Jerzy Dadaczyński

Niejasności związane z Bernarda Bolzana ’definicją’ zbioru nieskończonego

Zagadnienia Filozoficzne w Nauce nr 44, 100-115

2009

Zagadnienia Filozoficzne
w Nauce
XLIV (2009), 100–115

Jerzy Dadaczyński
ul. Łagiewnicka 17, 41–500 Chorzów
dada59@poczta.onet.pl

NIEJASNOŚCI ZWIĄZANE Z BERNARDA BOLZANA „DEFINICJĄ" ZBIORU NIESKOŃCZONEGO

Jednym najgłośniejszych tekstów B. Bolzana jest 20. paragraf jego *Paradoxien des Unendlichen* wydanych pośmiertnie w roku 1851 w Lipsku. Jest tak dlatego, ponieważ czasami uważa się, za autorem uwag do drugiego wydania tej pracy H. Hahnem, że paragraf ten zawiera historycznie pierwszą antycypację Dedekindowskiej refleksywnej definicji zbioru nieskończonego. Możliwe jest jednak i takie odczytanie tekstu praskiego matematyka, które neguje taką antycypację, a także zupełnie „nowatorskie" odczytanie wspomnianego paragrafu, autorstwa twórcy alternatywnej teorii mnogości P. Vopěnki. Celem niniejszej pracy jest próba wyjaśnienia — wobec wielości interpretacji, szczególnie w dobie „povopěnkowskiej" — intencji, które wiązał B. Bolzano z tekstem 20. paragrafu *Paradoxien des Unendlichen*.

Przed przytoczeniem tekstu klasycznego paragrafu należy koniecznie wskazać najważniejsze tezy wcześniejszych paragrafów *Paradoxien des Unendlichen*, tak, by klasyczny tekst osadzić we właściwym kontekście. W poprzedzających paragrafach B. Bolzano twierdzi m.in., że:

[T1]: znaczenie terminu „nieskończoność” należy wydobyć z językowego sposobu używania (*Sprachgebrauch*) tegoż terminu[1];

[T2]: przymiotnik „nieskończony” można orzekać o zbiorach (i wielkościach)[2];

[T3(*implicite*)]: wszystkie elementy każdego zbioru można „ułożyć” w ciąg, który będzie posiadał element pierwszy[3];

[D1]: zbiór jest nieskończony wtedy i tylko wtedy, gdy wspomniany ciąg jego elementów nie posiada elementu ostatniego[4];

[T4]: istnieje zbiór nieskończony złożony elementów abstrakcyjnych — pozaczasowych i pozaprzestrzennych (np. zbiór zdań samych w sobie, zbiór prawd samych w sobie, zbiór liczb naturalnych, zbiór wielkości (tzn. liczb rzeczywistych))[5].

Należy zauważyć, że w paragrafach 1–19 *Paradoxien des Unendlichen* zawarta już jest B. Bolzana definicja zbioru nieskończonego. Jest to sformułowanie [D1], które zresztą posiada kształt definicji klasycznej. B. Bolzano doszedł do swej definicji nieskończoności (zbioru nieskończonego) przy pomocy narzędzi charakterystycznych później (w XX w.) dla filozofii analitycznej, tzn. przy pomocy analizy języ-

---

[1]Por. B. Bolzano, *Paradoxien des Unendlichen*, Meiner, Leipzig 1921[2], par. 2.

[2]Por. B. Bolzano, *Paradoxien des Unendlichen*, par. 2. Prowadzone współcześnie badania pokazały, że teoria, którą budował B. Bolzano, aby na niej oprzeć matematykę, są czymś „pośrednim” pomiędzy cantorowską teorią mnogości mereologią [por. F. Krickel, *Teil und Inbegriff. Bernard Bolzanos Mereologie*, Akademia Verlag, Sankt Augustin, 1994; J. Dadaczyński, *Bernard Bolano i idea logicyzmu*, Tarnów 2006]. Bolzanowskie znaczenie terminu „zbiór” (*Menge*) nie odpowiada zatem znaczeniu, które wiąże się z tym terminem w cantorowskiej tradycji teorii mnogości. Tym niemniej pokazano, że istnieje „przekład” z języka Bolzana na język Cantora, taki, że zbiory cantorowskie odpowiadają zbiorom Bolzanowskim, zaś Bolzanowskiej mereologicznej relacji bycia częścią całości odpowiada relacja inkluzji (cantorowskiego) podzbioru w (cantorowskim) zbiorze [por. J. Dadaczyński, *Bernard Bolano i idea logicyzmu*, s. 301–304]. Dlatego w niniejszym tekście — bez szkody, dla jego merytorycznej zawartości — posłużono się, zamiast Bolzanowskimi, cantorowskimi zbiorami, zaś wspomnianą relację mereologiczną zastąpiono inkluzją zbiorów nieskończonych.

[3]Por. B. Bolzano, *Paradoxien des Unendlichen*, par. 8, 9.

[4]Por. B. Bolzano, *Paradoxien des Unendlichen*, par. 9.

