Krzysztof Wójtowicz

Podstawowe założenia strukturalizmu w filozofii matematyki

Zagadnienia Filozoficzne w Nauce nr 44, 40-60

2009

Zagadnienia Filozoficzne
w Nauce
XLIV (2009), 40–60

Krzysztof Wójtowicz
Wydział Nauk Humanistycznych i Społecznych,
Szkoła Wyższa Psychologii Społecznej w Warszawie

PODSTAWOWE ZAŁOŻENIA STRUKTURALIZMU W FILOZOFII MATEMATYKI

Pojęcie struktury przenika całą matematykę. Mówimy o strukturach geometrycznych, topologicznych, różniczkowych, algebraicznych, probabilistycznych *etc.*, mówimy o strukturze zbioru rozwiązań danego równania, mówimy o strukturalnych cechach teorii *etc.* Choć więc pojęcie struktury nie zdefiniowane formalnie[1], to posługujemy się nim w matematyce bardzo często. Pojęcie to pojawia się oczywiście również w dyskusjach ontologicznych dotyczących matematyki, stając się centralnym pojęciem nurtu strukturalistycznego, (który w ostatnich latach zyskuje coraz większą popularność). Celem tego artykułu jest prezentacja podstawowych motywacji i stylu myślenia charakterystycznego dla matematycznego strukturalizmu.

1. MATEMATYKA — NAUKA O STRUKTURACH?

W filozofii matematyki możemy mówić o dwóch podstawowych problemach ontologicznych. Pierwszym z nich jest problem istnienia obiektów matematycznych. Oczywiście, w sporze można wskazać

[1]Mam na myśli fakt, że nie ma jednej, uniwersalnej definicji struktury, tak jak mamy jedną definicję funkcji ciągłej czy grupy.

dwa podstawowe obozy: realistów i antyrealistów. W niniejszym artykule tego problemu nie podejmuję (roboczo zakładając tezę matematycznego realizmu, gdyż tylko przy tym założeniu pytanie o naturę obiektów matematycznych ma sens). Interesuje nas tu natomiast problem *natury* obiektów matematycznych. Wiąże się z nim szereg pytań. Czym są obiekty matematyczne? Jakie są ich kryteria identyczności? Co nadaje tożsamość liczbie 5 albo ciągowi liczb naturalnych, zbiorowi liczb rzeczywistych lub przestrzeni funkcji ciągłych na odcinku [0,1]? Czy obiekty matematyczne mają wewnętrzną naturę — niejako same w sobie — i jako takie wchodzą w relacje z innymi obiektami (np. liczba 5 wchodzi w relację mniejszości z liczbą 6)? Czy są raczej konstytuowane poprzez pozostawanie w pewnych relacjach z innymi obiektami matematycznymi? Mówiąc swobodnie: czy obiekty matematyczne są tym, czym są jedynie dzięki innym obiektom?

W sporze o naturę obiektów matematycznych można wyróżnić dwa podstawowe stanowiska: *realizm obiektowy* oraz *strukturalizm*. Zasadnicza różnica polega na tym, że zdaniem realisty można mówić o wewnętrznych cechach obiektów matematycznych, natomiast strukturalista istnienie takich cech odrzuca. Można więc powiedzieć, że w myśl stanowiska realizmu obiektowego tożsamość obiektu matematycznego jest niejako immanentną cechą tego obiektu. Za zwolennika takiego poglądu można uznać np. Gödla, który zakładał istnienie absolutnego uniwersum zbiorów, mających pewną wewnętrzną naturę.

Stanowisko strukturalistyczne w radykalnie odmienny sposób odpowiada na pytanie o naturę obiektów matematycznych. Jego główną tezę można wyrazić w formie lapidarnego stwierdzenia, iż matematyka jest nauką o *strukturach*, a nie o obiektach. Bezpośrednio wiąże się z nią teza dotycząca tożsamości obiektów matematycznych, którą można sformułować jako stwierdzenie, że:

(*) O tożsamości obiektów matematycznych decydują *wyłącznie* relacje, w jakie te obiekty wchodzą z innymi obiektami.

Zdaniem strukturalistów, obiekty matematyczne nie mają indywidualnej, „wewnętrznej” tożsamości, zaś ich cechy są jedynie cechami relacyjnymi. Mówiąc inaczej, o tym, czym jest obiekt matematyczny, decydują wyłącznie relacje, które łączą ów obiekt z innymi obiektami. W takim ujęciu, uniwersum matematyczne postrzegane jest jako swoista „sieć relacji". Obiekty matematyczne są tylko miejscami w tej sieci — czy inaczej: o tożsamości obiektu matematycznego decyduje *wyłącznie* miejsce w tej sieci. Liczba 5 nie jest ową liczbą *per se*, ale jedynie jako miejsce w pewnej strukturze liczbowej. Struktura jest więc pierwotna, zaś obiekty — wtórne.

