Adam Olszewski

Kilka uwag o Tezie Churcha i Aksjomacie Hilberta

Zagadnienia Filozoficzne w Nauce nr 38, 114-126

2006

Zagadnienia Filozoficzne
w Nauce
XXXVIII (2006), 114–126

Adam Olszewski
Wydział Filozoficzny PAT
Kraków

KILKA UWAG O TEZIE CHURCHA I AKSJOMACIE HILBERTA

Przypomnę na początek parę faktów odnośnie Tezy Churcha (dalej skrót CT). Została sformułowana przez Alonzo Churcha (1903–1995) około roku 1934 (w związku z badaniami nad lambda–rachunkiem), oficjalnie zgłoszona do AMS na posiedzeniu 22.03.1935 i opublikowana po raz pierwszy (w terminach funkcji rekurencyjnych) w abstrakcie *Bulletin of the American Mathematical Society*, t. 41(1935) s. 333. Druga wersja opublikowana została przez Churcha w artykule *An unsolvable problem of elementary number theory*[1]. Oto tekst:

> Zdefiniujemy teraz wcześniej dyskutowane pojęcie funkcji efektywnie obliczalnej w liczbach całkowitych dodatnich, przez identyfikację go z pojęciem funkcji rekurencyjnej liczb całkowitych dodatnich (lub λ–definiowalnych funkcji liczb całkowitych dodatnich).
>
> (Antologia Davisa s.100–101).

> We now define the notion, already discussed, of an effectively calculable function of positive integers by identifying it with the notion of a recursive function of positive integers (or of a λ–definable function of positive integers).

[1] *The American Journal of Mathematics*, 58(1936), ss. 345–363; [Antologia Davisa ss. 89–107].

Bezpośrednio po tym pisze Church:

> Definicja ta ma być usprawiedliwiona (justified) za pomocą następujących poniżej rozważań, w takim stopniu, w jakim przekonywujące (positive) uzasadnienie może w ogóle być uzyskane dla wyboru formalnej definicji, która ma korespondować z pojęciem intuicyjnym (intuitive notion). (s. 100).
>
> This definition is thought to be justified by the considerations which follow, so far as positive justification can ever be obtained for the selection of a formal definition to correspond to an intuitive notion.

Te rozważania sumuje sam Church następująco:

> W ten sposób zostało pokazane, że bardziej ogólna definicja efektywnej obliczalności nie może być uzyskana za pomocą żadnej z dwóch metod które w sposób naturalny się nasuwają (1) przez definicję funkcji jako efektywnie obliczalnej, gdy istnieje algorytm dla obliczenia jej wartości (2) przez zdefiniowanie funkcji F (jednej zmiennej) jako efektywnie obliczalnej, gdy dla każdej liczby całkowitej dodatniej m istnieje dodatnia liczba całkowita n taka, ze $F(m) = n$ jest dowiedlnym twierdzeniem. (s. 102).

Jak widać z powyższych tekstów Church uważał CT za definicję. W jego stylizacji można CT wypowiedzieć następująco:

CT Pojęcie funkcji efektywnie obliczalnej jest identyczne z pojęciem funkcji rekurencyjnej.

Church był zwolennikiem istnienia obiektów abstrakcyjnych jak na przykład; pojęć, sensów, znaczeń i rozważania ich własności. W artykule: *The Need for Abstract Entities* (1951)[2], którego

[2] *American Academy of Arts and Sciences Proceedings*, 80(1951), ss. 100–113.

wersje właściwie pisał do końca swego życia, formułuje aksjomaty swej teorii. Oto niektóre z nich:

- Każde pojęcie, jest pojęciem co najwyżej jednej rzeczy.
- Każda stała ma jedyne (unique) pojęcie jako swój sens.
- Każda zmienna ma niepustą klasę pojęć jako swoją dziedzinę sensu (sense–range).
- Denotacją stałej jest to czego sens stałej jest pojęciem.