[5]Por. B. Bolzano, *Paradoxien des Unendlichen*, par. 13.

kowej. Odrzucił on inne definicje nieskończoności (np. zbiór nieskończony to zbiór niepowiększalny) i do końca tekstu *Paradoxien des Unendlichen* stosował konsekwentnie sformułowanie [D1] jako definicję nieskończoności.

To ostatnie stwierdzenie, w połączeniu ze spostrzeżeniem, że B. Bolzana „definicja" nieskończonego zbioru z klasycznego paragrafu 20. *Paradoxien des Unendlichen* nie posiada formy definicji klasycznej, prowadzi do stwierdzenia, że tekst wspomnianego paragrafu nie zawierał — według zamierzeń B. Bolzana — definicji zbioru nieskończonego. O tym, jaki sens chciał związać praski matematyk z klasycznym tekstem, musi rozstrzygnąć jego analiza.

Paragraf 20. *Paradoxien des Unendlichen* rozpoczyna się następująco (dla potrzeb czytelności analizy tekst rozbity został na cztery części [B1] — [B4]):

[B1]„Przejdźmy teraz do rozważenia wysoce osobliwej właściwości, która może zachodzić w relacji (*Verhältnisse*) dwóch zbiorów (*Mengen*) wtedy, gdy są one nieskończone, i właściwie zachodzi zawsze, a którą przeoczało się dotąd

[B2] ze szkodą dla poznania pewnych ważnych prawd metafizyki oraz fizyki i matematyki, i taką, że jeśli ją teraz sformułuję, to wyda się ona tak paradoksalna, że konieczne byłoby zatrzymanie się przy jej rozważaniu nieco dłużej.

[B3] Twierdzę mianowicie: dwa zbiory (*Mengen*), obydwa nieskończone, mogą pozostawać do siebie w takiej relacji (*Verhältnisse*), że, z jednej strony, możliwe jest połączenie każdego przedmiotu należącego do jednego zbioru (*Menge*) w parę z pewnym [przedmiotem — J. D.] drugiego [zbioru — J. D.], w ten sposób, że żaden pojedynczy przedmiot z obydwu zbiorów (*Mengen*) nie pozostanie niewłączony w jakąś parę i żaden [przedmiot — J. D.] nie wystąpi w dwu albo więcej parach;

[B4] z drugiej strony jest jednak przy tym możliwe, że jeden z tych zbiorów (*Mengen*) zawiera w sobie drugi jako część, tak że wielości (*Vielheiten*), które one [tzn. zbiory — J. D.] przedstawiają, jeśli potraktuje się ich [tzn. zbiorów — J. D.] przedmioty jako równe, tzn. jako jednostki, pozostają do siebie w wielorakich relacjach (*Verhältnisse*)”[6].

Gdyby — jako myślą przewodnią — kierować się tytułem pracy B. Bolzana, który sugeruje, że praski autor miał zamiar zestawić pewne paradoksy dotyczące nieskończoności, to należałoby zwrócić uwagę na fragment [B3] + [B4] paragrafu 20. Uzyskuje się wtedy następujący tekst:

[P20A] Twierdzę mianowicie: dwa zbiory (*Mengen*), obydwa nieskończone, mogą pozostawać do siebie w takiej relacji (*Verhältnisse*), że, z jednej strony, możliwe jest połączenie każdego przedmiotu należącego do jednego zbioru (*Menge*) w parę z pewnym [przedmiotem — J. D.] drugiego [zbioru — J. D.], w ten sposób, że żaden pojedynczy przedmiot z obydwu zbiorów (*Mengen*) nie pozostanie niewłączony w jakąś parę i żaden [przedmiot — J. D.] nie wystąpi w dwu albo więcej parach; z drugiej strony jest jednak przy tym możliwe, że jeden z tych zbiorów (*Mengen*) zawiera w sobie drugi jako część, tak że wielości (*Vielheiten*), które one [tzn. zbiory — J. D.] przedstawiają, jeśli potraktuje się ich [tzn. zbiorów — J. D.] przedmioty jako równe, tzn. jako jednostki, pozostają do siebie w wielorakich relacjach (*Verhältnisse*)”.

---

[6] „Übergehen wir nun zur Betrachtung einer höchst merkwürdigen Eigenheit, die in dem Verhältnisse zweier Mengen, wenn beide unendlich sind, vorkommen kann, ja eigentlich immer vorkommt, die man aber bisher zum Nachteil für die Erkenntnis mancher wichtigen Wahrheiten der Metaphysik sowohl als Physik und Mathematik übersehen hat, und die man wohl auch jetzt, indem ich sie aussprechen werde, in einem solchen Grade paradox finden wird, daß es sehr nötig sein dürfte, bei ihrer Betrachtung uns etwas länger zu verweilen. Ich behaupte nämlich: zwei Mengen, die beide unendlich sind, können in einem solchen Verhältnisse zueinander stehen, daß es einerseits möglich ist, jedes der einen Menge gehörige Ding mit einem der anderen zu einem Paare zu verbinden mit dem Erfolge, daß kein einziges Ding in beiden Mengen ohne Verbindung zu einem Paare bleibt, und auch kein einziges in zwei oder mehreren Paaren vorkommt; und dabei ist es doch andererseits möglich, daß die eine dieser Mengen die andere als bloßen Theil in sich faßt, so daß die Vielheiten, welche sie vorstellen, wenn wir die Dinge derselben alle als gleich, d. h. als Einheiten betrachten, die mannigfaltigsten Verhältnisse zueinander haben”, B. Bolzano, *Paradoxien des Unendlichen*, par. 20.

