Jerzy Kaczmarek

P. Bernaysa koncepcja poznania matematycznego

Zagadnienia Filozoficzne w Nauce nr 42, 28-51

2008

Zagadnienia Filozoficzne
w Nauce
XLII (2008), 28–51

Jerzy Kaczmarek
Wydział Filozoficzny KUL, Lublin

P. BERNAYSA KONCEPCJA POZNANIA MATEMATYCZNEGO

Klasyczne kierunki filozofii matematyki: logicyzm, intuicjonizm i formalizm dają jednowymiarowe i statyczne obrazy matematyki. Pomijają one zagadnienia genezy, kontekstu odkrycia i przemian zachodzących w matematyce. Traktują ją jako dziedzinę rozwijającą się w wyniku kumulatywnego gromadzenia niepodważalnych twierdzeń. Ich celem jest ustalenie trwałego fundamentu dla matematyki, którą uważa się za wiedzę pewną.

W latach sześćdziesiątych XX wieku pojawiły się w sposób wyraźny inne tendencje badawcze w odniesieniu do filozoficznych podstaw matematyki. Są one związane z koncepcjami quasi-empirycznymi, uwzględniającymi wpływy szeroko pojętego doświadczenia w procesie fundowania matematyki. Rzecznicy tych koncepcji interesują się aktualną praktyką badawczą uczonych. Uwzględniają aspekt historyczny i heurystyczny matematyki. Na gruncie nowych stanowisk dostrzega się, że praktyki badawcze w matematyce i w naukach przyrodniczych mają wiele cech wspólnych. Matematyka, podobnie jak fizyka, nie jest niepodważalna i rozwija się poprzez rewizję i korektę starych teorii. W ramach nowych koncepcji mówi się dużo o praktycznej użyteczności idei matematycznych, która jest czynnikiem uzasadniającym wartość matematyki. Nie akcentuje się tu już aspektu normatywnego, lecz opisuje się akceptowane przez matematyków środki i metody badawcze oraz uwzględnia się podmiot epistemiczny.

W ramy quasi-empirycznych koncepcji filozofii matematyki wpisują się poglądy I. Lakatosa, M. Kline'a, W.V. O. Quine'a, H. Putnama, R.L. Wildera, A. Mostowskiego czy L. Kalmára[1].

Analogiczne do nich stanowisko zajmował również F. Gonseth i P. Bernays. Swoje poglądy z filozofii matematyki Gonseth sformułował już w latach dwudziestych XX wieku. Następnie rozwijał je w ramach filozofii otwartej, z którą z kolei Bernays zetknął się i zaakceptował dwadzieścia lat później.

Metanaukowe poglądy P. Bernaysa ulegały zmianom. Mając to na uwadze, artykuł został podzielony na dwie zasadnicze części. W pierwszej przedstawia się filozoficzne inspiracje i zorientowanie ewolucyjnych zmian jego poglądów. Natomiast w drugiej, dłuższej części, zrekonstruowano Bernaysa poglądy epistemologiczne z okresu jego inspiracji Gonsethowską filozofią otwartą. Jest to końcowa i najbardziej dojrzała faza ewolucji jego twórczości z zakresu epistemologii matematyki.

1. INSPIRACJE FILOZOFICZNE I EWOLUCJA POGLĄDÓW

Paul Isaak Bernays (1888–1977) studiował w Berlinie matematykę, filozofię i fizykę teoretyczną. Słuchał wykładów I. Schur'a, E. Landau'a, L. Frobeniusa, K. Stumpfa, E. Cassirera i M. Plancka. Następnie w Getyndze brał udział w wykładach D. Hilberta, H. Weyla, F. Kleina, M. Borna, W. Voigta i L. Nelsona.

Paul Bernays przez wiele lat (1917–1934) pracował pod kierunkiem Hilberta i rozwijał myśl twórcy formalizmu. Owocem ich wspólnej działalności twórczej jest dwutomowa monografia *Grundlagen der Mathematik*, Springer, t. I, Berlin 1934, t. II 1939. Przedstawia się tam sposoby ugruntowania matematyki w oparciu o hilbertowski formalizm[2]. Zawarty tam program Hilberta wyraża sprzeciw wobec nakładania na matematykę jakichkolwiek ograniczeń[3].

[1]R. Murawski, „Wstęp", [w:] *Współczesna filozofia matematyki*, ss. 29–31.
[2]G. Heinzmann, *Paul Bernays et philosophie ouverte*, ss. 19–20.
[3]T. Batóg, *Bernays Paul Isaac (1888–1977)*, ss. 160–164.

Filozoficzna myśl Bernaysa ewoluuje od teoriopoznawczych poglądów zaczerpniętych od L. Nelsona i J.F. Friesa do epistemologii otwartej lansowanej przez F. Gonsetha.

Fries uprawiał psychologiczno — antropologicznie interpretowany kantyzm. Z kolei Nelson kontynuował metodę krytyczną Kanta w wersji przekształconej przez Friesa. Według Nelsona filozofia krytyczna opierać się ma na zaufaniu do metody naukowej. Uważał, że problemu obiektywnej ważności poznania nie można rozstrzygać, stosując takie kryteria, jak: zgoda powszechna, oczywistość czy użyteczność[4].

Weylowskie idee podejmowane i rozwijane przez Gonsetha i Bernaysa to: dostrzeganie w matematyce przejawu działalności twórczej człowieka i uwzględnianie w genezie poznania matematycznego istotnej roli doświadczenia i intuicji[5]. Według Weyla nauka oddala się coraz bardziej od poznania potocznego. Wskazuje on również na wzajemne oddziaływania zachodzące pomiędzy nauką, kulturą, doświadczeniem i filozofią czy też między faktami, konstrukcjami a ideami[6]. Bernays również i do tych poglądów twórczo nawiązuje w swoich publikacjach.

Neokantysta E. Cassirer uważał system filozofii Kanta za zbyt statyczny i wąski. W odniesieniu do tego poglądu Bernays optował za zmiennością ujęć intuicyjnych, a Gonseth dodatkowo stał na stanowisku fenomenologii otwartej. Cassirer zajmował się teorią pojęć uwzględniającą zmiany w myśleniu naukowym. Uważał, że treścią pojęć naukowych są relacje i struktury, że podstawa poznania nie polega na stwierdzaniu faktów, lecz wymaga założeń teoretycznych[7]. Bernays idee te podjął i rozwijał.

W szczególności koncepcją rozwijaną przez Bernaysa i współcześnie kontynuowaną i dyskutowaną jest strukturalizm. Głosi on, że matematyka bada struktury, a nie wyizolowane obiekty. Te ostatnie występują we wzajemnych relacjach i są jedynie elementami w struk-

[4]W. Dłubacz, *Fries Jakob Friedrich*, ss. 642–643; tenże, *Nelson Leonard*, ss. 567–570.

[5]E. Piotrowska, *Między matematyką a fizyką*, ss. 166, 168.