Church, w *The Need for Abstract Entities*, odżegnuje się od rozumienia pojęć w takim sensie, jak Frege. Mówiąc ogólnie, próbuje on wyeliminować fregowskie pojęcie funkcji (jako przedmiotu nienasyconego w tym pojęć (*Begriff*)) na korzyść sensów. Podobnie rozumiał rzecz Husserl. Należy tutaj zauważyć, że w sformułowaniu CT występuje angielskie słowo *notion*, a nie słowo *concept*. Ten drugi termin, w obrębie logiki, wydaje się mieć bardziej techniczny charakter. Biorąc zatem pod uwagę poglądy Churcha z roku 1951 należałoby przyjąć, że CT w naszym powyższym sformułowaniu jest fałszywa, bo (jak się wydaje) sensy terminów ‘funkcja efektywnie obliczalna’ oraz ‘funkcja rekurencyjna’ są różne. Różnica pomiędzy poglądami Fregego i Husserla (i Churcha) dotyczyła denotacji dla *słów pojęciowych*[3]. Schematycznie wygląda to następująco[4]:

FREGE	HUSSERL
Termin nazywający pojęcie	Termin nazywający pojęcie
↓	↓
Sens tego terminu	Sens tego terminu (pojęcie)
↓	↓
Denotacja tego terminu (pojęcie)	Denotacja terminu (obiekt)
↓	
Obiekt, który podpada pod pojęcie	

[3]Słowo pojęciowe to termin nazywający pojęcie.

[4]Por. G.R. Haddock, ‘Remarks on Sense and Reference in Frege and Husserl’, s. 31; [w:] *Hussel or Frege?*, C. Ortiz Hill, G.R. Haddock, Open Court 2003.

Czy wobec tego CT w przyjętym sformułowaniu da się uratować? Georg Kreisel[5] zwrócił uwagę na to, że analiza obliczalności dokonana przez Turinga prowadzi do uznania mocniejszej (od zwykłej równoważności) relacji pomiędzy efektywną obliczalnością funkcji a rekurencyjnością. Tę mocniejszą wersję Kreisel nazywa *Supertezą Churcha*:

SCT Każdej mechanicznej regule (lub algorytmowi) można przypisać program (idealnego) komputera, który definiuje *ten sam* proces obliczeniowy (który definiuje reguła).

Jeśliby CT wyrażała tylko równoważność materialną dwóch pojęć, to SCT wyraża to właśnie, i dodatkowo więcej, wskazując na identyczność (izomorfizm) kroków obliczeniowych[6]. Church zdawał sobie sprawę z wagi CT. W artykule *A Note on the Entscheidungsproblem*[7] pisze:

> W ostatnim artykule [Chodzi o artykuł *An Unsolvability...*; AO] autor zaproponował definicję potocznie (commonly) używanego terminu ‘efektywnie obliczalny’ i pokazał na bazie tej definicji, że rozwiązanie ogólnego przypadku Entscheidungsproblemu jest nierozwiązywalne w żadnym systemie logiki symbolicznej (of symbolic logic), który jest adekwatny do wyrażenia pewnej części arytmetyki i jest omega–niesprzeczny [Davis, s. 110].

To, co niemal powszechnie uchodzi za tezę Churcha tzn. zdanie mówiące, że *każda funkcja efektywnie obliczalna jest funkcją*

---

[5]Por. G. Kreisel, ‘Some Reasons for Generalizing Recursion Theory’, ss. 139–198, odcinek 4.(c).(i) ; [w:] *Logic Colloqium ’69*, Gandy, Yates (eds.), North Holland 1971.

[6]Dla lepszej intuicji: SCT = CT + I; gdzie I jest jakimś intensjonalnym komponentem.

[7] *The Journal of Symbolic Logic*, 1(1936) [Davis, ss. 110–115].

rekurencyjna jest właściwie wersją Kleenego CT[8]. Uczeń Churcha — Kleene — bardzo wiele zdziałał dla CT. Jako pierwszy uporządkował argumenty za CT i przeciw niej. Sam argumentował za CT. Jak napisał, stal się zwolennikiem CT w ciągu jednego wieczoru, kiedy próbował zdiagonalizować klasę funkcji rekurencyjnych i okazało to się niewykonalne. Wersja Kleenego, w kontekście logiki pierwszego rzędu i teorii mnogości, prowadzi do utożsamienia CT ze zdaniem wyrażającym identyczność klasy funkcji rekurencyjnych z klasą funkcji efektywnie obliczalnych.