Zwolennik realizmu obiektowego skłonny więc będzie twierdzić, że liczba 5 jest ową liczbą niezależnie od własności liczb 123456789 i 987654321. W swojej argumentacji może odwoływać się do faktu, że przecież wiemy dużo różnych rzeczy o liczbie 5 — i żeby się tych wszystkich rzeczy dowiedzieć, nie musimy nic wiedzieć o liczbach 123456789 i 987654321. Taki jest zresztą porządek poznawczy — jako dzieci dokonywaliśmy operacji na liczbie 5, nie mając pojęcia, że mogą istnieć liczby większe niż 1000. A zatem — można powiedzieć — to, jakie są własności liczby 5 (i *czym jest* liczba 5) nie zależy od własności liczb 123456789 i 987654321. Jest ona od nich ontycznie niezależna — podobnie jak atom węgla jest ontycznie niezależny od związków chemicznych, w skład których wchodzi. Oczywiście, nikt nie neguje istnienia relacji, jakie łączą ów atom z innymi atomami, ale ów atom jest tym, czym jest, niezależnie od tego, w jakich związkach chemicznych aktualnie pozostaje. Można zasadnie twierdzić, że dom w Krakowie jest jako indywiduum całkowicie niezależny ontycznie od domu w Gdańsku. To, co czyni dom w Krakowie domem (a nie kinem czy halą sportową) nie zależy bynajmniej od własności domów w Gdańsku — i od relacji domów w Krakowie do domów w Gdańsku[2]. Realista obiektowy skłonny będzie w ten sposób patrzeć na liczby. Strukturalista nie zgodzi się z takim postawieniem sprawy i odrzuci tezę, że obiekty matematyczne mogą być od siebie ontycznie niezależne.

[2]Choć oczywiście przyznajemy, że domy w Krakowie mogą pozostawać z domami w Gdańsku w pewnych relacjach: są podobne, droższe, mniejsze, pełnią analogiczne funkcje *etc.* Jednak to nie owe relacje czynią domy w Krakowie domami.

Strukturaliści przy prezentacji swojego stanowiska ilustrują je przykładami ustroju państwowego albo struktury przedsiębiorstwa. Zauważają, że np. funkcja prezydenta USA jest zdefiniowana niezależnie od tego, kto akurat tę funkcję sprawuje, i – co ważniejsze — zdefiniowana jest poprzez odniesienie do całej państwowej struktury, której jest częścią. Nie byłoby przecież sensu zastanawianie się nad tym, czy prezydent jest zwierzchnikiem sił zbrojnych, gdyby nie było sił zbrojnych. Podobnie, funkcja np. prezesa firmy czy dyrektora finansowego nie zależy od tego, kto aktualnie sprawuje to stanowisko. Analogiczna sytuacja ma miejsce w wypadku gry w szachy — funkcja gońca, króla, hetmana *etc.* nie zależy przecież od tego, jakie konkretnie kawałki drewna (kości słoniowej, plastiku, szkła *etc.*) zostaną tu użyte, a jedynie od ich roli w strukturze szachowej. To, co czyni gońca gońcem, nie jest kształt figurki, ale jej rola, czyli zespół relacji łączących gońca z pozostałymi figurami. Nie ma sensu mówienie o tym, że jakaś figura jest gońcem *per se*, niezależnie od istnienia i własności innych figur.

W samej matematyce łatwo wskazać przykłady pojęć, które mają „strukturalistyczny posmak". Paradygmatycznym przykładem jest pojęcie grupy: mamy tu do czynienia z elementami, na których określone jest pewne działanie, spełniające określone warunki[3]. Kiedy definiujemy grupę, nie obchodzi nas natura jej elementów. Twierdzenie, że istnieje z dokładnością do izomorfizmu *dokładnie jedna* grupa określonego typu wyraża właśnie fakt, że kiedy identyfikujemy grupy tego typu, nie interesuje nas „materiał", z którego są one zrobione, ale jedynie czysto strukturalne własności, wyrażone w terminach działania grupowego. Myślimy wówczas o pewnej *jedynej* strukturze. Nie ma również sensu mówić, że element neutralny grupy $e \in G$ jest tym elementem *per se*, niezależnie od grupy G. Elementem neutralnym grupy *jest się tylko w danej grupie*! Strukturaliści uważają, że taka sama sy-

[3]Grupa to trójka $\langle G, \bullet, e\rangle$, gdzie $\bullet$ jest działaniem dwuargumentowym, zaś e jest elementem neutralnym, przy czym zachodzą warunki: (i) $\bullet$ jest łączne, tj. $x \bullet (y \bullet z) = (x \bullet y) \bullet z$; (ii) $x \bullet e = e \bullet x = x$ dla każdego $x \in G$; (iii) dla każdego elementu $a \in G$ istnieje element odwrotny a^{-1}, tj. taki, że $a \bullet a^{-1} = a^{-1} \bullet a = e$.

