprezentacjach numerycznych. Oczywiście powstały w konsekwencji *bootstrappingu* system reprezentacji, jest całkowicie niewspółmierny z wrodzonymi systemami wiedzy rdzennej (ANS i OTS), ma o wiele większą moc reprezentacyjną, a reprezentacje nowego systemu nie mogą być żadną miarą przedstawione w słowniku systemu starego. Pojęcie niewspółmierności sprawia jednak, że teoria Carey wikła się w znany od czasów Platona paradoks wiedzy[16]. Nowy system reprezentacyjny musi bowiem zostać sformułowany jako hipoteza,

[13] Szczegółowe opracowanie zawiera praca S. Carey, *Bootstrapping and the origins of concepts*, dz. cyt., s. 59-68, oraz Carey S., *Cognitive foundations of arithmetic: Evolution and ontogenesis*, „Mind and Language", 16, 2001, 37–55. Kontekstowo najszersze opracowanie tematu można jednak znaleźć w głównym dziele Carey, *The Origin of Concepts*, op. cit., passim.

[14] Proces ten jest skorelowany z nabywaniem kolejnych poziomów znajomości liczbowej, opisanej przez K. Wynn, *Children's understanding of counting*, „Cognition", 36 1990, s. 155–193.

[15] Szerzej na ten temat zob. C. Gallistel, C., R. Gelman, *The what and how of counting,* „Cognition", 44, 1990, 43–74, oraz R. Gelman C. Gallistel, *Language and the origin of numerical concepts*, „Science", 306, 2004 s. 441–443.

[16] Na istnienie tego paradoksu we współczesnej kognitywistyce zwrócił uwagę Jerry Fodor, zob. J.A. Fodor, *The Language of Thought*. Harvard University Press, Cambridge 1975.; *Idem*, *On the impossibility of acquiring "more powerful" structures: Fixation of belief and concept acquisition*, [w:] M. Piatelli-Palmerini (red.), *Language and Learning*, Harvard University Press, Cambridge 1980 s. 142–62, oryginalna wersja Paradoksu znajduje się *Menonie* zob. Platon, *Gorgias, Menon,* przeł. W. Witwicki, PWN, Warszawa 1991, 80d1-4 i 80e.

a w dalszej kolejności poddany testowi, jednakże aby sformułować hipotezę, możemy użyć jedynie posiadanego systemu reprezentacji, ten zaś jest przecież niewspółmierny z nową hipotezą. Innymi słowy *Bootstrapping* może odbywać się jedynie w oparciu o już posiadane reprezentacje, co oznacza, że albo hipoteza nie jest możliwa do sformułowania, albo jeżeli daje się taką hipotezę sformułować to *de facto* nie zwiększa ona w żaden sposób siły wyrazu wyjściowego systemu pojęciowego[17]. Trudności związane z pojęciową nieciągłością stawiają zatem pod znakiem zapytania w zasadzie całą spójność teoretyczną kreślonej przez Carey koncepcji.

Drugi problem z teorią Carey, związany jest z wykluczeniem systemu ANS z procesu nabywania dokładnych reprezentacji liczbowych. Posunięcie to wydaje się zupełnie nieuzasadnione. Wszak za udziałem systemu liczb przybliżonych w procesie kształtowania pojęcia liczby dokładnej przemawiają liczne dowody empiryczne. Po pierwsze, jak pokazały to eksperymenty Gilmore'a i jego współpracowników[18], oraz Siegler i Opfer[19] dzieci, które dopiero co opanowały proces liczenia korzystają z reprezentacji ANS, kiedy rozwiązują nowe zadania związane z użyciem liczebników. Wykonują one przybliżone symboliczne dodawanie, lokując symboliczne wyrażenia reprezentujące liczby dokładne na osi, której struktura wykazuje graniczne podobieństwo do osi liczb przybliżonych (tj. jest ona kodowana logarytmicznie). Co więcej, jak wykazał zespół Yi Tieng Huang [20], dzieci które opanowały procedurę liczenia jedynie do trzech, ucząc się kolejnego liczebnika w pierwszej kolejności odnoszą symbol „4" do reprezentacji systemu liczb przybliżonych, myląc tym samym znaczenie czterech ze znaczeniem pięć. Wreszcie jak wykazali Dehaene i Cohen[21] sama struktura porządkowa liczebników nie może dostarczać porządku liczbowego niezależnie od syste-

[17] Szerzej na temat problemów pojęcia nieciągłości w teorii Carey zob. A. Gemel, *Kwestia pojęciowej nieciągłości procesu nabywania dokładnych reprezentacji numerycznych w teorii Bootstrappingu*, „Humanistyka i przyrodoznawstwo. Interdyscyplinarny rocznik filozoficzno-naukowy" Nr. 22/2016 s. 101-117.