Tekst ten można „przełożyć" na język współczesnych podstaw matematyki następująco:

[InA] Możliwe jest, że istnieje jednojednoznaczne odwzorowanie zbioru nieskończonego *A* na zbiór nieskończony *B* i jednocześnie jeden z tych zbiorów jest podzbiorem właściwym drugiego.

Jest oczywiste, że taka możliwość stanowiła jeszcze dla matematyków i filozofów XIX wieku paradoks, znany skądinąd przynajmniej od czasów Galileusza. Warto też zwrócić uwagę na fakt, iż dalsza zawartość paragrafu 20. *Paradoxien des Unendlichen* potwierdza słuszność opatrzenia sformułowania interpretacji tekstu B. Bolzana [InA] modalnością „możliwe jest". B. Bolzano najpierw zapowiada dowód — co jest skądinąd kolejnym argumentem, że jego tekst [B1] — [B4] nie zawiera, w jego zamiarze, żadnej definicji nieskończoności (zbioru nieskończonego) — po czym pokazuje, że obustronnie domknięte przedziały liczb rzeczywistych (wg terminologii Bolzana: wielkości) [0, 5] i [0, 12] można jednojednoznacznie na siebie odwzorować i pierwszy przedział jest podzbiorem właściwym drugiego. To oczywiście wystarcza jako dowód możliwości [InA].

Na dotychczasowych badaniach można by zakończyć badania B. Bolzana „definicji" zbioru nieskończonego, dochodząc do następujących konkluzji:

— tekst 20. paragrafu *Paradoxien des Unendlichen* nie zawierał, w zamiarze autora, żadnej definicji zbioru nieskończonego;

— tekst ten zawiera jedynie opis pewnych paradoksalnych relacji, które mogą zachodzić pomiędzy zbiorami nieskończonymi (a które były już znane np. Galileuszowi);

— w związku z powyższymi uwagami wspomniany tekst nie powinien być interpretowany jako Bolzanowska antycypacja refleksywnej definicji zbiorów nieskończonych R. Dedekinda.

Jednakże publikacja w roku 1983 swoistej interpretacji niektórych fragmentów *Paradoxien des Unendlichen* dokonanej przez P. Vopěnkę nakazuje powrócić do analizy klasycznego tekstu B. Bolzana z 20. paragrafu *Paradoxien des Unendlichen*. Interpretacja P. Vopěnki implikuje przede wszystkim, że w analizie B. Bolzana „definicji" nieskończoności, należy się odwołać do całego tekstu [B1] — [B4], a nie tylko — jak to uczyniono wyżej — do jego fragmentu [B3] — [B4].

P. Vopěnka, starając się znaleźć w tekstach B. Bolzana filozoficzne uzasadnienie dla niektórych założeń budowanej przez alternatywnej teorii mnogości zamieszcza w swojej pracy[7] następujący cytat z *Paradoxien des Unendlichen*:

[P20B] „Przejdźmy teraz do rozważenia wysoce osobliwej właściwości, która może zachodzić w relacji (*Verhältnisse*) dwóch zbiorów (*Mengen*) wtedy, gdy są one nieskończone, i właściwie zachodzi zawsze, a którą przeoczało się dotąd. [...] Twierdzę mianowicie: dwa zbiory (*Mengen*), obydwa nieskończone, mogą pozostawać do siebie w takiej relacji (*Verhältnisse*), że, z jednej strony, możliwe jest połączenie każdego przedmiotu należącego do jednego zbioru (*Menge*) w parę z pewnym [przedmiotem — J. D.] drugiego [zbioru — J. D.], w ten sposób, że żaden pojedynczy przedmiot z obydwu zbiorów (*Mengen*) nie pozostanie niewłączony w jakąś parę i żaden [przedmiot — J. D.] nie wystąpi w dwu albo więcej parach”.

Cytat, którym posłużył się P. Vopěnka jest — jak łatwo to zauważyć — zestawieniem tekstów [B1] i [B3]. Co istotne, P. Vopěnka całkowicie pomija tekst [B4], „wyrywając” go ze zdania złożonego [B3] — [B4].

Z tekstu [P20B] wyciąga P. Vopěnka — istotny dla budowanej przez siebie alternatywnej teorii mnogości — wniosek interpretacyjny:

[InB] dla dowolnych zbiorów nieskończonych A i B zachodzi: A i B są równoliczne (istnieje (można skonstruować) jednojednoznaczne odwzorowanie A na B)[8].