Church rozwiązał negatywnie tzw. *Entscheidungsproblem* postawiony przez Hilberta i Ackermanna. Dowiódł twierdzenia o (absolutnej) nierozstrzygalności dla logiki pierwszego rzędu. W publikacji zawierającej ten dowód wyraźnie (jak widzieliśmy) powołuje się na CT (definicję) jako założenie dowodu. Negacja twierdzenia o nierozstrzygalności logiki pierwszego rzędu skutkuje negacją CT. Odifreddi rozróżnia pomiędzy *zwykłą nierozstrzygalnością* a *absolutną nierozstrzygalnością*. Ta druga jest własnością teorii związaną z CT. Zwykła nierozstrzygalność polegałaby jedynie na (np.) nierekurencyjności twierdzeń logiki. W przypadku zwykłej nierozstrzygalności mamy do czynienia z nie[[...]] gdzie na miejsce [[...]] należy wstawić nazwę konkretnego modelu obliczalności. Takie twierdzenia posiadają ścisłe dowody i nie odwołują się do CT.

Gödel rozróżniał matematykę obiektywną (M1) i matematykę subiektywną (M2). Ta pierwsza dotyczyć ma prawdziwych twierdzeń matematyki jako takiej, zaś ta druga twierdzeń w obrębie jakiegoś systemu formalnego. Przyjmując to rozróżnienie, można zapytać jak duża część M1 zależy od CT. Zdefiniujemy zbiór Z, który nazwiemy *Zasięgiem obowiązywania CT*:

$$\mathrm{Z} = \{\mathrm{T}\colon {\sim}\mathrm{T} \Rightarrow {\sim}\mathrm{CT}\}.$$

[8] Jeśli tekst Churcha dopuszcza przyjęte przeze mnie rozumienie CT, to tekst Kleengo z ‘Introduction to Metamathematics’ już takiej interpretacji nie dopuszcza. Ściśle rzecz biorąc Church w paragrafie pierwszym ‘*An Unsolvable...*’ formułuje CT podobnie jak Kleene.

Jest to zbiór tych twierdzeń M1, których negacje implikują negację CT (których negacje falsyfikują CT). Oczywiście natychmiast pojawiają się pytania dotyczące rozumienia znaku =¿. Intuicyjnie rzecz biorąc zachodzi T $\Rightarrow$ T', gdy z założenia T uda się wyprowadzić T' za pomocą logiki. Zbiór Z jest niepusty bo oczywiście CT należy do Z. Kleene (za Webbem) wykazał, że pierwsze twierdzenie Gödla o niezupełności również należy do Z. Twierdzenie o nierozstrzygalności logiki pierwszego rzędu również należy do Z. Starałem się pokazać, że twierdzenie Tarskiego o niedefiniowalności prawdy także należy do Z[9]. Wspomniane powyżej twierdzenia o *absolutnej* nierozstrzygalności niektórych problemów (teorii) należą do Z, w tym twierdzenie o nierozstrzygalności logiki pierwszego rzędu.

Genialny Hilbert zdawał sobie sprawę z istnienia nauki pierwotniejszej od matematyki. Byłaby to nauka o podmiocie — matematyku. Sformułował nawet aksjomat tej nauki[10].

> [...] Aksjomat Myślenia lub, jak mógłby ktoś powiedzieć, Aksjomat Istnienia Inteligencji, może być w przybliżeniu sformułowany jak następuje: Ja mam możność myśleć rzeczy i oznaczać je poprzez proste znaki ($a, b; ..., X, Y, ...; ...$) w pełni charakterystyczny sposób tak; że mogę je zawsze jednoznacznie powtórnie rozpoznać. Moje myślenie operuje tymi rzeczami za pomocą ich oznaczeń [Bezeichnung] w pewien sposób, zgodny z określonymi prawami. Ja mogę się nauczyć tych praw poprzez samoobserwację, i opisać je zupełnie.