[18] C.K. Gilmore, S.E. McCarthy, E. Spelke, *Symbolic arithmetic knowledge without instruction*, "Nature" 447, 2007, s. 589–591.

[19] R. S. Siegler, J. E. Opfer, *The Development of Numerical Estimation: Evidence for Multiple Representations of Numerical Quantity*, „Psychological Science", 14 (3) 2003, s. 237-243.

[20] Y.T. Huang, E. Spelke, J. Snedeker, *When Is "Four" Far More Than "Three"? Children's Generalization of Newly Acquired Number Words* „Psychological Science", 21(4), 2010, s. 600-606.

[21] S. Dehaene, L. Cohen, *Cerebral pathways for calculation: Double dissociation between rote verbal and quantitative knowledge of arithmetic,* „Cortex", 33, 1997, s. 219- 250.

mu liczb przybliżonych, gdyż zaburzenia ANS u dorosłych powodują u nich problemy związane z określeniem wielkości określonej liczby w stosunku do innej (np. określenia czy „9" jest większe od „7"). Gdyby ANS nie odgrywał żadnej roli w kształtowaniu struktury porządkowej liczebności określonych zbiorów, to upośledzenie zdolności reprezentacji liczb przybliżonych nie wpływałoby na kształt owej struktury.

Co więcej, jak wskazuje Piazza, proponowany przez Carey opis procesu pozyskiwania znaczenia liczebników dokładnych jedynie w oparciu o działalność sytemu paralelnej indywiduacji, stwarza liczne problemy teoretyczne[22]. Słusznie zwraca ona bowiem uwagę, że osiągnięcie limitu przepustowości poznawczej systemu PIS, dokonuje się niezwykle szybko w rozwoju osobniczym. Przeciętnie 12-miesięczne dziecko zyskuje już zdolność równoczesnego śledzenia do 4 obiektów, dorównując w tym zakresie dorosłym[23]. Nie jest zatem jasne dlaczego proces nabywania znaczeń liczebników dokładnych do „czterech" nie dokonuje się w jednym akcie i przy minimalnym poznawczym wysiłku, tylko następuje w seriach, jak pokazują eksperymenty Wynn. Należy zauważyć, że wyjaśnianie seryjności procesu nabywania znaczeń dla liczebników dokładnych nie może bazować na seryjnym charakterze nabywania ciągu symboli liczebników, gdyż sekwencja tych ostatnich jest znana dziecku dużo wcześniej niż znaczenia liczby dokładnej.

Rozwiązania tego problemu dostarcza hipoteza Spelke. Jej zdaniem seryjność nabywania kolejnych poziomów zdolności numerycznej, może bowiem zostać wyjaśniona, dzięki konieczności zaistnienia wielopoziomowych odwzorowań między dwoma systemami poznawczymi, polegającym na dostrojeniu reprezentacji obu systemów. Co więcej kolejne znaczenia wyższych liczebników są zapewne przynajmniej częściowo konstruowane przy odniesieniu do znaczeń liczebników uprzednio ukonstytuowanych. Przedstawiona w tekście propozycja teoretyczna bazuje właśnie na powyższym poczynionym przez Spelke założeniu.

---

[22] M. Piazza, *Neurocognitive start-up tools for symbolic number representations,* "Trends in Cognitive Sciences", 14(12), 2010, s. *542–551.*

[23] Więcej na ten temat zob. S. Ross-Sheehy, L.M. Oakes, S.J. Luck, *The development of visual short-term memory capacity in infants*, "Child Development" 74, 2003 s. 1807–1822; L. Oakes, S. Ross-Sheehy, S.J. Luck, *Rapid development of feature binding in visual short-term memory*. "Psychological Science" 17, 2006, s. 781–787; S. Rose, J.F. Feldman, J. J. Jankowski, *Visual short-term memory in the first year of life: capacity and recency effects*, "Developmental Psychology" 37, 2001, s. 539–549.