tuacja ma miejsce w przypadku wszystkich obiektów matematycznych — ich natura jest wyznaczona przez relacje z innymi składowymi struktury, w której „tkwią". Odwołują się do faktu, że teorie matematyczne charakteryzują swój przedmiot opisu jedynie z dokładnością do izomorfizmu. Resnik wyraża ów pogląd w formie tezy, że „obiekty matematyczne nie mają wyróżniających ich cech z wyjątkiem tych, które mają na mocy ich relacji do innych pozycji w strukturze, do której należą. Uważam punkt geometryczny [...] za paradygmatyczny obiekt matematyczny" [Resnik 1996, 84].

Warto też dodać, że wielu autorów uważa, iż strukturalistyczny sposób myślenia jest bliski teorii kategorii. Z teorią kategorii wiązano nadzieję, że stanie się ona alternatywną wobec teorii mnogości podstawą dla matematyki. Niezależnie od tego, czy tak się faktycznie stanie (opinie są tu mocno zróżnicowane), to z całą pewnością teoria kategorii dostarcza systemu pojęć, który okazuje się bardzo owocny w wielu działach matematyki (np. topologii algebraicznej, geometrii różniczkowej, a nawet w informatyce teoretycznej). Teoria kategorii odgrywa więc ważną rolę inspirującą, ukazując alternatywny sposób patrzenia na matematykę[4].

2. UWAGI HISTORYCZNE

Autorem, na którego często powołują się strukturaliści, jest Dedekind. W swoich pracach zajmował się on m.in. teorią liczb naturalnych. W *Was sind Und was sollen die Zahlen* rozważał tzw. proste systemy nieskończone (niektórzy mówią też o systemach prosto nieskończonych) podkreślając fundamentalne znaczenie relacji strukturalnych w tych systemach. Taki prosty system nieskończony to — w dzisiejszej terminologii — pewien ω-ciąg[5]. Dedekind udowodnił

[4]W pracy [Heller, Mączka 2004] autorzy piszą o tzw. geometrii nieprzemiennej, i wynikach, które sugerują, że pewne pojęcia, takie jak „należenie do zbioru" tracą swój sens. Paradygmat teoriomnogościowy okazuje się tu ułomny — natomiast naturalna jest interpretacja w języku teorii kategorii.

[5]ω-ciąg to po prostu zbiór uporządkowany tak, jak zbiór liczb naturalnych. Mówiąc swobodnie, jest to nieskończony ciąg, który ma początek (ale nie ma końca),

twierdzenie głoszące, że dowolne dwa systemy, spełniające podane przez Dedekinda aksjomaty są izomorficzne[6]. Można powiedzieć, że z punktu widzenia wyników Dedekinda nie jest istotne, jaka jest natura obiektów składających się na owe proste systemy nieskończone — ważne są jedynie czysto strukturalne zależności, wyrażone w terminach funkcji następnika. Zaś to, na jakim „podłożu" określony jest ów następnik, nie jest istotne. Nic więc dziwnego, że prace Dedekinda są źródłem inspiracji dla współczesnych strukturalistów.

Ważne dla dojrzewania strukturalistycznego poglądu na matematykę są też niewątpliwie prace Hilberta, w szczególności prace dotyczące geometrii. Jego dzieło *Grundlagen der Geometrie* (1899) utrzymane jest w duchu programu formalizacji dowodów geometrycznych i uwolnienia ich od elementów intuicyjnych i wyobrażeniowych. Należy pamiętać, że w nowożytnej matematyce mieliśmy do czynienia z ewolucją poglądów dotyczących natury dowodu matematycznego — od wizji „kartezjańskiej", w myśl której rękojmią dowodu ma być intuicyjna oczywistość poszczególnych kroków (ujęta w formie intelektualnego aktu), do wizji formalistycznej, w myśl której o prawomocności dowodu decyduje wyłącznie zgodność z formalnie ustalonymi regułami[7]. Przed Hilbertem pisał o tym np. Pasch, formułując tezę,

---

i w którym można przejść za pomocą operacji następnika od jednego elementu do następnego: ● ● ● ● . . .

[6]Nie jest tu konieczne przytaczanie tych aksjomatów — ważne jest to, że w dzisiejszej terminologii powiedzielibyśmy, że charakteryzują w kategoryczny sposób ciąg o typie porządkowym ω (czyli ω-ciąg — por. poprzedni przypis). Twierdzenie podane przez Dedekinda można sformułować tak: jeśli (X, s) oraz (X^*, s^*) to dwa proste systemy nieskończone, (gdzie X i X^* to zbiory — zaś s oraz s^* — określone na nich funkcje następnika), to istnieje odwzorowanie $\phi\colon X \to X^*$ (różnowartościowe i „na") takie, że dla dowolnych n, m w X, $s(n) = m$ wtedy i tylko wtedy, gdy $s^*(\phi(n)) = \phi(m)$. Odwzorowanie ϕ zachowuje więc relację bycia następnikiem.