[9]Por. A. Olszewski, 'Teza Churcha a definicja prawdy Tarskiego', *Analecta Cracoviensia*, 33(2001), ss. 171–176.

[10]Cytuję za M. Hallett, *Hilbert's Axiomatic Method and the Laws of Thought*, Mathematics and Mind, A. George, 1994. Cytat ten pochodzi z wykładów Hilberta z roku 1905 o tytule *Logische Prinzipien des mathematischen Denkens*, notatki z wykładu zrobione przez Ernsta Hellingera. Notatki z tego samego wykładu robił także Max Born

> [...] an *Axiom of Thought* or as one can say, an *Axiom of the Existence of an Intelligence*, which can be formulated approximately as follows: I have a capability to think *things* and to denote them through simple signs ($a, b; ..., X, Y, ...$) in such a fully charakteristic way that I can unequivocally recognise them again. My thinking operates with these things in this designation [Bezeichnung] in a ceratin way according to determinate laws, and I am capable of learning these laws through self–observation, and of describing them completely.

Aksjomat ten można rozbić na następujące części:

AH1. Ja Myślę.
AH2. Myślę rzeczy (lub o rzeczach)[11].
AH3. Za pomocą (prostych) znaków mogę:

(a) oznaczać nimi pomyślane rzeczy.

(b) rozpoznawać ponownie uczynione znaki.

(c) dobierać znaki w sposób (do)wolny.

AH4. Prawa operowania pojęciami rzeczy i operowania znakami mogę opisać zupełnie.
AH5. Mam zdolność samorefleksji.

Jak Hilbert rozumiał znaki (w szczególności cyfry) nie jest całkiem jasne. Znakami są na przykład |, ||, |||, ||||, itd. Są pierwotne i niesprowadzalne do innych logicznych pojęć. Są pierwotne uchwytywalne w przedstawieniu (in der Vostellung). Cyfry nie są jednak fizycznymi obiektami, czyli wystąpieniami kresek na papierze (na przykład). Według Hilberta ich kształt może być w ogólności w sposób pewny rozpoznany przez nas, niezależnie od czasu, przestrzeni, specjalnych warunków produkcji znaków i od nieznaczących różnic w finalnym produkcie. Nazywa znak

[11] W angielskim tłumaczeniu tekstu Hilberta jest: *to think things*.

tym samym, gdy ma taki sam kształt jak inny ustalony znak[12]. Hilbert dalej utożsami liczby z ciągami kresek (cyframi) z tym, że kreski są tutaj zupełnie przypadkowe. Budulec cyfr może być dowolny. Jak odróżnić zatem to co jest cyfrą od tego co nią nie jest?[13] Znaki nie są również umysłową konstrukcją, gdyż ich własności są obiektywne, chociaż ich istnienie jest zależne od ich intuicji (w sensie Kanta). Co zatem jest jasne w każdym przypadku to to, że są one **logicznie pierwotne** tzn. nie są ani pojęciami (jak liczby Fregego), ani zbiorami. To co ważne tutaj, to nie ich metafizyczny status lecz to, że nie wchodzą one w relacje logiczne, na przykład nie mogą być orzekane o czymkolwiek. William Tait w znanej pracy *Finitism*[14] analizując charakter cyfr u Hilberta (szczególnie ich rozróżnialność) przypuszcza, że należy je interpretować jako cyfry–typy (w odróżnieniu od cyfr–tokens). Według niego to właśnie typy (znaków) są przedmiotem zainteresowania matematyki[15]. W *Aksjomacie Myślenia* Hilbert uchwycił moment rozpoznawania znaków w części **AH3** (b). Rozpoznawanie znaków znaczy dwie rzeczy: rozpoznawanie ich jako uczynionych przeze mnie (przypominanie) oraz drugie bardzo ważne odróżnianie różnych znaków od siebie i identyfikowanie tych samych znaków. W tym miejscu można postawić pytanie o to jak mocny jest **AH**. Otóż, co może być zaskoczeniem, **AH3** (b) zawiera tak dużo treści, że można z niego wyciągnąć definicję obliczalności. Grzegorczyk w pracy *Decidability without Mathematics*[16] podał definicję Elementarnej Rozróżnialności (ER) i Ogólnej Rozróżnialność (RO). Jego rozważania dotyczą

[12]D. Hilbert, 'Neubegründung der Mathematik. Erste Mitteilung', s. 163; [w:] 'Gesammelte Abhandlungen', t. III, Berlin, Springer, 1935, ss. 157–177.