Próba rozwiązania problemu konstytucji dokładnych reprezentacji liczbowych

Rozwiązaniem problemu nabywania pojęć może być uwzględnienie w zaproponowanym przez Carey modelu nabywania liczebników systemu ANS. Taką propozycję przedstawiła Spelke[24]. Rozwiązanie to pozwala bowiem potraktować nowe pojęcia jako elementy kompozycjonalnie skorelowane na bazie działalności podstawowych składników, numerycznych systemów wiedzy rdzennej. Jej rozwiązanie w pewnym sensie stanowi więc parafrazę słynnego stwierdzenia Fodora, zgodnie z którym możliwość nauczenia się nowego znaczenia dla pewnego terminu, jest ugruntowana w konieczności istnienia odwzorowania między owym terminem a uprzednio istniejącymi wyrażeniami w języku myśli. Zdaniem Spelke odwzorowania zachodzą jednakże nie w języku myśli lecz pomiędzy wyrażeniami języka a reprezentacjami systemów wiedzy rdzennej. Ta z pozoru mało znacząca różnica, wpływa jednak w istotny sposób na kształt proponowanego przez nią rozwiązania. Choć Spelke opowiada się, podobnie jak Fodor za modularną koncepcją umysłu, to nie przyjmuje za nim istnienia centralnego modułu językowego. W konsekwencji w koncepcji Spelke w przeciwieństwie do Fodora moduły poznawcze nie mają wspólnego systemu reprezentacji w postaci języka myśli, lecz każdy z modułów poznawczych dysponuje własnym systemem reprezentacji, które mogą służyć jako dane wejściowe dla pozostałych domen. Owa drobna modyfikacja zaproponowana przez Spelke prowadzi do istotnej zmiany w rozumieniu języka. Nie stanowi on bowiem już centralnego systemu służącego za główny i jedyny nośnik reprezentacyjny zawartości umysłu, lecz jeden z wielu systemów reprezentacji, jednakże w odróżnieniu od pozostałych nie zrelatywizowanych do jednej określonej domeny poznawczej. Pozwala on zatem na dokonywanie metaforycznych przekładów między wieloma językami myśli, czy też jak Spelke woli je określać systemami reprezentacji. Język naturalny jest więc swoistym medium, umożliwiającym między domenowe odwzorowania i pozwalającym na łączenie określonych reprezentacji, które z definicji są dedykowane określonym domenom poszczególnych systemów wiedzy rdzennej. Takie podejście wymusza jednak konieczność założenia elastycznego charakteru języka. Taka koncepcja języka naturalnego oferuje językoznawstwo kognitywne z centralną dla niej funkcją symboliczną, zwłaszcza zaś ze zdolnością metaforyzowania. Jedynie

[24] Spelke, E. S., *What Makes Us Smart? Core Knowledge and Natural Language* [w:] D. Gentner, S. Goldin-Meadow, *Language in Mind. Advances in the Study of Language and Thought*, MIT Press, 2003.

tak rozbudowany system kombinatoryczny jak język naturalny może służyć za narzędzie do zestawiania i łączenia reprezentacji pozostałych systemów. Typowo ludzka zdolność pozyskiwania systemu pojęciowego daleko wykraczającego poza reprezentacje dostarczane przez systemy wiedzy rdzennej, może zatem polegać na łączeniu owych reprezentacji, tj. na wzajemnym ich odwzorowywaniu w medium języka naturalnego. Reprezentacje liczb dokładnych mogą zatem powstać w wyniku połączeniu w języku naturalnym przedstawień dostarczanych przez dwa odrębne systemy modułowe tj. ANS i PIS. Dziecko ucząc się, bowiem że ten sam zestaw słów stanowi odwzorowanie reprezentacji obu numerycznych systemów wiedzy rdzennej, zyskuje tym samym zdolność łączenia informacji dostarczanych przez oba systemy reprezentacyjne, przezwyciężając ograniczenia właściwe dla każdego z nich z osobna. Zgodnie z propozycją teoretyczną Spelke, dzięki połączeniu obu systemów dziecko może sobie uświadomić, że każde słowo oznaczające liczbę odpowiada dokładnej liczebności obiektów, że dodanie lub odjęcie dokładnie jednego obiektu powoduje zmianę liczebność i przesunięcie się o jeden krok kolejny na linii liczebników, że zmiana kształtu przestrzennego lub dystrybucja obiektów nie zmienia liczebności, oraz że liczby nie mają górnego ograniczenia i że dany symbol reprezentuje zbiór rozumiany jako całość, nie zaś jako szereg odrębnych obiektów. Co więcej nowo powstałe reprezentacje zyskują właściwości reprezentacyjne dalece wykraczające poza reprezentacje dostarczane przez wrodzone systemy wiedzy rdzennej, zarówno pod kątem precyzji, jak i siły wyrazu[25].