[6]J. Dembek, *Przestrzeń i nieskończoność*, ss. 119–123.

[7]Z. Kuderowicz, *Ernst Cassirer jako filozof kultury*, ss. 231–235.

turach. Stanowisko takie jest dostrzegane w pracach R. Dedekinda, B. Russella, D. Hilberta, N. Bourbakiego oraz M. Resnika, S. Shapiro i G. Hellmana[8].

Jednym z prekursorów strukturalizmu był L. Brunschvicg. Uważał on, że proces unifikacji matematyki może nastąpić w wyniku badania jej struktur algebraicznych i topologicznych[9]. Pod koniec XIX wieku w swoich artykułach P. Duhem zauważył, że dzięki strukturom matematycznym mamy wgląd w funkcjonowanie rzeczywistości[10]. Właściwością myśli strukturalistycznej jest postrzeganie świata relacyjnie (a nie substancjalnie). Taki właśnie sposób badanie rzeczywistości G. Bachelard przypisuje myśli naukowej[11]. Natomiast w przypadku F. Gonsetha i J. Piageta logika, ujmowana jako „fizyka obiektów jakichkolwiek" (Gonseth) bądź "fizyka działań na obiektach jakichkolwiek" (Piaget), konstytuuje relacje zachodzące między dowolnymi obiektami. Zaś system takich relacji tworzy strukturę.

W *Remarques pour la philosophie de la mathématique*[12] Bernays wyraża stanowisko quasi-empiryzmu w kształtowaniu się podstaw nauki oraz skłania się ku pragmatyzmowi w nauce. Nawiązuje do gonsethowskiego rozumienia logiki jako ogólnej teorii obiektów i podejmuje ujęcie logiki jako „fizyki obiektu jakiegokolwiek". Akceptuje również Gonsetha koncepcję przemian dialektycznych zachodzących w nauce i w umyśle uczonego. Jest to idea procesu rozwojowego poznania naukowego, według której zachodzi schematyczna zgodność pomiędzy tym, co subiektywne, a tym, co obiektywne; pomiędzy tym, co abstrakcyjne, a tym, co konkretne; pomiędzy tym, co racjonalne czy teoretyczne, a tym, co rzeczywiste czy eksperymentalne.

Odwołując się do gonsethowskiej fenomenologii otwartej, Bernays odrzuca kantyzm i zrywa z neokantowskimi poglądami L. Nelsona i J.F. Friesa. Np. w artykule: *Points de vue sur le problème de*

---

[8]R. Murawski, „Wstęp", [w:] *Współczesna filozofia matematyki*, ss. 38 n.
[9]A. Lemańska, *Wybrane zagadnienia z filozofii matematyki*, s. 213.
[10]M. Heller, *Kosmologia i rzeczywistość*, s. 142.
[11]G. Bachelard, *Le nouvel esprit scientifique*, s. 4.
[12]P. Bernays, *Remarques pour la philosophie de la mathematique*, ss. 193–198.

l'évidence[13] Bernays dostrzega mankamenty apriorystycznej koncepcji Nelsona i Friesa i optuje za gonsethowską ideą niewystarczalności powoływania się na oczywistość w nauce oraz za uwzględnieniem w poznaniu naukowym działalności umysłu. Opowiada się po stronie dynamicznych interakcji czynników naukotwórczych wpływających na zmiany zachodzące w obszarze przedstawień intuicyjnych i rozumu. Mówi o ewolucji oczywistości matematycznych, wywołanej zmianami przyjmowanych założeń.

Od końca lat 30-tych XX wieku współpraca między Bernaysem a Gonsethem była bardzo ścisła. Wyrażała się ona w organizowaniu wspólnych kolokwiów (Entretiens de Zurich), w zakładaniu odpowiednich struktur akademickich, w wydawaniu wspólnego czasopisma. Dodatkowo Bernays umożliwił niewidomemu Gonsethowi poznanie aktualnych technik badawczych stosowanych w podstawach matematyki. Z kolei Gonseth dostarczał Bernaysowi odpowiedniego kontekstu filozoficznego do jego badań matematycznych[14].

Bernays i Gonseth wraz z K. Dürrem i K.R. Popperem założyli L'Union Internationale de Logique, de Methodologie et de Philosophie des Sciences.

W latach 40-tych Bernays wiąże się ze szkołą Gonsetha zwaną „Szkołą Zurichu" bądź „Szkołą Dialectica", która przeciwstawiała się epistemologicznym poglądom m.in. racjonalizmu kartezjańskiego, Koła Wiedeńskiego i aprioryzmu kantowskiego.

Od 1947 roku Bernays, Gonseth i G. Bachelard rozpoczęli wydawanie czasopisma *Dialectica*, na łamach którego dawali wyraz swoim nowatorskim poglądom z zakresu filozofii nauki[15]. W pierwszym jego numerze Bernays oznajmia akceptację teoriopoznawczych poglądów Gonsetha, mówiąc „o naszej szkole filozofii otwartej"[16].

Współczesny filozof G. Heinzmann zauważa, że Bernays zainteresował się gonsethowskim idoneizmem nie tyle w wyniku studium

---

[13] P. Bernays, *Points de vue*, ss. 105–111.
[14] G. Heinzmann, *Paul Bernays et la renovation des fondements*, s. 3.
[15] G. Heinzmann, *Paul Bernays et philosophie ouverte*, ss. 19–20.
[16] P. Bernays, *Contradiction*, „Dialectica", s. 308.

samej epistemologii, ale pragnąc rozwiązać problemy, które napotkał wraz z Hilbertem w badaniach nad podstawami matematyki[17].

Na Premiers Entretiens de Zurich (1938) Bernays w duchu gonsethowskim zwrócił uwagę, że brak jest wyraźnej linii demarkacyjnej rozgraniczającej to, co pewne od tego, co wątpliwe[18].

Bernays aktywnie uczestniczył w tworzeniu słynnego programu D. Hilberta. Zauważył, że kryzys matematyki powstały w wyniku pojawienia się m.in. twierdzeń limitacyjnych nie zagrażał rozwojowi samej matematyki. To, co zostało zakwestionowane, to nasze wczwśniejsze idee dotyczące matematyki, nasze teorie poznania matematycznego. Bernays wiele artykułów poświęca właśnie temu ostatniemu zagadnieniu[19].

Jego stanowisko cechuje pluralizm punktów widzenia w odniesieniu do przedmiotu badania. W całym okresie swojej twórczości (zarówno w latach trzydziestych jak i siedemdziesiątych) niezmiennie uwzględnia potrzebę wielu stanowisk ujmujących podstawy matematyki. Uważa, że kwestię ujęcia podstaw matematyki nie wyczerpuje żadne stanowisko monistyczne, takie, jak logicyzm, formalizm czy intuicjonizm. Problemy fundamentów matematyki domagają się kombinacji różnych punktów widzenia. Według Bernaysa matematyka to nie tylko gra symboli. W poznaniu matematycznym liczy się także intuicja i poczucie pewności. Jego zdaniem w analizie metoda matematyczna zawiera pewien rodzaj intuicyjności i pewności, których nie można nabyć w operacjach czysto formalnych[20].