Co, przy przechodniości relacji równoliczności zbiorów, prowadzi do ważnej dla P. Vopěnki przesłanki:

[InB’] wszystkie zbiory nieskończone są równoliczne (posiadają tę samą moc, liczbę kardynalną).

[7] Por. P. Vopěnka, *Zbiory aktualnie nieskończone*, tłum. z rosyjskiego R. Murawski, s. 150 (137–157), w: *Współczesna filozofia matematyki. Wybór tekstów*, wyb., przekł., koment. R. Murawski, PWN, Warszawa 2002.

[8] Por. P. Vopěnka, *Zbiory aktualnie nieskończone*, tłum. z rosyjskiego R. Murawski, s. 150–151.

Istotną zaletą interpretacji [InB] i [InB'] jest to, że — inaczej niż [InA] — uwzględniają one fragment [B1]. Przy tym interpretacje [InB] i [InB'] z dwóch możliwych interpretacji fragmentu [B1] nie wybierają tej,

[InB1A] która opiera się na sformułowaniu „może zachodzić",

ale tą,

[InB1B] która opiera się na sformułowaniu „(właściwie) zachodzi zawsze".

Należy zauważyć, że gdyby interpretacje P. Vopěnki [InB] uwzględniła interpretację fragmentu [B1] odwołującą się do [InB1A1], to miałyby one postać następującą:

[InBalt] istnieją zbiory nieskończone *A* i *B* takie, że *A* i *B* są równoliczne (istnieje (można skonstruować) jednojednoznaczne odwzorowanie *A* na *B*).

Porównanie [InB] i [InBalt] prowadzi do wniosku, że wybranie przez P. Vopěnkę w analizie 20. paragrafu *Paradoxien des Unendlichen* interpretacji [InB1B] zamiast [InB1A] prowadzi do zastosowania kwantyfikatora (kwantyfikatorów) ogólnego zamiast kwantyfikatora (kwantyfikatorów) egzystencjalnego.

Jednakże, mimo cennego uwzględnienia fragmentu [B1] tekstu B. Bolzana i zwrócenia uwagi na jego niejednoznaczność interpretacyjną ([InB1A], [InB1B]), sama interpretacja P. Vopěnki [InB] nie wydaje się właściwa. Dwa zasadnicze powody tej niewłaściwości są następujące:

— P. Vopěnka opuszcza istotny fragment [B4], który stanowi o tytułowej paradoksalności relacji między zbiorami;

— dowód — o którym już wspominano — jakim B. Bolzano opatruje tekst [B1] — [B4] nie jest dowodem twierdzenia ogólnego (opatrzonego kwantyfikatorem ogólnym), a takim jest zdanie [InB].

Poza tym pozostaje jeszcze kwestia tego, czy B. Bolzano uważał rzeczywiście twierdzenie o równoliczności wszystkich zbiorów nieskończonych [InB'] za prawdziwe i czy jest ono rzeczywiście prawdziwe na gruncie Bolzanowskiej „teorii mnogości".

Trzeba stwierdzić, że poza tekstem [B1] + [B3] (przy interpretacji [InB1B] i (nieuprawnionym) nieuwzględnieniu fragmentu [B4]) nigdzie w tekście *Paradoxien des Unendlichen* nie można się dopatrzyć twierdzenia, że wszystkie zbiory nieskończone są równoliczne.

Z drugiej strony, to poszukiwane przez P. Vopěnkę twierdzenie — potrzebne do uzasadnienia podstaw budowanej alternatywnej teorii mnogości — daje się, jak się wydaje, uzasadnić na podstawie zawartości *Paradoxiendes Unendlichen* (przy uwzględnieniu pewnych zasad Cantorowskiej teorii mnogości). Otóż z [T3(*implicite*)] i [D1] i przy uwzględnieniu Cantorowskiej zasady, że każdy **ciąg nieskończony** można „ponumerować” przy pomocy liczb naturalnych (tzn. każdy **ciąg nieskończony** jest równoliczny ze zbiorem liczb naturalnych) wynika, że wszystkie Bolzanowskie zbiory nieskończone są równoliczne (bo wszystkie one są równoliczne ze zbiorem liczb naturalnych). Trzeba jednak zaznaczyć, że to twierdzenie, które wynika z tekstu *Paradoxien des Unendlichen* B. Bolzana jest sprzeczne z twierdzeniem, które wynika z innych prac B. Bolzana, jeśli oczywiście zastosuje się do nich narzędzia Cantorowskiej teorii mnogości. Otóż badania historyczne pokazały, że B. Bolzano był pierwszym matematykiem, który prawidłowo — z dzisiejszego punktu widzenia — skonstruował *continuum* matematyczne — tzw. zbiór liczb mierzalnych (dzisiaj powiedziano by: zbiór liczb rzeczywistych)[9]. Dysponował on zatem — czego, nie mając wszystkich narzędzi Cantorowskiej teorii mnogości, nie mógł Bolano sam stwierdzić — zbiorem nieskończonym (w sensie Bolzana) nierównolicznym ze zbiorem liczb naturalnych. To oczywiście stoi w sprzeczności z wyprowadzonym z tekstów *Paradoxien des Unendlichen* twierdzeniem, że wszystkie nieskończone (w znaczeniu Bolzana) zbiory są równoliczne.