Warto jednak zauważyć, że samo uwzględnienie systemu liczb przybliżonych w procesie wykształcania się dokładnych reprezentacji liczbowych, nie gwarantuje jeszcze ominięcia trudności generowanych przez paradoks Fodora. Reprezentacja powstała w wyniku korelacji systemów wiedzy rdzennej, cały czas może bowiem zostać uznana za kompozycjonalne złożenie reprezentacji tych systemów, tj. ich zwykłą koniunkcję. W takiej sytuacji

[25] Co ciekawe Carey rozważała wariant *bootstrappingu* z udziałem systemu ANS w dwóch wersjach. W pierwszej wersji rozpatruje ona hipotezę zgodnie z którą to reprezentacje ANS byłyby bezpośrednio rzutowane na symboliczne wyrażenia dla liczb dokładnych. Hipotezę tę jednak odrzuca wskazując, że ANS nie dostarcza reprezentacji jedności, a co za tym idzie system ten nie może posłużyć za mechanizm dostarczający zasadę następnika. Druga wersja *bootstrappingu* rozważana przez Carey jest bardzo zbliżona do propozycji Spelke, polega ona bowiem na odwzorowywaniu obu systemów numerycznych na symbole liczebników. Carey odrzuca jednak tę hipotezę z racji braku – jej zdaniem – przekonujących dowodów empirycznych które by ją potwierdzały, por. S. Carey, *The Origin of Concepts*, *op. cit.*, s. 309.

nowa reprezentacja stanowiłaby jedynie nowy termin dla już istniejących treści. W modelu *bootstrappingu*, jednak nie ma innej możliwości połączenia dwóch reprezentacji systemów wiedzy rdzennej jak właśnie poprzez koniunkcję. Paradygmat w jakim Carey i Spelke wykładają swoją teorię jest bowiem czysto symboliczny, co oznacza, że wszelkie procesy poznawcze mogą być w nim wyjaśniane jedynie za pomocą obliczeń na abstrakcyjnych symbolach, dokonywanych w oparciu o logikę pierwszego rzędu[26]. Propozycja Spelke również nie jest od tego problemu wolna. Symbolizm jest bowiem niezwykle mało podatny na kwestie zmiany pojęciowej. Rozwiązanie tego problemu wiąże się zatem z koniecznością zejścia na niższy niż symboliczny poziom reprezentacji. Taką możliwość oferuje poziom koneksjonistyczny, który stanowi model reprezentacji procesów neuronalnych reprezentowany przy pomocy sztucznych sieci neuronowych. Co ciekawe teoria metafor konceptualnych w wersji uwspółcześnionej stanowi właśnie formę teorii koneksjonistycznej, gdyż postulowana w niej struktura metaforycznego odwzorowania jest całkowicie oparta na procesach neurologicznych. Teoria ta stanowi rozwinięcie kognitywnej koncepcji metafory w tzw. neuronalną obliczeniową teorię języka, opracowaną przez Lakoffa wspólnie z J. Feldmanem[27] i S. Narayananem[28]. Rozwinięcie teorii Lakoffa ma charakter neurokognitywy, co oznacza że proces metaforyczny może zostać opisany jako korelacja struktur neuronalnych w mózgu. Odwzorowania między domenowe dokonują się zatem dzięki połączeniu obszarów neuronalnych przypisanych owym domenom jako ich semantyczne korelaty. Innymi słowy model formowania dokładnej reprezentacji liczbowej związany jest z korelacją struktur neuronalnych przypisanych do systemów paralelnej indywiduacji oraz śledzenia obiektów. Dane empiryczne wyraźnie sugerują bowiem, że w przetwarzanie dokładnych reprezentacji numerycznych, są zaangażowane korelaty neuronalne obu proto-numerycznych systemów wiedzy rdzennej.[29]