[13]Por. R. Zach, 'Hilbert's Finitism', <http://www.ucalgary.ca/ ~rzach/ papers/ hilbert.pdf>.

[14]W. Tait, 'Finitism', *The Journal of Philosophy*, (1981), ss. 524–546. Szczególnie strony 538–540.

[15]Terminologia ta nawiązuje do angielskich określeń: sign–tokens i sign–type.

[16]Dostępne w sieci: <http://www.calculemus.org/>.

tekstów skończonych zapisanych z użyciem skończonej liczby (15) symboli podstawowych (atomowe teksty). Za dane przyjął operację konkatenacji (składania) tekstów (symbolem A!B oznacza tekst złożony z tekstu A i bezpośrednio po nim następującego tekstu B) oraz relację zawierania się tekstu w tekście; A<B znaczy tekst A zawiera się w tekście B.

Def. Elementarnej Rozróżnialności (EO):
1. Każdy singleton którego elementem jest atomowy tekst jest EO.
2. Relacja identyczności pomiędzy tekstami jest EO.
3. Relacja konkatenacji ! pomiędzy tekstami jest EO.
4. Relacja inkluzji < pomiędzy tekstami jest EO.
5. Konwers relacji będącej EO jest również EO.
6. Dodanie nowych argumentów (bez żadnych warunków ich dotyczących) nie wyprowadza poza klasę EO.
7. Identyfikacja argumentów nie wyprowadza poza klasę EO.
8. Jeśli relacja R jest EO, to nonR jest również EO.
9. Jeśli R, S mają tyle samo argumentów i są EO, (R lub S) jest EO.
10. Jeśli R jest co najmniej jednoargumentowa i jest EO, to S zdefiniowana: S(A,...) wtw dla dowolnego tekstu B<A, R(B,...).

Def. Ogólnej Rozróżnialności (RO). Relacja ta spełnia warunki 1–10 oraz:

11. Relacja R jest RO wtw istnieją dwie relacje S i T, które są RO oraz;
R(A,...) wtw istnieje takie B, że S(A,...,B),
nonR(A,...) wtw istnieje takie B, że T(A,...,B).

Definicje te odnosząc się do tekstu, zatem złożonego systemu znaków, wydają się eksplikować treść zawartą w **AH3** (b). Grzegorczyk dowodzi, że klasa tych relacji jest identyczna z klasą relacji ogólnie rekurencyjnych (s. 12–13). Jest to o tyle zaskakujące, że pozornie słabe założenie zawiera w sobie tak wiele treści. Przyglądając się definicjom Grzegorczyka nie sposób uniknąć wrażenia, że są one tak konstruowane, by objęły klasę relacji rekurencyjnych. Zarzut Kreisla o możliwość popełniania tzw. *systematycznego błędu* (systematic error), skierowany przeciwko argumentowi z równoważności sformułowań różnych modeli obliczalność, mógłby tutaj dobrze pasować. Filozoficzny wniosek jaki można wyciągnąć z pracy Grzegorczyka, mający zastosowanie dla rozważań o CT, jest taki, że **AH3** (b) założenie rozróżnialności znaków (obecne zresztą w analizie Turinga) pełni fundamentalną rolę w charakteryzacji funkcji obliczalnych. Inne modele obliczalności zakładają je implicite.