Po tych uwagach dotyczących poszukiwań inspiracji filozoficznej dla alternatywnej teorii mnogości P. Vopěnki w tekstach B. Bolzana należy powrócić do zasadniczej kwestii niniejszej pracy, tzn. do tego,

---

[9]Por. D. Laugwitz, *Bolzano's infinitesimal numbers*, “Czechoslovak Mathematical Journal” 32 [107] (1982), s. 667–670.

jaki sens wiązał praski matematyk z XIX w. ze swoją „definicją" zbioru nieskończonego z 20. paragrafu *Paradoxien des Unendlichen*.

Aby wykorzystać pozytywy interpretacji P. Vopěnki, należy w dalszej pracy nad tekstem „definicji" B. Bolzana uwzględnić istotny fragment tekstu [B1] i możliwość jego interpretacji „w duchu" [InB1B], zaś by wyeliminować wady interpretacji P. Vopěnki, należy koniecznie uwzględnić fragment [B4].

Wówczas otrzymuje się następujący tekst, „wyjęty" z 20. paragrafu *Paradoxien des Unendlichen*:

[P20C] „Przejdźmy teraz do rozważenia wysoce osobliwej właściwości, która **może zachodzić** [podkr. — J. D.] w relacji (*Verhältnisse*) dwóch zbiorów (*Mengen*) wtedy, gdy są one nieskończone, i **właściwie zachodzi zawsze** [podkr. — J. D.], a którą przeoczało się dotąd [...]. Twierdzę mianowicie: dwa zbiory (*Mengen*), obydwa nieskończone, mogą pozostawać do siebie w takiej relacji (*Verhältnisse*), że, z jednej strony, możliwe jest połączenie każdego przedmiotu należącego do jednego zbioru (*Menge*) w parę z pewnym [przedmiotem — J. D.] drugiego [zbioru — J. D.], w ten sposób, że żaden pojedynczy przedmiot z obydwu zbiorów (*Mengen*) nie pozostanie niewłączony w jakąś parę i żaden [przedmiot — J. D.] nie wystąpi w dwu albo więcej parach; z drugiej strony jest jednak przy tym możliwe, że jeden z tych zbiorów (*Mengen*) zawiera w sobie drugi jako część, tak że wielości (*Vielheiten*), które one [tzn. zbiory — J. D.] przedstawiają, jeśli potraktuje się ich [tzn. zbiorów — J. D.] przedmioty jako równe, tzn. jako jednostki, pozostają do siebie w wielorakich relacjach (*Verhältnisse*)"

Przy — jak to już zaznaczono — założeniu [InB1B] otrzymuje się następującą interpretację tekstu [P20C]:

[InC] dla dowolnych zbiorów nieskończonych A i B zachodzi: A i B są równoliczne i A jest podzbiorem właściwym B lub B jest podzbiorem właściwym A.

Jest to, w oczywisty sposób twierdzenie fałszywe, ponieważ dla dwóch (dowolnych) zbiorów nie zawsze zachodzi to, że jeden jest podzbiorem właściwym drugiego zbioru. Można by jeszcze ratować interpretację [InC] przez próbę zamiany drugiego członu koniunkcji na stwierdzenie, że jednojednoznaczny obraz *A'* zbioru *A* jest podzbiorem właściwym *B* lub jednojednoznaczny obraz *B'* zbioru *B* jest podzbiorem właściwym *B*, ale jest to z pewnością interpretacja za daleko odchodząca od intencji B. Bolzana (który nie posługiwał się pojęciem obrazu zbioru).

Istnieje jednak inne — lepsze, jak się wydaje — rozwiązanie zaistniałej sytuacji problemowej. Otóż wyrażenie „(właściwie) zachodzi zawsze” — na które zwrócił uwagę P. Vopěnka, i które „przełożył” w swej interpretacji [InB], przy pomocy kwantyfikatora (kwantyfikatorów) ogólnego na stwierdzenie „dla dowolnych (zbiorów nieskończonych)” — należy, jak się wydaje, interpretować mniej radykalnie. Zamiast dwóch — w istocie — kwantyfikatorów ogólnych, trzeba, by oddać myśl B. Bolzana, zastosować jeden kwantyfikator ogólny i jeden kwantyfikator egzystencjalny. Wydaje się to dobrze odzwierciedlać przejście B. Bolzana z [B1] od „może zachodzić” do „(właściwie) zachodzi zawsze”. Otrzymuje się wtedy bowiem, przy preferowanym przez P. Vopěnkę wyborze [InB1B] zamiast [InB1A], następująca interpretację tekstu [P20C]:

[InD] dla każdego zbioru nieskończonego *A* istnieje zbiór nieskończony *B*, taki, że *A* i *B* są równoliczne i *A* jest podzbiorem właściwym *B* lub *B* jest podzbiorem właściwym *A*.