Bernays głosi zasadę pluralizmu w filozofii matematyki. Zauważa potrzebę przyjęcia zarówno intuicjonizmu jak i metod platonistycznych. Np. intuicjonizm jest przydatny dla teorii liczb, metoda półplatonistyczna (posługująca się ideą ogółu liczb całkowitych) nadaje się dobrze do teorii liczb rzeczywistych, a zwykły platonizm jest odpowiedni dla geometrycznej teorii kontinuum. Stanowisko takie jest

[17]G. Heinzmann, *Paul Bernays et philosophie ouverte*, s. 23.

[18]Tamże.

[19]H.B. Sinaceur, *Introduction*, ss. 8, 11.

[20]P. Bernays, *Symposium sur les fondements*, s. 212.

szczególnie widoczne w *Sur le platonisme en mathématique*[21], gdzie pojawia się również podsumowanie i ocena sporów filozoficznych o naturę matematyki w pierwszej połowie XX wieku.

Bernays uwzględnia pragmatyczny status matematyki. Według niego racjonalność nauki wiąże się z osiąganiem nie tyle pewności absolutnej (początkowo przyjmowanej przez program Hilberta), co pewności praktycznej. Pewność praktyczna dotyczy samej matematyki i należy ją odróżnić od pewności empirycznej, która z kolei dotyczy aplikacji matematyki[22].

Świat obiektów matematycznych wchodzi w zakres doświadczenia umysłu. Matematyka nie jest rezerwuarem wiedzy apriorycznej, jest wynikiem aktywności umysłu reagującego na sytuacje dostarczane przez konstrukcje idei przyswajanych czy adoptowanych przez system[23].

Metanaukowa koncepcja Bernaysa jest również podobna do poglądów J. Cavaillesa. Obaj szukali stanowiska pośredniego pomiędzy platonizmem pożądanym w rozważaniach zbiorów nieskończonych i struktur abstrakcyjnych, a empiryzmem pragmatycznym podyktowanym przez rozwijającą się praktykę matematyczną[24].

2. EPISTEMOLOGIA OTWARTA

P. Bernays (przed Kuhnem) zdawał sobie sprawę, że dokonująca się w nauce rewizja polega na wprowadzeniu nowego systemu pojęciowego i nie można jej sprowadzać jedynie do kwestii ustalania prawdziwości czy fałszywości twierdzeń[25].

Jego zdaniem obniżenie wartości pojęcia prawdy nie jest metodologiczną konsekwencją niewspółmierności pojęciowej teorii opartych

[21] P. Bernays, *Sur le platonisme*, s. 89.
[22] H.B. Sinaceur, *Introduction*, s. 13.
[23] Tamże, s. 14.
[24] Tamże, s. 15.
[25] P. Bernays, *Grundsätzliches*, „Dialectica”, s. 274; G. Heinzmann, *Paul Bernays et philosophie ouverte*, s. 24.

na odmiennych paradygmatach. Fakt ten jest raczej związany z epistemologiczną konsekwencją uznawanej teorii poznania[26].

Bernays rezygnuje z kantowskiego podziału zdań na analityczne i syntetyczne, którego trudności są już dziś dobrze znane za sprawą filozoficznej twórczości W.V. O. Quine'a. W zamian optuje za wprowadzeniem rozróżnienia elementów teorii uzasadnionych formalnie i w sposób obiektywny (przedmiotowy)[27]. Od razu widać tu, jaki wpływ na epistemologiczną twórczość Bernaysa wywarły niepowodzenia hilbertowskiego formalizmu. Nie mogąc wykazać w sposób czysto formalny niesprzeczności układu tez, trzeba odwoływać się do modeli semantycznych. W ten sposób Bernaysowi udało się powiązać Gonsethowską zasadę rewizji z zasadą dualności uwzględniającą wzajemne relacje pomiędzy elementami teoretycznymi i empirycznymi. O wzajemnej interakcji zachodzącej pomiędzy elementami języka teoretycznego i obserwacyjnego mówił także H. Poincaré[28].

Przyjmuje się tutaj holizm metodologiczny, który jest dość znamienny w filozofii otwartej. Informacja dotycząca rzeczywistości transcendentnej nie jest bezpośrednim odzwierciedleniem danych czysto empirycznych. Bernays przeciwstawia się poglądom neopozytywistycznym dotyczącym czysto empirycznych podstaw nauki. Mówi, że organizacja doświadczenia musiałaby być zupełnie odmienna od naszej, ażeby mogła być owocna teoria ściśle bazująca na ujęciu tego, co jest zgodne z bezpośrednią percepcją podmiotu poznającego. Teorie nie są efektem wyłącznie naszych instynktownych dyspozycji, lecz i tego, co dodaje twórcza aktywność naszego umysłu reagującego na zmieniające się uwarunkowania teoretyczne i empiryczne[29]. W analizie procesu poznawczego nie należy rozdzielać elementów racjonalnych i empirycznych. Stąd nie należy się zgadzać ze stanowiskiem stwierdzającym, że iluzja jest jedynie fałszywą interpretacją zarejestrowanych samych danych empirycznych. Nasze doświadczenie nie

[26] G. Heinzmann, *Paul Bernays et philosophie ouverte*, s. 24.
[27] Tamże.
[28] Tamże.
[29] P. Bernays, *Existence mathématique*, s. 114.

wyczerpuje się na czystych wrażeniach zmysłowych. Bernays wyciąga dalsze konsekwencje z zasady dualności, mówiąc, że nie ma zasadniczej różnicy (zdecydowanej granicy) między mitem a teorią naukową. Występuje tu różnica stopnia rozwinięcia elementu racjonalnego. Stąd też w nauce potrzebne jest wyostrzenie krytycyzmu i - zgodnie z zasadą rewizyjności — otwarcie się na doświadczenie[30].

Według Bernaysa występuje korelacja pomiędzy racjonalnością a empirycznością. To, co empiryczne nie może być przeciwstawiane temu, co racjonalne. To, co empiryczne jest przeciwstawiane systemom czy zasadom apriorycznym. Natomiast to, co racjonalne jest z kolei przeciwstawiane naszej zdolności doznawania wrażeń. Doświadczenie nie jest czysto zmysłowe. W odniesieniu do matematyki Bernays mówi o „doświadczeniu umysłowym”[31].

Dzięki skorelowaniu empiryczności z racjonalnością w nauce rewizja nie polega już na krytyce danych zmysłowych przez rozum, ale na rewizji poznania wcześniejszego z punktu widzenia wiedzy późniejszej (pod jakimś względem lepszej)[32].