Aksjomat Hilberta części **AH1** mówi o zdolności do myślenia. Na czym polega to, że człowiek myśli próbują odpowiedzieć różne teorie umysłu. Jedna z nich komputacyjna teoria umysłu twierdzi, iż umysł człowieka jest w istocie (uniwersalną) maszyną Turinga. Myślenie jest według tej teorii właściwie obliczaniem. **AH1** można wobec tego przetłumaczyć na **AH1** Ja myślę = ja obliczam. **AH2** wyjaśnia co obliczamy. Myślę rzeczy, czy też o rzeczach. I tutaj pojawia się problem związany z TC. Mianowicie w TC mowa jest o rzekomo dwóch pojęciach utworzynych w umyśle człowieka, o których TC stanowi, iż są naprawdę jednym pojęciem. Jeśli myślę, i moje wewnętrzne doświadczenia coś w ogóle mi mówią, to z jednej strony myślę o liczbach naturalnych i funkcjach, postrzegając je jako pochodzące z idealnej sfery rzeczywistości. Jawią mi się one jako abstrakty (obiekty abstrakcyjne). Mamy tutaj do czynienia z jakąś formą platonizmu. Ostatecznie nie potrzebuję znaków, żeby coś o tej rzeczywistości powiedzieć i żeby wykształcić sobie jakieś **pojęcie obliczalności** w tych liczbach. Dodatkowym argumentem za takim postawieniem sprawy są fenomenalni ludzie, którzy potrafili liczyć na bardzo dużych liczbach w pamięci. Klasycznym przykładem jest hinduski matematyk Ramanujan odkryty przez G. Hardyego. Z drugiej strony operując na rzeczach, na przykład na zbiorach kamieni, a w szczególności na znakach, czyli przedmiotach doświadczenia utworzonych przeze mnie, mogę również liczyć. Mogę je dodawać, odejmować i wykonywać jeszcze inne operacje. Mają one charakter mechaniczny. W niektórych przypadkach wiem, ze uzyskam określony wynik, jeśli wszystko wykonam porządnie. Grzegorczyka definicja odróżnialności tekstów (znaków) dotyczy tej właśnie sfery doświadczenia człowieka i jest równoważna rekurencyjności. Wiem tez, że są takie operacje na rzeczach zewnętrznego świata, gdzie wynik jest dla mnie nie do przewidzenia. Kiedy rzucam monetą, to czy wypadnie orzeł czy reszka, nie jest dla mnie jasne. Wiem, że wypadnie któreś z nich. Nie wszystko mogę zatem obliczać co dotyczy sfery zewnętrznego doświadczenia. Z tej jednak sfery pochodzi drugie **pojęcie obliczaności**.

W obu przypadkach, to znaczy zarówno w moim wewnętrznym doświadczeniu liczb i wytworzonego w tym kontakcie pojęcia obliczalności (Obliczalność1), jak i w pojęciu obliczalności (Obliczalność2) wytworzonym w wyniku doświadczenia zewnętrznego, jestem ograniczony naturą mojego myślenia. Moje myślenie, o czym wiem z mojej zdolności samorefleksji (**AH5**), decyduje o tym co jest, a co nie jest obliczalne. Można przyjąć, że w takim przypadku (obliczalna) natura mojego myślenia decyduje o identyczności tych dwóch pojęć obliczalności, genetycznie wywodzących się z dwóch różnych światów. (Obliczalność1) = (Obliczalność2). Ten zarys argumentu, przy założeniu komputacyjnej teorii umysłu i AH, ma wskazywać na prawdziwość TC.

Ze znakami sprawa wydaje się być jednak jeszcze bardziej złożona. Hofstadter krytykuje w swoim artykule ‘Metafont’[17] filozoficzny pogląd Donalda Knutha, że dzięki pojawieniu się komputerów wszystkie możliwe litery ‘A’ mogą zostać (przez abstrakcję) *uchwycone w postaci skończenie parametryzowalnej obliczeniowej struktury – pewnej ‘software machine’ posiadającej skończoną liczbę ‘gałek do strojenia’*[18] oraz to, że każde wyobrażalne ‘A’ jest produktem takiej maszyny, gdy ustali się wartości odpowiednich

[17]D. Hofstadter, ‘Metafont, Metamathematics, and Metphysics’, *Visible Language*, 16(1982), ss. 309–338.