---

[26] Szerzej na temat założeń paradygmatów górnego i dolnego poziomu zob. P. Gärdenfors, *Conceptual Spaces: On the Geometry of Thought*, MIT Press, Cambridge 2000 §2-§3.

[27] J. Feldman, *From molecule to metaphor*, Bradford MIT Press, Cambridge 2006, oraz Feldman, J., Narayanan, S., *Embodied meaning in a neural theory of language*, w: "Brain and Language", 89(2) 2004, s. 385–392.

[28] Narayanan S., *KARMA: Knowledge-Based Action Representations for Metaphor and Aspect*. UC Berkeley dissertation, Berkeley 1997.

[29] Szerzej na ten temat zob. D.C. Hyde, *Two Systems of Non-Symbolic Numerical Cognition*, "Frontiers in Human Neuroscience". 5(150), 2011; doi:10.3389/fnhum.2011.00150.

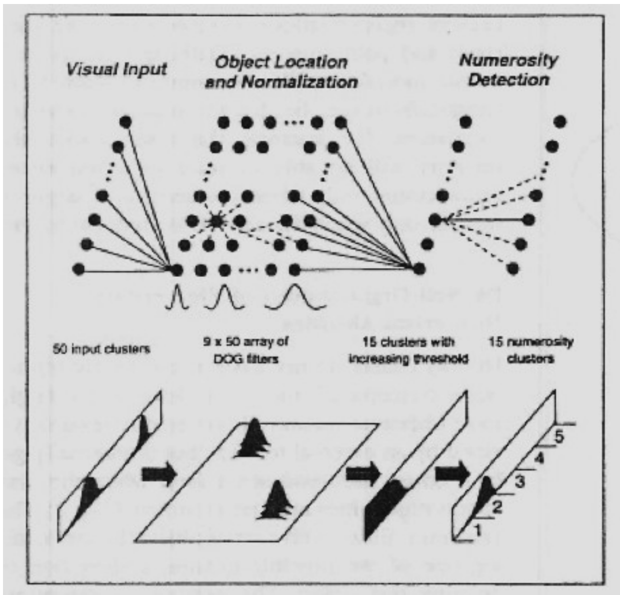
Model koneksjonistyczny

Jak wcześniej wzmiankowałem model metaforycznej konstrukcji systemu reprezentacji dokładnych wyrażeń numerycznych wymaga opracowania ramy teoretycznej dla wyłaniania się owych struktur. Koncepcja modelowania funkcjonująca w neuronalnej teorii języka Lakoffa i Feldmana zakłada istnienie różnego rodzaju połączeń (obwodów) neuronalnych (*neuronal circuts*), które stanowią podstawę dla wyłaniania się określonych własności danego modelowanego systemu. Nie zamierzam jednak tu przedstawiać konkretnego matematycznego modelu sieci neuronowej, gdyż kwestie związane z problematyką właściwej implementacji założeń teoretycznych opracowywanego w pracy modelu, nie są przedmiotem niniejszego tekstu. Postaram się natomiast opisać rodzaj i naturę struktury neuronalnej, którą metaforyczny model wykształcania się systemu dokładnych reprezentacji musi zakładać. Innymi słowy moim celem jest wskazanie jaki rodzaj neuronalnych połączeń między systemami wiedzy rdzennej jest konieczny dla wykształcenia się systemu dokładnych reprezentacji numerycznych. Lakoff wyróżnia różne rodzaje tego typu połączeń, wydaje się jednak że dla celów pracy najbardziej odpowiednie będzie połączenie asymetryczne typu *gestalt*[30]. Składa się ono z kolekcji węzłów $\boldsymbol{S}$:{A, B, C, D} i wyjściowego węzła G. Wzajemne odwzorowania między elementami zbioru $\boldsymbol{S}$ dają na wyjściu aktywność struktury G. Aktywność G pociąga za sobą aktywność węzłów poprzedzających, ale G jest aktywowany jedynie przez wystarczający zbiór węzłów ze zbioru $\boldsymbol{S}$. Taki układ połączenia pozwala na ukonstytuowanie systemu dokładnych reprezentacji w oparciu o wybrane właściwości ANS i OTS, (modelowane jako poszczególne elementy zbioru $\boldsymbol{S}$) np. reprezentacji zbiorowości z systemu liczb przybliżonych i pojęcia jedności z systemu indywiduacji. Połączenie typu *gestalt* jest charakterystyczne dla modelowanych struktur, w których całość generowana na wyjściu z sieci jest czymś więcej niż tylko sumą swoich części. Ta własność struktury neuronalnej *gestaltu*, pozwala uniknąć kompozycjonalnego charakteru reprezentacji, w systemach symbolicznych i związanego z nim paradoksu Fodora.