Za Gonsethem Bernays uwzględnia tworzenie struktur matematycznych dzięki procesowi schematyzacji danej dziedziny rzeczywistości. Dzięki tej procedurze istnieje możliwość badania wielu dziedzin podobnych strukturalnie, ale różnych pod względem ich zawartości treściowej. W tym stadium badawczym rozróżnia się jeszcze „aksjomatyzację schematyzującą” i „aksjomatyzację strukturującą”. Te dwa sposoby aksjomatyzacji znajdują się na różnych poziomach abstrakcji. „Aksjomatyzacja schematyzująca” zawiera język zaangażowany ontologicznie, w którym stosuje się nazwy własne. Natomiast w „aksjomatyzacji strukturującej” obiekty są utożsamiane z elementami struktury, którą z kolei wyraźnie określa układ aksjomatów. Obiekty są tu poznawane jedynie jako elementy struktury. Modele semantyczne,

---

[30]G. Heinzmann, *Paul Bernays et philosophie ouverte*, s. 25; P. Bernays, *Quelques points*, „Synthese”, s. 321.

[31]G. Heinzmann, *Paul Bernays et philosophie ouverte*, s. 25; P. Bernays, *Dritte Gespräche von Zurich*, „Dialectica”, s. 131.

[32]G. Heinzmann, *Paul Bernays et philosophie ouverte*, s. 26; P. Bernays, *Grundsätzliches*, „Dialectica”, s. 276.

które spełniają taki układ aksjomatów są ujmowane jako zawartość empiryczna struktury. One realizują strukturę. Stanowią — jak chce Bernays, a przed nim Gonseth — jej „znaczenie zewnętrzne”[33].

Przyjmując zasadę dualności, Bernays i Gonseth odrzucają R. Carnapa opozycję pomiędzy językiem teoretycznym a językiem obserwacyjnym. Język obserwacyjny nauki odnosi się do zastanych stanów poznawczych, do wcześniejszych przedstawień i pojęć uprzednich, w których jest już zawarty aspekt teoretyczny. Bernays za Gonsethem mówi, że to, co empiryczne i to, co teoretyczne nie jest odseparowane, lecz konstytuuje dwa aspekty przedmiotu poznania[34]. Te dwa języki są ze sobą powiązane już w swojej genezie. Pomiędzy nimi zachodzi korespondencja schematyczna, która tworzy się za sprawą takich procedur, jak „aksjomatyzacja schematyzująca” i „strukturująca”.

Procedury schematyzacji i strukturalizacji konstytuują zdaniem Bernaysa dwa „horyzonty obiektywności”, które pozostają we wzajemnej ze sobą zależności. Bernays nie stosuje Gonsethowskiego terminu: „horyzont rzeczywistości”, ponieważ nie uważa, ażeby matematyka mogła być sprowadzana do rzeczywistości w jakimkolwiek bądź znaczeniu tego terminu. W ten sposób wychodzi on poza empiryzm H.L. Helmholtza i idzie w kierunku intuicji intelektualnej[35]. Rewizja pojęcia „horyzontu rzeczywistości” (aspektu ontologicznego teorii) i zwrócenie się w stronę aspektu epistemologicznego pojęcia obiektywności wnosi pewien rozwój do filozofii otwartej. Ujednolicając płaszczyznę badania do sfery poznawczej, nie miesza się aspektu ontologicznego i epistemologicznego na gruncie metanaukowych rozważań. Takie zrewidowanie Gonsethowskiego ujęcia rzeczywistości i skierowanie się ku obiektywności stanowi według G. Heinzmanna istotny postęp, jaki Bernays wnosi do epistemologii otwartej[36].

Heinzmann również zauważa, że zdaniem Bernaysa matematyka sformalizowana nie może być pozbawiona elementu intuicyjnego. Ro-

---

[33]F. Gonseth, *Le problème du temps*, s. 159; P. Bernays, *Remarks*, „Dialectica”, s. 50.

[34]P. Bernays, *Sur le rôle de la langue*, s. 189.

[35]P. Bernays, *Überlegungen zu F. Gonseth’s Philosophie*, „Dialectica”, ss. 125 n.

[36]G. Heinzmann, *Paul Bernays et philosophie ouverte*, ss. 27–28.

dzi się tu jednak pytanie, czy ufność pokładana w intuicji nie stanowi swego rodzaju rehabilitacji kartezjańskiej koncepcji odwoływania się w poznaniu naukowym do oczywistości jako do kryterium prawdy. Jednakże według Bernaysa również oczywistość podlega ewolucji[37].

Na jednym ze swoich odczytów Bernays (za Gonsethem) mówi, że matematyczne ujęcie jakiejś dziedziny przyrody polega na utworzeniu jej schematu. Takie teorie matematyczne odpowiadają rzeczywistości transcendentnej na zasadzie korespondencji schematycznej. Konstruowane schematy posiadają swoją strukturę wewnętrzną. W ten sposób matematyka może być pojmowana jako ogólna nauka dotycząca takich struktur[38].

W ujęciu Bernaysa pojęcie dialektyki posiada nieco inne znaczenie niż u Gonsetha. Gonsethowska dialektyka wiąże się ze zmianą czy modyfikacją wzajemnie wpływających na siebie elementów (teoretycznych, empirycznych i intuicyjnych). Jest to niczym dialog, czy konfrontacja stanowisk, w wyniku której jest możliwe skorygowanie bądź odrzucenie którejś ze stron (np. jakiejś opcji teoretycznej). Natomiast dialektyka rozważana przez Bernaysa nie jest konfrontacją opozycyjnych stanowisk czy wykluczających się stanów rzeczy, lecz jest komplementarnością ujęć teoretycznych czy aspektów metodologicznych. Egzemplifikacją takiego stanowiska jest relacja pomiędzy teorią falową i teorią korpuskularną, które są ujęte w ramach teorii kwantowej[39]. Stanowiska takie jest z kolei bliskie G. Bachelarda ujęciu dialektyki poznania naukowego.

Odejście od metanaukowego stanowiska Kartezjusza czy Kanta uwolniło matematyków od permanentnej troski o zgodność ich koncepcji z danymi oczywistości intuicyjnej, od troski, która bez wątpienia opóźniła zrodzenie się geometrii nieeuklidesowych i akceptację ich naukowego charakteru. Uwolnienie się matematyki od danych oczywistych zaowocowało powstawaniem systemów abstrakcyjnych.

[37] G. Heinzmann, *Paul Bernays et la renovation des fondements*, s 2.

[38] P. Bernays, *Language, Mathematics and Knowledge*, (Lecture given at Princeton University, April 25, 1956), Manuscrit, Archives H. Poincaré, Nancy.

[39] G. Heinzmann, *Paul Bernays et la renovation des fondements*, s. 8.

Jednakże, jak zauważa Bernays czy E.W. Beth, intuicja nie utraciła całkowicie swojego znaczenia dla matematyków. Chociaż respektowanie oczywistości stwarzało pewne niebezpieczeństwa dla rozwoju matematyki i hamowało rozwój systemów abstrakcyjnych, to jednak powoływanie się na intuicję okazywało się również źródłem owocnych ukierunkowań heurystycznych[40].