Wartość tej interpretacji tekstu [P20C] polega na tym, że — przy znanym B. Bolzanowi fakcie, iż wyrażona w [InD] własność nie zachodzi dla żadnego skończonego (w sensie Bolzana) zbioru — pozwala uchwycić w tekście tę własność definicyjną zbiorów nieskończonych, którą w swej definicji refleksyjnej zbioru nieskończonego wykorzystał R. Dedekind. Był to jedna z popularnych sposobów odczytania tekstu [B1] — [B4][10], do czasu powstania pracy P. Vopěnki, który zupełnie inaczej rozumiał B. Bolzana „definicję” zbioru nieskończonego.

Jest jednak istotny argument świadczący o niesłuszności interpretacji [InD] tekstu [P20C]. Jak już kilkakrotnie wspomniano, własność

[10]Tak interpretował 20.paragraf *Paradoxien des Unendlichen* H. Hahn, którego uwagami zaopatrzone jest drugie wydanie pracy Bolzana (por. H. Hahn, *Anmerkungen zu Par. 20, 21*, w: B. Bolzano, *Paradoxien des Unendlichen*.

zawarta w tekście [P20C] (dokładniej: [B1] — [B4]) zaopatrzona jest przez B. Bolzana dowodem. Wykazanie, że przedział liczbowy [0, 5] jest równoliczny z przedziałem liczbowym [0, 12] i jednocześnie pierwszy przedział zawiera się w drugim, nie jest dowodem dla własności sformułowanej w [InD], która rozpoczyna się od kwantyfikatora ogólnego (po wszystkich zbiorach nieskończonych).

Trzeba przy tym zaznaczyć, że B. Bolzano może być uważany za pierwszego uczonego zajmującego się z powodzeniem teorią dowodu w dzisiejszym tego słowa znaczeniu, dlatego też użycie przez niego terminu „dowód" w 20. paragrafie *Paradoxien des Unendlichen* było z pewnością głęboko przemyślane.

Mimo, iż pozornie wydaje się, że ostatnia uwaga zdaje się przekreślać słuszność interpretacji [InD] tekstu B. Bolzana, to jednak można pokazać, że w istocie prowadzi ona do właściwego odczytania tegoż tekstu, w której interpretacja [InD] zostanie jednak uwzględniona.

Jeśli to, co B. Bolzano określa mianem „dowodu", rzeczywiście potraktować jako dowód jakiejś własności (twierdzenia) — a nie ma żadnych racjonalnych przesłanek, aby postąpić inaczej — to musi mieć ona postać następującą:

[InE] istnieje zbiór nieskończony A i istnieje zbiór nieskończony B, takie, że A i B są równoliczne i A jest podzbiorem właściwym B lub B jest podzbiorem właściwym A.

Interpretacja [InE] zatraca jednak — preferowaną przez P. Vopěnkę i przyjętą tutaj w kolejnych próbach rozumienia tekstu B. Bolzana — interpretację [InB1B] tekstu [B1] i przyjmuje w zasadzie interpretację [InB1A] tekstu [B1] (w istocie też [InE] nie odbiega od [InA], czyli analizy znalazłyby się w punkcie wyjścia). Ponieważ jednak pomiędzy [InB1A] i [InB1B] nie zachodzi relacja wykluczania (zachodzi relacja bycia uogólnieniem), dlatego wydaje się najlepszym rozwiązaniem oddanie tekstu [P20C] przy pomocy koniunkcji dwóch zdań (z których drugie zachowuje interpretację [InB1B] tekstu [B1]): [InE] i [InD]). Wówczas interpretacja tekstu [P20C] jest następująca:

[InF] istnieje zbiór nieskończony A i istnieje zbiór nieskończony B, takie, że A i B są równoliczne i A jest podzbiorem właściwym B lub

B jest podzbiorem właściwym *A* (*dla tego zdania B. Bolzano przedstawia dowód w dalszej części 20. paragrafu*) i dla każdego zbioru nieskończonego *A* istnieje zbiór nieskończony *B*, taki, że *A* i *B* są równoliczne i *A* jest podzbiorem właściwym *B* lub *B* jest podzbiorem właściwym *A* (*dla tego zdania B. Bolzano nie przedstawił dowodu*).

Interpretacja [InF] ma szereg zalet. Dla czytelnika połowy XIX wieku zawiera (tytułowy) paradoks. Dowód zamieszczony przez B. Bolzana po tym tekście jest rzeczywiście dowodem dla pierwszego zdania z [InF]. Zawiera ona też w sobie określenie późniejszej definicyjnej własności zbiorów nieskończonych.