Zostaje oczywiście jeszcze kwestia samej neuronalnej implementacji systemów wiedzy rdzennej. Zgodnie z moją propozycją powinna ona

[30] Szerzej na ten temat zob. G. Lakoff, *Mapping the brain's metaphor circuitry: metaphorical thought in everyday reason*, "Frontiers in Human Neuroscience", 8 (958), 2014, doi:10.3389/fnhum.2014.00958, oraz B. Loenneker-Rodman B, S. Narayanan, *Computational models of figurative language*, w: M. Spivey, M. Joannisse, K. McRae, *Cambridge Encyclopedia of Psycholinguistics*, Cambridge University Press, Cambridge 2012.

przebiegać w zgodzie z podstawowymi założeniami architektury numerycznej zaproponowaną przez Dehaene'a i Changeux[31]. Ich praca była jedną z pierwszych prób zbadania procesu rozwoju podstawowych zdolności numerycznych przy wykorzystaniu sztucznych sieci neuronowych i złożonych architektur koneksjonistycznych. Jednym z najważniejszych elementów ich architektury jest system wykrywania numeryczności, którego funkcjonowanie przebiega w kilku fazach (zob. rys. 1).



Rysunek 1 Schemat koneksjonistycznego modelu systemu numerycznego Dehaene'a i Changeux'a[32]

Działanie jego polega na mapowaniu informacji z siatkówki, albo już gotowej reprezentacji wielkości i poddawaniu go procesowi indywiduacji, który polega na abstrahowaniu od wszelkich nierelewantnych informacji z punktu widzenia oceny liczebności danej kolekcji. Innymi słowy wizualne reprezentacje obiektów o różnych rozmiarach, kształtach, i polu powierzchni w wyniku działania systemu ulegają normalizacji do postaci kodu

[31] S. Dehaene, J-P. Changeux, *Development of Elementary Numerical Abilities: A Neuronal Model,* „Journal of Cognitive Neuroscience", 5(4), 1993, s. 390-407.

[32] Źródło: tamże, s. 395.

niezależnego od rozmiaru i powierzchni. Efektem pierwszej fazy działania systemu jest zatem rodzaj topograficznej reprezentacji organizującej położenie porównywanych elementów z pominięciem immanentnej im charakterystyki (kształtu, rozmiaru, powierzchni). Druga faza systemu polega na zsumowaniu tak przetworzonych bodźców generując na wyjściu przybliżoną reprezentację numeryczności. Sam mechanizm integrujący oraz immanentna mu aktywność nie został jednak szerzej opisane przez autorów, odwołują się oni jedynie do modelu neuronalnego McCullocha-Pittsa, generującego na wyjściu średnią wartość aktywnych neuronów przypisaną danej reprezentacji nie symbolicznego bodźca. Proces ten odbywa się poprzez zsumowanie aktywacji neuronalnych i wysłanie ich do detektorów numeryczności, które są dostrojone na wykrywanie wzoru połączeń polegającego na włączaniu centrum aktywacji i wyłączaniu tła na mapie ich lokalizacji.