Przy tej okazji Bernays wyraźnie podkreśla, że idea osiągnięcia pewności absolutnej jest iluzoryczna dla myśli ludzkiej. Zamiast niej zdobywamy „pewność praktyczną" w wyniku zastosowania i wykorzystywania wiedzy[41].

Zasadą metodologiczną akceptowaną przez Bernaysa jest, aby w punkcie wyjścia procesu badawczego nie przyjmować idei absolutnego gwarantowania prawdziwości jakiemuś twierdzeniu, ale, aby poprzestać na takim uzasadnieniu sądów czy rozumowań, które uznamy za zadowalające w tym też oprzeć się na oczywistości odnoszącej się do przedmiotu poznania. Oczywiste może być np. istnienie przedmiotu czy zachodząca relacja między obiektami czy ich własnościami[42].

Bernays jednakże zauważa, że oczywistość nie jest elementem poznawczym niezmiennym w intelektualnej historii ludzkości. Inuicyjna oczywistość podlega wpływom doświadczenia. Gonseth powiedziałby, że nasza intuicja jest otwarta na szeroko pojete doświadczenie. W oparciu o nowe założenia wynikające z rozwoju poznania naukowego nabywamy nowe intuicje tego, co oczywiste, które mogą wyeliminować intuicje wcześniejsze. Intuicyjne takie nie mają charakteru natywistycznego — są nabywane przez podmiot. Intuicja badacza jest skorelowana z rozwojem wiedzy i szeroko pojętym doświadczeniem. Na skutek ich wzajemnego na siebie oddziaływania obserwuje się progresywną orientację przemian dokonujących się w nauce i w naszej umysłowości. Stanowisko takie jest zgodne z Gonsethowską filozofią otwartą.

[40]E.W. Beth, *L'Evidence acquise selon Bernays*, s. 137.
[41]P. Bernays, *Avant-propos*, s. 21.
[42]P. Bernays, *Quelques points*, „Synthese", s. 321.

W ramach oczywistości już oddalonych Bernays wymienia zapatrywania realizmu naiwnego oraz zasady fizyki perypatetyckiej. Jako przykład oczywistości nabytych, a które mogą zostać porzucone są przedstawione oczywistości dominujące w geometrii euklidesowej. Przy okazji Bernays zauważa, że w dziedzinie geometrii najbardziej pierwotny i fundamentalny charakter oczywistości relacji topologicznych. Stanowisko takie jest zbieżne z pogladami Betha[43].

Bernays zwraca również uwagę, że oczywistości doświadczenia potocznego nie zostały całkowicie wyeliminowane przez rozwijające się poznanie naukowe. Nadal towarzyszą nam w życiu codziennym. Są to Gonsethowskie niezbywalności. Doświadczenie naukowca i jego ukonstytuowana intuicja tworzy nowy zasób tego, co oczywiste.

Według Bernaysa niemal wszystkie oczywistości matematyczne są nabyte Formują się one w wyniku rozwoju matematyki zgodnie z Gonsetha procedurą dialektyki zakładającej wzajemnie korygujące oddziaływania naszego umysłu i nowych ustaleń nauki. Przemiany dialektyczne dokonują się wówczas w naszym umyśle, wpływając na korygowanie naszej wyobraźni. W pewnym stadium takiego wzajemnego dialektycznego rozwoju kształtują się nowe intuicyjne ujęcia tego, co oczywiste[44].

W poznaniu naukowym panuje tendencja do eliminacji oczywistości jako kryterium uzasadniającego akceptowanie twierdzeń. Bernays zgadza się z takim stanowiskiem. Jednakże chce dla niej zachować miejsce w heurystyce, w analogii i interpretacji. Uważa również, że nie można się obyć bez oczywistości dotyczącej relacji formalnych, które są niezbędne m.in. do kontrolowania funkcjonowania dialektyki czy do stwierdzania sprzeczności. Oczywistość wpisuje się także w proces badawczy nauk empirycznych. Jest ona związana z czynnością obserwacji jako sposób jawienia się przedmiotu podmiotowi.

Pragnąc zaś pozostać wiernym Gonsethowskiemu idoneizmowi, Bernays rekapituluje swoje rozważania na temat oczywistości mówiąc, że nie może być jedynym kryterium prawomocności poznania.

[43]E.W. Beth, *L'Evidence acquise selon Bernays*, ss. 137–138.
[44]P. Bernays, *Quelques points*, „Synthese”, ss. 322–324.

Potrzeba jeszcze ujęcia racjonalnego, racji argumentów przekonywających o słuszności czy zasadności danego stanowiska[45].

Według Bernaysa obiekty matematyczne należą do bytów idealnych. Nie przypisuje się im charakteru rzeczywistości konkretnej, istniejącej samej przez się. Przedmioty poznania matematycznego należą do tego typu obiektów, co rodzaje, jakości, konfiguracje formalne, normy, relacje, pojęcia. W procedurach badawczych oraz w rozważaniach na poziomie poznania potocznego mamy do czynienia z obiektami idealnymi. Bernays podkreśla, że stanowisko takie nie zawiera żadnego założenia co do sposobu istnienia rozpatrywanych przedmiotów, a w szczególności odnośnie ich istnienia autonomicznego[46]. Bernays odrzuca jako nieumotywowaną koncepcję platonizmu dotyczącą egzystencji obiektów matematycznych[47].

Przyjmuje zasadę dualności Gonsethowskiej epistemologii otwartej, wedle której czynniki racjonalne i empiryczne biorą udział w procesach poznawczych. Zasada ta ma również zastosowanie w poznaniu matematycznym. W matematyce i logice konstrukcje nie są ustanowione apriorycznie, ale formują się, wychodząc od pewnego rodzaju doświadczenia. Dziedziny te bazują na racjonalno — empirycznym punkcie wyjścia. Logika stanowi przez to, jak chce Gonseth, „fizyką obiektu akiegokolwiek”[48].

W przypadku poznania logiko — matematycznego Bernays mówi nie tyle o doświadczeniu, co o eksperymentowaniu myślowym. Eksperymentowanie to ma polegać na próbach dobierania procedur metodologicznych aplikowanych do wymogów rozważanego problemu. Konsekwencją takiego postępowania jest pluralizm konkurencyjnych ujęć przedmiotu badanego. Taki stan rzeczy na gruncie matematyki jest analogiczny do występowania teorii konkurencyjnych (równoważnych empirycznie), które spotyka się w dziejach nauk przyrodniczych[49].

[45]Tamże, ss. 325–326.

[46]P. Bernays, *Existence mathématique*, ss. 114–115.

[47]Tamże, s. 124.

[48]Tamże, ss. 115, 122–123.

[49]Tamże, s. 123.