[18]Hofstadter, *op. cit.*, s. 310.

parametrów. To samo, według Knutha, ma dotyczyć innych platońskich obiektów. Hofstadter nazywa ten pogląd *matematyzowaniem kategorii.* Twierdzi, że wypełnienie 'przestrzeni' zdefiniowanej przez takie kategorie jak litery 'A', 'fotel', czy 'walc' wymagają aktu nieskończonej kreatywności[19]. Od strony matematycznej taka 'przestrzeń' jest tzw. *zbiorem produktowym.* Podstawowym przykładem takiego zbioru jest zbiór (numerów gödlowskich) wszystkich twierdzeń arytmetyki prawdziwych w standardowym modelu. Fakt ten jest implikowany przez twierdzenia Gödla o niezupełności. Twierdzenia te dowodzą, że próba skompresowania zbioru wszystkich zdań prawdziwych arytmetyki do rekurencyjnie przeliczalnego zbioru zdań jest niemożliwa. Ścisła definicja tego wysoce interesującego pojęcia jest następująca:

Def. Zbiór (liczb naturalnych) A jest **produktowy** jeśli istnieje funkcja rekurencyjna f taka, że dla dowolnego x:

$$W_x \subset A \Rightarrow f(x) \in A - W_x,$$

gdzie W_x jest dziedziną funkcji częściowo rekurencyjnej (zbiorem rekurencyjnie przeliczalnym) o indeksie x. Pozostałe symbole mają zwykłe znaczenie[20]. Mówiąc swobodnie zbiór produktowy A to taki, dla którego istnieje taka funkcja rekurencyjna f, że dla dowolnego jego podzbioru W (wypisywalnego na liście) funkcja f **wyliczy** (efektywnie) element, który należy do dopełnienia W względem A[21]. Hofstadter argumentuje za tym, że *istota* litery 'A' nie posiada charakteru geometrycznego. Podejście topologiczne, według niego, zawodzi. Uważa, przeciwnie niż Hilbert, że określenie tej 'przestrzeni' przez posiadanie 'tego samego kształtu' nie rozwiązuje problemu. Skłania się ku poglądowi o platońskim charakterze bytu nazwanego literą 'A'.

[19] Tamże.

[20] Por. P. Odifreddi, 'Classical Recursion Theory', North Holland, 1999, s. 306.

[21] To ciekawe pojęcie może mieć zastosowanie w kwestii nazw o nieostrej ekstensji. Nie znam jednak takich zastosowań

Wydaje się, że problem za znakami jest dość trudny. Skupia się w nim wiele wątków technicznych i filozoficznych (problem uniwersaliów?).

AH3 (c) zezwala na swobodę w operowaniu znakami. W niektórych przypadkach, gdy rozróżnienie znaków nie jest praktycznie możliwe, odwołujemy się do kontekstu (i znaczenia tekstu) dla rozpoznania znaku.

AH4 jest wyrazem optymizmu poznawczego Hilberta. Twierdzenia Gödla o niezupełności i (zaliczane do twierdzeń limitacyjnych) twierdzenie Skolema–Löwenheima wskazują na fałszywość **AH4.**

Z punktu widzenia CT, w wersji przyjętej w niniejszej pracy, kluczowe wydaje się rozwinięcie **AH2** w postaci dojrzałej (podobnej do tej jak Grzegorczyk rozwinął **AH3** (b)). Jednak niestety wiemy na ten temat zbyt mało, choć rozwijające się (częściowo) empirycznie ugruntowane teorie umysłu pozwalają oczekiwać wielu nowych odkryć. Zakończymy cytatem z Gandy'ego wypowiedzianego w podobnym kontekście: *One can only keep an open mind*[22].

SUMMARY

SOME REMARKS CONCERNING CHURCH'S THESIS AND HILBERT'S AXIOM

Some facts concerning Church's Thesis are first reminded, then Hilbert's Axiom of Thought is formulated. Hilbert proposed this axiom in 1905. He believed that it belongs to a domain of knowledge that is prior with respect to mathematics. An attempt is made to apply this axiom to some considerations concerning Church's Thesis.

[22]R. Gandy, 'Church's Thesis and Principles for Mechanisms', [w:] *The Kleene Symposium*, J. Barwise, H.J. Keisler, K. Kunen (eds.), North Holland, 1980, ss. 123–148.