Trudności interpretacyjne tekstu [P20C] wynikają z nie do końca klarownego sformułowania zdania fragmentu [B1]. Jak wynika ze wstępu F. Přihonsky'ego, wydawcy *Paradoxien des Unendlichen*, tekst rękopiśmienny pozostawiony przez B. Bolzana nie był — w zamierzeniu praskiego matematyka — ostatecznym tekstem jego pracy, zawierał sporo niejasności i był miejscami nieczytelny[11]. Można go traktować jako rękopis, który nie przeszedł jeszcze ostatnich prac redakcyjnych. Stąd zapewne wzięło się dość niejasne sformułowanie fragmentu [B1]. Można przypuszczać, że B. Bolzano najpierw sformułował własność [InE], opatrzył ją dowodem, a potem, np. podczas którejś z korekt doszedł do wniosku, że zachodzi własność [InD], nie zapisał jej jednak całej, a jedynie „wtrącił” w [B1] słowa „i właściwie zachodzi zawsze”, co doprowadziło do późniejszych trudności interpretacyjnych. „Poprawiony” — zgodnie z zaakceptowaną tu interpretacją — tekst zasadniczy 20. paragrafu *Paradoxien des Unendlichen* mógłby wyglądać następująco [POPR1] — [POPR5]:

[11]„Der Herausgeber erhielt diese Abhandlung im Manuskripte aus dem Nachlasse des Verfassers von dessen Erben mit der Verbindlichkeit, sie sobald als möglich zum Drucke zu fördern, und übernahm diese Verpflichtung [...]. Nun erst sah er sich in den Stand gesetzt, die lange bereits besorgte Abschrift nach dem nicht immer sehr lesbaren, hier und da sogar inkorrekten Manuskripte zu verbessern, eine genaue Inhaltsanzeige zur leichteren Benutzung des Büchleins zu fertigen und einen tauglichen Verlagsort dafür aufzusuchen”, F. Přihonsky, *Vorwort des Herausgebers*, w: B. Bolzano, *Paradoxien des Unendlichen*, s. VI (V-VI).

[POPR1] Przejdźmy teraz do rozważenia wysoce osobliwej właściwości, która **może zachodzić** [podkr. — J. D.] w relacji (*Verhältnisse*) dwóch zbiorów (*Mengen*) wtedy, gdy są one nieskończone, a którą przeoczało się dotąd.

[POPR2] = [B2]

[POPR3] Twierdzę mianowicie: dwa zbiory (*Mengen*), obydwa nieskończone, mogą pozostawać do siebie w takiej relacji (*Verhältnisse*), że, z jednej strony, możliwe jest połączenie każdego przedmiotu należącego do jednego zbioru (*Menge*) w parę z pewnym [przedmiotem — J. D.] drugiego [zbioru — J. D.], w ten sposób, że żaden pojedynczy przedmiot z obydwu zbiorów (*Mengen*) nie pozostanie niewłączony w jakąś parę i żaden [przedmiot — J. D.] nie wystąpi w dwu albo więcej parach; z drugiej strony jest jednak przy tym możliwe, że jeden z tych zbiorów (*Mengen*) zawiera w sobie drugi jako część, tak że wielości (*Vielheiten*), które one [tzn. zbiory — J. D.] przedstawiają, jeśli potraktuje się ich [tzn. zbiorów — J. D.] przedmioty jako równe, tzn. jako jednostki, pozostają do siebie w wielorakich relacjach (*Verhältnisse*).

[POPR4] *dowód* [POPR3] — *pokazanie, że przedział liczbowy* [0, 5] *jest równoliczny z przedziałem liczbowym* [0, 12] *i pierwszy zbiór jest podzbiorem właściwym drugiego.*

[POPR5] *uwaga uogólniająca B. Bolzana (niezaopatrzona dowodem), stwierdzająca — w jego języku — zachodzenie* [InD]: *dla każdego zbioru nieskończonego A istnieje zbiór nieskończony B, taki, że A i B są równoliczne i A jest podzbiorem właściwym B lub B jest podzbiorem właściwym A.*

Tekst B. Bolzana zawiera zatem własność [InD], [POPR5], która potem stała się definicyjną własnością zbiorów nieskończonych. Jej sformułowanie, choć niejako mimochodem i w sposób niełatwy do odczytania, jest wielkim osiągnięciem B. Bolzana. Podanie tak ogólnej własności było możliwe dopiero w tekstach B. Bolzana, ponieważ on pierwszy posługiwał się ogólnym pojęciem zbioru — pojęciem zbioru w ogóle.

Skoro 20. paragraf podaje jednak własność ([InD], [POPR5]), która w pracach matematyków pokolenia R. Dedekinda i G. Cantora została wykorzystana do refleksywnego zdefiniowania zbiorów nieskończonych, to powstaje pytanie, czy jej znajomość skłoniła B. Bolzana do korekty relacji kwantytatywnych pomiędzy zbiorami nieskończonymi i odrzucenia starożytnego aksjomatu teorii wielkości, stwierdzającego, iż część jest mniejsza od całości. Tak przecież postąpili R. Dedekind i G. Cantor — zmodyfikowali relację mniejszości mocy zbioru i odrzucili aksjomat Eudoksosa-Euklidesa.