Stosowane procedury metodologiczne dotyczą określonej dziedziny rzeczywistości matematycznej. Ale z drugiej strony sama rzeczywistość matematyczna jest niezależna od aplikowanych procedur metodologicznych. Np. struktury zawarte w geometrii euklidesowej są niezależne od metod ich ujmowania — od różnych ujęć aksjomatycznych. Określona dziedzina rzeczywistości matematycznej — np. struktury zawarte w geometrii euklidesowej — w badaniu teoretycznym odgrywają rolę tego, co dane i niezmienne[50].

Bernays analogicznie rozpatruje zagadnienia ontologiczne w matematyce. Twierdzenia dotyczące egzystencji bytów matematycznych są odniesione do kontekstu systemu myślowego, który pełni tu funkcje ram metodologicznych. Takie zrelatywizowanie twierdzeń jest niejako zrekompensowane przez fakt, że istotne własności rzeczywistości matematycznej ujmowane w ramach danych metod są niezmienne wobec partykularności (czy zmienności) tych metod. Rzeczywistość obiektów matematycznych wykracza poza wszelkie ramy metodologiczne (o ile całkowicie nie wyczerpuje się w nich). Ideę takiej autonomiczności bytów matematycznych Bernays nie utożsamia z koncepcją platonizmu[51].

Według Bernaysa przedmioty rozważań nauk przyrodniczych cechują się różnymi sposobami istnienia. Np. sposób istnienia rzeczywistości transcendentnej, relacji, praw przyrody, itd. Podobnie mówił również G. Bachelard. Natomiast w matematyce Bernays nie zauważa już takiego zróżnicowania bytów pod względem sposobu egzystencji. W rzeczywistości matematycznej istotne znaczenie mają relacje. W matematyce nie chodzi już o byt czy obiekty, lecz o zachodzące między nimi stałe związki strukturalne, które są niezależne od sposobu ich prezentowania za pomocą takich czy innych ujęć metodycznych[52].

W rozważaniach nad rozwojem matematyki Bernays uwzględnia aktywność umysłu ludzkiego. Nakreśla drogę postępowania matematycznego. Przyjmując konkretne obiekty w punkcie wyjścia, myśl ma-

---

[50]Tamże, s. 123.
[51]Tamże, s. 124.
[52]Tamże, ss. 124–125.

tematyczna przejawia się w ustalaniu i intuicyjnym ujmowaniu przedmiotu badania. Następnie za sprawą konceptualizacji tego, co zostało intuicyjnie ujęte i dzięki powiązaniom relacyjnym ukonstytuowanych twierdzeń, dochodzi się do określonych systemów matematycznych, które z kolei mogą być skutecznie aplikowane do danej dziedziny rzeczywistości. Przedmiot badań naukowych, zarówno w fizyce jak i w matematyce, nie jest nam z góry dany. Jest on determinowany teoretycznie. Powstaje w wyniku opracowań twórczych dokonywanych przez uczonych[53].

Analogiczny schemat genezy nauki przedstawia F. Gonseth i G. Bachelard. Gonseth dostrzega trzy aspekty nauki: aspekt intuicyjny, teoretyczny i eksperymentalny. Wszystkie one pod wpływem wzajemnych oddziaływań ulegają zmianie, która ma charakter rozwojowy. Gonseth mówi o obowiązującej w poznaniu naukowym metodologicznej zasadzie strukturalności i zasadzie integralności, aplikujących się do wyżej wymienionych elementów.

Podobnie jak twórca filozofii otwartej, Bernays zauważa, że w wyniku rozwoju matematyka traci charakter poznania potocznego, które to stanowiło jej punkt wyjścia. Wraz ze zmianami dokonującymi się na gruncie nauki, pod wpływem nowych założeń i asymilowanych doświadczeń, przemianom będzie też ulegała intuicja uczonego. W wyniku przemian powstaje też wiele systemów matematycznych, gdzie każdy z nich jest teorią jednej struktury egzystującej pośród innych struktur. A rozwój poznania matematycznego jest ukierunkowany na tworzenie ogólnej formalnej teorii struktur[54].

Bernays nie uważa za mankament połączenia w matematyce elementów intuicyjnych i formalnych. Według A. Heytinga łączenie tych dwóch czynników utrudnia rozważanie kwestii przedmiotu matematyki. Bernays sądzi, że konstrukcje systemów matematycznych i metamatematycznych polegają właśnie na umiejętnym powiązaniu elemen-

[53]P. Bernays, *La mathématique comme*, ss. 129, 132.
[54]Tamże, s. 131.

tów intuicyjnych, teoretycznych i formalnych. Takie holistyczne ujęcie jest zrealizowane np. w teorii liczb[55].

Bernays odrzuca pogląd I. Kanta, wedle którego struktury naszych możliwości poznawczych są determinowane podmiotowymi kategoriami apriorycznymi. Matematyczne ujęcie przyrody nie jest określone jedynie poprzez nasze pierwotne możliwości przedstawień intuicyjnych. Z tego punktu widzenia świat matematyczny wykracza poza kategorie umysłowe znajdujące się na poziomie poznania potocznego.

Uwzględnienie konstrukcyjnych możliwości naszego umysłu, możliwości przyswajania nowych ustaleń naukowych i uznawania ich za zrozumiałe, doprowadziło Gonsetha, a za nim i Bernaysa, do przyjęcia stanowiska fenomenologii otwartej. Nasze zdolności ujmowania intuicyjnego są otwarte na nowe doświadczenia i rozwijają się pod ich wpływem, poszerzając w ten sposób zakres możliwości rozumienia i konstruowania[56].

Krytykując metanaukowe poglądy R. Carnapa, Bernays przeciwstawia się traktowaniu nauki jako wytworu stanowiącego wiedzę już skończoną, optuje za uwzględnieniem genezy i rozwoju nauki oraz podkreśla ważność badań metodologicznych i rozważań heurystycznych. Odnosi się to zarówno do nauk empirycznych jak i matematycznych. Przy tej okazji Bernays powołuje się na poglądy G. Polya. Wskazuje on na jedność metodologiczną nauk matematycznych i przyrodniczych[57]. To ostatnie stanowisko jest również respektowane na gruncie Gonsethowskiej epistemologii otwartej.

Według Bernaysa w procesie poznawania podmiot odwołuje się (bardziej lub mniej świadomie) do wcześniejszych swoich poglądów i przekonań. Stanowią one nabyte wyposażenie intelektualne podmiotu, uprzednie — jak mawiał Gonseth — względem aktualnej sytuacji poznawczej. Nie ma ono statusu apriorycznej kategorii poznawczej ustanowionej odgórnie i raz na zawsze. W razie potrzeby następuje re-

[55]Tamże, ss. 132–133.
[56]Tamże, ss. 133–134.
[57]P. Bernays, *Sur le rôle de la langue*, ss. 177–179.

fleksja nad tym, co było uprzednie, w wyniku której mogą ulec zmianie wszelkie ustalenia wcześniejsze.