Interesujące jest to, że model Dehaene i Changeux zawiera zarówno kod liczbowy, jak i połączony z systemem wielkości analogowych kod linii numerycznej. Ostateczny poziom reprezentacji związany z detektorem numerycznym jest oparty na logarytmicznym kodowaniu, albowiem krzywa strojenia detektorów reprezentowana w skali logarytmicznej przebiega zgodnie z rozkładem Gaussa o stałej wariancji. Co zbliża go do kodu analogowego. Z kolei poziom reprezentacji poprzedzający poziom detektorów numerycznych, który wiąże się z klastrami sumowania, jest bardzo zbliżony do kodu liczbowego. Jednostki na tym poziomie sumują całkowitą aktywację znormalizowanego wejścia wzrokowego, uzyskują w tym procesie coraz większe progi. Dlatego też, jeśli dana jednostka otrzymuje wystarczające natężenie aby przekroczyć próg, to jej aktywacja przebiega razem z wszystkimi pozostałymi jednostkami o niższych progach. Innymi słowy, reprezentacja wyprodukowana przez zestaw *n* obiektów obejmuje reprezentacje wszystkich mniejszych zestawów. Mówiąc prościej charakterystyka przedstawionego modelu, łączy w sobie zarówno sposób funkcjonowania systemu liczb przybliżonych, jak i paralelnej indywiduacji.

Podsumowanie

W tekście zaproponowany został model powstawania struktury dokładnych reprezentacji numerycznych, w oparciu o neuronalną teorię metafor poznawczych wzbogaconą o systemy wiedzy rdzennej. Rozwiązanie polega na metaforycznym odwzorowaniu systemów ANS i OTS w system dokładnych reprezentacji numerycznych w modelu koneksjonistycznym. Zastosowanie ww. modelu pozwala uniknąć paradoksalności będącej udziałem konkurencyjnej teorii formowania liczby dokładnej autorstwa Carey.

Ponadto zaproponowane wzmocnienie teorii metafor pojęciowych o natywne systemy wiedzy rdzennej wpływa bezpośrednio na wzmocnienie koherencji teoretycznej propozycji Lakoffa i Johnsona.

Bibliografia

Carey, S., *Cognitive foundations of arithmetic: Evolution and ontogenesis*, „Mind and Language", 16, 2001, 37–55.

Carey S., *The Origin of Concepts,* Oxford University Press, Oxford 2009.

Carey S., *Bootstrapping and the origins of concepts*, „Daedalus" 2004, 133(1), s. 59-68.

Dehaene S., Changeux J-P., *Development of Elementary Numerical Abilities: A Neuronal Model,* „Journal of Cognitive Neuroscience", 5(4), 1993, s. 390-407.

Dehaene, S., Cohen, L. *Cerebral pathways for calculation: Double dissociation between rote verbal and quantitative knowledge of arithmetic,* „Cortex", 33, 1997, s. 219- 250.

Feigenson, L., Carey, S., & Spelke, E., *Infants' discrimination of number vs. continuous extent*, "Cognitive Psychology", 44, 2002, s. 33–66.

Feldman J., *From molecule to metaphor*, Bradford MIT Press, Cambridge 2006.

Feldman, J., Narayanan, S., *Embodied meaning in a neural theory of language*, w: "Brain and Language", 89(2) 2004, s. 385–392.

Fodor J.A., *The Language of Thought*. Harvard University Press, Cambridge 1975.

Fodor J.A., *On the impossibility of acquiring "more powerful" structures: Fixation of belief and concept acquisition*, [w:] M. Piatelli-Palmerini, *Language and Learning*, Harvard University Press, Cambridge 1980 s. 142–62.

Gallistel, C. R., Gelman, R., *The what and how of counting,* „Cognition", 44, 1990, s. 43–74.

Gärdenfors P., *Conceptual Spaces: On the Geometry of Thought*, MIT Press, Cambridge 2000.

Gelman, R., Gallistel, C. R., *Language and the origin of numerical concepts*, „Science", 306, 2004 s. 441–443.

Gemel A., *Kwestia pojęciowej nieciągłości procesu nabywania dokładnych reprezentacji numerycznych w teorii Bootstrappingu*, „Humanistyka i przyrodoznawstwo. Interdyscyplinarny rocznik filozoficzno-naukowy", 22 2016 s. 101-117.

Gemel A., *Codzienność metafory w perspektywie kognitywistycznej. Próba krytycznej analizy*, „Nauki o Wychowaniu. Studia Interdyscyplinarne" 2016, 2(1) s. 172-186.