Sytuacja problemowa, przed którą stał również B. Bolzano, była następująca. Oczywiste wydawało się przyjęcie, że dla dowolnych zbiorów:

(1) $L(A) = L(B) \equiv A \sim B$

oraz

(2) $L(A) < L(B) \equiv (A \subset B \wedge A \neq B)$,

gdzie „$L(A)$” oznacza „liczebność” (dzisiaj: moc, liczbę kardynalną) zbioru A, zaś „$\sim$” oznacza równoliczność (w znaczeniu przyjmowanym we współczesnej matematyce) zbiorów.

Ze względu na zachodzenie dla zbiorów nieskończonych (w sensie Bolzana) własności [POPR5] ([InD]), dla niektórych zbiorów:

(3) $(L(A) = L(B)) \wedge (L(A) < L(B))$.

Ze względu na oczywistość stwierdzenia:

(4) $(L(A) = L(B)) \equiv \sim (L(A) < L(B))$

z (3) otrzymuje się sprzeczność

(5) $\sim (L(A) < L(B)) \wedge (L(A) < L(B))$.

Jedyne wyjście z tej sytuacji problemowej, to przeformułowanie jednej z relacji kwantytatywnych (1) lub (2). R. Dedekind i G. Cantor zdecydowali się na przeformułowanie (2) i akceptację (1), zrywając tym samym ze starożytnym aksjomatem teorii wielkości Eudoksosa, mówiącym, iż część jest mniejsza od całości. To rozwiązanie — wbrew starożytnemu i „naturalnemu” aksjomatowi — odziedziczyła po twórcach teorii mnogości matematyka współczesna.

B. Bolzano doskonale zdawał sobie sprawę z sytuacji problemowej generowanej przez zdanie (5) i z tego, że jej rozwiązanie prowadzi przez zmianę definicji (1) lub (2). Zdecydował się jednak na zmianę definicji (1)[12] przy pozostawieniu (2). Oznaczało to dokładnie tyle, że praski matematyk — odmiennie niż twórcy teorii mnogości — nie potrafił jeszcze zerwać ze starożytnym paradygmatem matematyki, do którego „rdzenia" należała bezwzględna akceptacja zasady „część jest mniejsza od całości".

B. Bolzano wykonał zatem jeden z istotnych kroków w kierunku stworzenia teorii mnogości — czyli stworzenia „środowiska" nowoczesnej matematyki: sformułował twierdzenie [InD]. W pewnym sensie, wskazanym wyżej, pozostał jednak jeszcze w „świecie" matematyki starożytnej.

Jeśli chodzi o zmianę kwantytatywnej relacji równości między zbiorami nieskończonymi (1), to B. Bolzano jedynie ją zapowiedział, ale nigdy jej nie zrealizował. W każdym razie pozostawienie definicji (2) gwarantowało, nawet gdyby wszystkie zbiory nieskończone (w sensie Bolzana) były równoliczne, bogactwo kwantytatywnej różnorodności „Bolzanowskiego królestwa zbiorów".

---

[12]„Bloß aus dem Grunde also, weil zwei Mengen *A* und *B* in einem solchen Verhältnisse zueinander stehen, daß wir zu jedem in der einen *A* befindlichen Teile *a*, nach einer gewissen Regeln verfahrend, auch einen in *B* befindlichen Teil *b* mit dem Erfolge aussuchen können, daß die sämtlichen Paare (*a* + *b*), die wir so bilden, jedes in *A* oder *B* befindliche Ding enthalten — bloß aus diesem Umstände ist es — so sehen wir — noch keineswegs erlaubt zu schließen, daß diese beiden Mengen, wenn sie unendlich sind, in Hinsicht auf die Vielheit ihrer Teile (d. h. wenn wir von allen Verschiedenheiten derselben absehen) einander gleich seien; sondern sie können trotz jenem Verhältnisse, daß für sich selbst allerdings beiderseits gleich ist, ein Verhältnis der Ungleichheit in ihren Vielheiten haben, so daß die eine derselben sich als ein Ganzes, davon die andere ein Teil, herausstellen kann. Auf eine Gleichheit dieser Vielheiten wird erst geschlossen werden dürfen, wenn irgendein anderer Grund noch dazukommt, wie etwa, daß beide Mengen ganz gleiche Bestimmungsgründe, z. B. eine ganz gleiche Entstehungsweise haben", B. Bolzano, *Paradoxien des Unendlichen*, par. 21.

SUMMARY

THE AMBIGUITIES ASSOCIATED WITH BERNARD BOLZANOS "DEFINITION" OF THE INFINITE SET

The aim of the paper is to remove the ambiguities contained in the 20th Section Bernard Bolzanos „Paradoxien des Unendlichen”. Conclusion is that Bolzano originally wanted only to present in the 20th Section one of the (many) paradoxes of infinite sets: an infinite set **may be** equivalent with its subset. The proof in the 20th Section applies only to this property. Later added Bolzano to the text of the 20th Section a generalizing remark. Only this remark suggests that Bolzano anticipated the reflexive (Dedekindian) definition of the infinity set.