Metodyka postępowania badawczego nauki domaga się, ażeby uczynić przedmiotem badań to, co było uprzednie. Wówczas na miejsce uprzednich idei, np. poznania potocznego, przychodzą pojęcia i zasady specjalnie ustanowione jako wyjściowe czy pierwotne założenia systemu. Bernays sugeruje, że w ten sposób dokona się redukcja niepożądanych (np. subiektywnych czy potocznych) założeń i dziedzina tego, co uprzednie będzie stawać się coraz węższa[58].

W odróżnieniu od idei aprioryczności, która sugeruje elementy absolutnie pierwsze, pojęcie uprzedniości jest zrelatywizowane do danego stanu poznania bądź do danej dyscypliny.

Takie uświadomienie sobie istnienia wstępnych pojęć i założeń w procesie poznania oraz potrzeby ich badania i w razie konieczności korygowania lub eliminowania, może być postrzegane jako dokonujący się postęp nie tylko w teorii poznania naukowego, ale i w ogólnej filozoficznej refleksji nad naturą poznawania[59].

Bernays zauważa, że związki teorii z rzeczywistością transcendentną są dane poprzez różnorodne relacje. Np. relacje, w oparciu o które wprowadza się układ współrzędnych czasoprzestrzennych. Relacje, które są związane ze skutkami eksperymentalnymi wywieranymi przez stany systemu na nasze bezpośrednie percepcje. Czy wreszcie relacje, w wyniku których są dostarczane dane do zinterpretowania[60].

Według niego matematyka traktuje o strukturach możliwych, opracowanych w postaci systemów wyidealizowanych czy abstrakcyjnych. Natomiast logika zajmuje się warunkami i ogólnymi formami rozumowań.

Uważa on, że Quine'a w gruncie rzeczy słuszna argumentacja przeciwstawiania się podziałowi zdań na analityczne i syntetyczne nie rozpatruje faktu, że rozróżnienie to uwzględnia rzecz istotną. Mianowicie różnicę pomiędzy dyskursem matematycznym, a odmiennymi

---

[58]Tamże, s. 183.
[59]Tamże, s. 183.
[60]Tamże, s. 187.

od niego fizykalnymi aspektami badawczymi odnoszącymi się do empirii. Należy wziąć pod uwagę, że twierdzenia matematyczne bywają uzasadniane w sposób odmienny niż twierdzenia fizyki (w przypadku tych ostatnich szeroko uwzględnia się testy empiryczne)[61].

Matematyka, która zajmuje się strukturami w sposób ogólny, ma duże znaczenie dla innych dyscyplin naukowych. Bowiem we wszystkich dziedzinach badawczych mamy do czynienia ze strukturami. Są to struktury społeczne, ekonomiczne, ciał niebieskich, procesów życia, itd. Znaczenie matematyki dla innych nauk polega na aproksymatywnym reprezentowaniu procesów natury poprzez struktury matematyczne.

Matematyka zajmuje się strukturami wyidealizowanymi i jest zdominowana przez metodę dedukcyjną. W procesie idealizacji następuje konceptualizacja tego, co jest ujęte w sposób intuicyjny. Nie należy zatem ostro przeciwstawiać elementów intuicyjnych, temu, co dyskursywne (rozumowe)[62].

Bernays nie nadaje poznaniu matematycznemu cech pewności apriorycznej. Uważa, że w badaniach matematycznych musimy zdobywać i kierować się „doświadczeniem duchowym"[63]. O roli doświadczenia uczonego na gruncie nauk matematycznych mówił również Gonseth. Jednakże poznanie matematyki elementarnej charakteryzuje się zdaniem Bernaysa szczególną pewnością, ponieważ obiekty matematyczne są tu z jednej strony intuicyjnie oczywiste, a z drugiej strony zabieg idealizacji oddala nas od subiektywności.

Bernays zauważa, że racjonalność wcale nie musi się wiązać z osiągnięciem pewności. W przypadku rezygnacji z łączenia racjonalności z pewnością (a więc z kontekstem uzasadnienia) zyskamy możliwość docenienia racjonalności heurystycznej (związanej z kontekstem odkrycia), której rola dla rozwoju nauki jest nie do przecenienia[64].

[61] P. Bernays, *Remarques pour la philosophie*, s. 195.

[62] Tamże, ss. 195–197.

[63] Tamże, s. 197.

[64] Tamże, ss. 197, 198.

Odwołując się do poglądów Gonsetha, Bernays mówi, że w naukowym obrazie rzeczywistości nie osiągamy adekwatnego jej ujęcia, lecz jedynie — korespondencję schematyczną. Gonseth podkreśla, że przedstawienie rzeczywistości przez naukę jest jej reprezentacją schematyczną. Naukowe poznanie świata dostarcza różnych możliwych aspektów jej ujęć. Ujęcia te są schematyczne. To, co jest określone jako schematyczne, to „rekonstrukcja sytuacji lub procesu w deskrypcji teoretycznej"[65].

Poznanie naukowe jest schematyczne. Ustalone prawa są traktowane jako symboliczne aproksymacje tego, czego w rzeczywistości dotyczą. Schematyczny charakter poznania naukowego ujawnia się szczególnie podczas rozwoju nauki. Np. uważane w fizyce za fundamentalne prawo grawitacji I. Newtona okazało się konsekwencją aproksymatywną einsteinowskiej teorii grawitacji[66].

Schematyczny charakter ujęcia stanu rzeczy dotyczy procesów mikroskopowych, które kierują się prawami indeterministycznymi czy determinizmu statystycznego[67].

Możliwość schematycznego przedstawienia przedmiotu poznania przez teorie naukowe wskazuje, że struktura bardziej skomplikowana może być z powodzeniem zastąpiona dla osiągnięcia danych celów przez strukturę o dużo mniejszym stopniu skomplikowania. Teoria aproksymatywnie reprezentująca badaną dziedzinę rzeczywistości jest odpowiednia ze względu na określone potrzeby jej zastosowania[68].

Bernays ukazuje pewne ograniczenia epistemiczne związane ze schematyzacją procesu badawczego:

- Badania są zdeterminowane do określonej dziedziny rzeczywistości ograniczonej czaso — przestrzennie z niepełnym uwzględnianiem oddziaływującego otoczenia.
- W każdym stadium badań znane są tylko pewne rodzaje struktur, procesów, obiektów i zależności.

[65] P. Bernays, *La correspondance schématique*, s. 199.
[66] Tamże, s. 200.
[67] Tamże, s. 201.
[68] Tamże, s. 200.

- Jedynie poznane już aspekty przedmiotu epistemicznego można uwzględnić przy charakteryzowaniu jakiegoś stanu rzeczy.
- Pomimo znacznych postępów poznawczych w nauce nie ma przekonywających argumentów na rzecz osiągnięcia pełnej adekwatności epistemicznej.
- Schematy teoretyczne są spełniane jedynie aproksymatywnie przez określone układy rzeczywistości[69].