Gilmore C. K., McCarthy S. E., Spelke E., *Symbolic arithmetic knowledge without instruction*, "Nature" 447, 2007, s. 589–591.

Huang Y.T., Spelke E., Snedeker J., *When Is "Four" Far More Than "Three"? Children's Generalization of Newly Acquired Number Words* „Psychological Science", 21(4), 2010, s. 600-606.

Hyde D.C., *Two Systems of Non-Symbolic Numerical Cognition*, w: "Frontiers in Human Neuroscience". 5(150), 2011; doi:10.3389/fnhum.2011.00150.

Kahneman D., Treisman A., Gibbs, B. J., *The reviewing of object-files: Object specific integration of information*, "Cognitive Psychology", 24, 1992, s. 174–219.

Lakoff G., Johnson M., *Metafory w naszym życiu*, przeł. T.P Krzeszowski, Wydawnictwo Aletheia, Warszawa 2010.

Mix K.S., Huttenlocher J., Levine S.C., *Multiple cues for quantification in infancy: Is number one of them?,* "Psychological Bulletin", 128, 2002, s. 278–294.

Mix K. S., Levine S.C, Newcombe N.S., *Development of quantitative thinking across correlated dimensions*, w: A. Henik, *Continuous issues in numerical cognition*, Elsevier 2016, s. 1-33.

Mix K.S. & Sandhofer C.M., *Do we need a number sense?* w: M. J. Roberts, *Integrating the mind*, Psychology Press 2007 s. 293–326.

Narayanan S., *KARMA: Knowledge-Based Action Representations for Metaphor and Aspect*. UC Berkeley dissertation, Berkeley 1997.

Oakes L., Ross-Sheehy S., Luck S.J., *Rapid development of feature binding in visual short-term memory*. "Psychological Science" 17, 2006, s. 781–787.

Platon, *Gorgias, Menon,* przeł. W. Witwicki, PWN, Warszawa 1991.

Piazza M., *Neurocognitive start-up tools for symbolic number representations*, „Trends in Cognitive Science",14(12) 2010, s. 542-551.

Rose, S., Feldman J.F., Jankowski J. J., *Visual short-term memory in the first year of life: capacity and recency effects*, "Developmental Psychology" 37, 2001, s. 539–549.

Ross-Sheehy R., Oakes L.M., Luck S.J., *The development of visual short-term memory capacity in infants*, "Child Development" 74, 2003 s. 1807–1822.

Siegler R. S., Opfer J. E., *The Development of Numerical Estimation: Evidence for Multiple Representations of Numerical Quantity*, „Psychological Science", 14 (3) 2003, s. 237-243.

Spelke, E. S., *Core knowledge*, „American Psychologist", 55, 2000 s. 1233–1243.
Spelke, E. S., *What Makes Us Smart? Core Knowledge and Natural Language* [w:] D. Gentner, S. Goldin-Meadow, *Language in Mind. Advances in the Study of Language and Thought*, MIT Press, 2003.
Spelke E. S., Breinlinger K., Macomber J., Jacobson K., *Origins of Knowledge,* „Psychological Review" 99(4), 1992, s. 605-632.
Wittgenstein L., *Dociekania filozoficzne*, przeł. B. Wolniewicz, PWN, Warszawa 2000.
Wynn, K., *Children's understanding of counting*, „Cognition", *36,* 1990, s. 155–193.
Xu, F., Spelke E., *Large number discrimination in 6-month-old infants*, "Cognition", 74 2000, B1–B11

From Metaphor to Mathematics
Cognitive Theory of Metaphor and Accurate Number Representations Acquiring Model

The purpose of the paper is to answer the question whether the cognitive theory of conceptual metaphor enriched with core knowledge systems can provide the solution to the issue of acquiring accurate numerical representations by children? The first part of the text is devoted to the presentation of cognitive metaphor theory and its theoretical problems. The goal of second part is to enrich Lakoff & Johnson's theory with systems of core knowledge, to avoid the mentioned theoretical difficulties. In the last part I present the connectionist model of the process of acquiring accurate numerical representations by children. The model is based on modified theory of cognitive metaphor.