Matematyka może być uważana za teorię schematycznych ujęć struktur rzeczywistości. Przy takim ujęciu będzie uwzględniona istotna rola matematyki dla nauk przyrodniczych, opierająca się na korespondencji schematycznej zachodzącej pomiędzy strukturami matematycznymi a jej modelami semantycznymi. Struktury matematyczne otrzymuje się wówczas poprzez procedury idealizacji i abstrakcji, zastosowane wobec zjawiskowo ujętej rzeczywistości[70].

Jeśli przyjąć za Bernaysem, że matematyka jest nauką o wyidealizowanych strukturach rozważanej dziedziny rzeczywistości, to stanowisko takie broni przed koncepcją aprioryzmu i fikcjonalizmu w odniesieniu do fundamentów matematyki. W oparciu o takie stanowisko można wyjaśnić fakt możliwości aplikowania matematyki do nauk przyrodniczych (i poza przyrodniczych)[71].

LITERATURA

Bachelard G., *Le nouvel esprit scientifique*, Paris: Alcan 1934.

Batóg T., *Bernays Paul Isaac (1888–1977)*, [w:] *Przewodnik po literaturze filozoficznej XX wieku*, [red.] B. Skarga, t. 1, Warszawa: PWN 1994, ss. 160–164.

Bernays P., *Avant-propos*, [w:] tenże, *Philosophie des mathématiques*, (traduction de H.B. Siaceur) Paris: Vrin 2003, ss. 21–24.

[69]Tamże, ss. 200–203.
[70]Tamże, s. 203.
[71]Tamże, s. 210.

Bernays P., *Contradiction et non-contradiction*, „Dialectica” 1947/1, ss. 305–309.

Bernays P., *Existence mathématique et non-contradiction (1950)*, [w:] tenże, *Philosophie des mathématiques*, (traduction de H.B. Siaceur) Paris: Vrin 2003, ss. 113–127.

Bernays P., *Dritte Gespräche von Zurich*, „Dialectica” 1952/6, ss. 130–136.

Bernays P., *Grundsätzliches zur philosophie ouverte*, „Dialectica” 1948/2, ss. 275–279.

Bernays P., *Language, Mathematics and Knowledge*, (Lecture given at Princeton University, April 25, 1956), Manuscrit, Archives H. Poincaré, Nancy.

Bernays P., *La correspondance schématique et les structures idéalisées (1970)*, [w:] tenże, *Philosophie des mathématiques*, (traduction de H.B. Siaceur) Paris: Vrin 2003, ss. 199–210.

Bernays P., *La mathématique comme familière et inconnue à la fois (1955)*, [w:] Tamże, ss. 129–134.

Bernays P., *Points de vue sur le problème de l’evidence (1946)*, [w:] Tamże, ss. 105–111.

Bernays P., *Quelques points de vue concernant le problème de l’évidence*, „Synthese” 1946/5, ss. 321–329.

Bernays P., *Remarks to* , ‚the End of a Phase”, „Dialectica” 1963/16, ss. 49–50.

Bernays P., *Remarques pour la philosophie de la mathematique (1969)*, [w:] tenże, *Philosophie des mathématiques*, (traduction de H.B. Siaceur) Paris: Vrin 2003, ss. 193–198.

Bernays P., *Sur le platonisme en mathématique (1935)*, [w:] Tamże, ss. 83–98.

Bernays P., *Sur le rôle de la langue du point de vue épistémologique (1961)*, [w:] tamże, ss. 177–191.

Bernays P., *Symposium sur les fondements des mathématiques (1971)*, [w:] tamże, ss. 211–233.

Bernays P., *Überlegungen zu F. Gonseth's Philosophie*, „Dialectica" 1977/31, ss. 119–128.

Beth E.W., *L'Evidence acquise selon Bernays*, [w:] E.W. Beth, J. Piaget, *Epistémologie mathématique et psychologie*, Paris: PUF 1961, ss. 136–139.

Dembek J., *Przestrzeń i nieskończoność*, Kraków: Wydawnictwo Naukowe PAT 1994.

Dłubacz W., *Fries Jakob Friedrich*, [w:] *Powszechna encyklopedia filozofii*, t. 3, (E-G), Lublin: Polskie Towarzystwo Tomasza z Akwinu, 2002, ss. 642–643.

Dłubacz W., „Nelson Leonard", [w:] *Powszechna encyklopedia filozofii*, t. 7, (M-P), Lublin: Polskie Towarzystwo Tomasza z Akwinu, 2006, ss. 567–570.

Gonseth F., *Le problème du temps*, Neuchâtel: Griffon 1964.

Heinzmann G., *Paul Bernays et philosophie ouverte*, [w:] J. Gasser, H. Volken (eds.), *Logic and set theory in* 20^{th} *century Switzerland*, Bern 2001, ss. 19–29.

Heinzmann G., *Paul Bernays et la renovation des fondements philosophiques des mathématiques*, [w:] *Actes du Colloque Pensée et Science*, Cret-Berrard 2002, <http://www.univ-nancy2.fr>, s. 8 wydruku komputerowego.

Heller M., *Kosmologia i rzeczywistość*, [w:] *Nauka i wyobraźnia*, Kraków: Znak 1995, ss. 125–144.

Kuderowicz Z., *Ernst Cassirer jako filozof kultury*, [w:] tenże, *Filozofia współczesna*, t. 2, Warszawa: WP 1983, ss. 230–264.

Lemańska A., *Wybrane zagadnienia z filozofii matematyki*, [w:] A. Lemańska, M. Lubański, *Z zagadnień filozofii przyrodoznawstwa i filozofii przyrody*, Warszawa: UKSW 2004, ss. 113–230.

Murawski R., *Współczesna filozofia matematyki. Wybór tekstów*, Warszawa: 2002.

Piotrowska E., *Między matematyką a fizyką. Badania naukowe i refleksje filozoficzne Hermanna Weyla*, [w:] E. Piotrowska, D. Sobczyńska, *Między matematyką a przyrodoznawstwem*, Poznań: UAM 1999, ss. 159–184.

Sinaceur H.B., *Introduction de la traductrice*, [w:] tenże, *Philosophie des mathématiques*, (traduction de H.B. Siaceur) Paris: Vrin 2003, ss. 7–17.

SUMMARY

BERNAYS'S CONCEPTION OF MATHEMATICAL COGNIZANCE

Bernays's philosophical thought evolved from L.Nelson's and J.F.Frics's epistemological outlook to Gonseth's open epistemology (from the Kantian doctrine to open phenomenology). The paper is divided into two parts. The first part deals with philosophical inspirations and the evolution of Bernays' metascientific outlook. The second part considers his epistemological views from the period of inspiration by Gonseth's open philosophy. It is the final, mature stage of Bernays' evolution that is important for mathematical epistemology.