[7]Kartezjusz — niejako wzorzec racjonalisty — uważał metodę matematyczną za swoisty wzór racjonalnego myślenia, bynajmniej nie traktując rozumowań matematycznych czysto formalnie. Podkreślał, że podstawą naszego poznania jest intelektualna zdolność do ujmowania pewnych podstawowych prawd w jasny i wyraźny sposób. To jasne i wyraźne widzenie jako kryterium wiedzy stosuje się oczywiście również do matematyki. Odwołania do intuicji występują jednak nie tylko w przypadku uznawania podstawowych prawd; musimy z niej korzystać także w rozumowaniach, intu-

że dowody winny być uwolnione od „intuicyjnych wtrętów" i należy nadać im charakter czysto formalny. W ujęciu Pascha i Hilberta, geometria miała zostać formalnie zaksjomatyzowana, a sens pojęć pierwotnych miał być zadany przez aksjomaty. Mówiąc swobodnie, aby dowiedzieć się, co to jest punkt, prosta, płaszczyzna *etc.* winniśmy przyjrzeć się aksjomatom, a nie rysunkom. To aksjomaty definiują zależności między pojęciami geometrycznymi, a zależności te mają czysto strukturalny charakter[8].

Zdaniem Hilberta, dopuszczalne jest wprowadzanie nowych pojęć poprzez podanie ich aksjomatycznych definicji. Dotyczyć to miało również geometrii. W takim ujęciu, geometria przestaje być nauką o przestrzeni (lub słabiej: nie musi być tak interpretowana), ale staje się nauką o dowolnych obiektach, które spełniają pewne zależności o charakterze czysto relacyjnym (strukturalnym). Nie pytamy o to, jaka jest istota punktu czy prostej — ważna jest dla nas jedynie zależność, że przez dwa różne punkty przechodzi dokładnie jedna prosta lub że dwie różne proste nierównoległe przecinają się w dokładnie jednym punkcie. Hilbert miał twierdzić, że przy prawidłowej aksjomatyzacji geometrii powinniśmy być w stanie zamiast o punktach, prostych i płaszczyznach, mówić o stołach, krzesłach i kuflach piwa (por. [Shapiro 1996, 156]). Porównywał też teorię matematyczną do rusztowania, na które składają się pojęcia wraz z relacjami między nimi (por. [Shapiro 1996, 162]). Taki sposób myślenia jest charakte-

icyjnie postrzegając prawomocność każdego kroku dowodowego: „owa oczywistość i pewność intuicji wymagana jest nie tylko dla samych wypowiedzi, ale także dla jakichkolwiek rozumowań... Zdania [...] poznaje się [...] już to przy pomocy intuicji, już to przy pomocy dedukcji; same zaś pierwsze zasady tylko przy pomocy intuicji; natomiast ich odległe wnioski jedynie przy pomocy dedukcji" [Descartes 1958, 13–14]. W systemie Kartezjusza mamy więc ujęcie dowodzenia matematycznego jako procesu „treściowego", opartego na naszym rozumieniu pojęć, a nie na formalnych własnościach systemów symbolicznych.

[8]Oczywiście, aksjomaty są *motywowane* naszymi intuicjami, które również mogą dotyczyć „istoty" pojęć geometrycznych. To jednak nie ma znaczenia. Podobna sytuacja ma miejsce w przypadku problemu poprawności dowodów: nie ma znaczenia to, jakie intuicje wiążemy z poszczególnymi krokami dowodowymi, ale to, czy są one zgodne z warunkami czysto formalnymi.

rystyczny dla strukturalizmu: to relacje między obiektami są istotne, a nie wewnętrzna natura tych obiektów[9].

3. MOTYWACJE FILOZOFICZNE

W dyskusji filozoficznej, dotyczącej problemu natury obiektów matematycznych, istotną rolę odegrały analizy Benacerrafa — zwłaszcza dotyczące sformułowanego przez niego tzw. problemu wieloredukcji [Benacerraf 1965]. Benacerraf przedstawia ten problem na przykładzie ciągu liczb naturalnych 0,1,2,3.... Jak wiadomo, liczby naturalne można reprezentować w teorii mnogości, czyli traktować jako pewnego typu zbiory (czy mówiąc inaczej: zredukować do zbiorów). Standardowa jest tu tzw. reprezentacja von Neumanna, w której liczby naturalne są utożsamiane ze zbiorami w następujący sposób: funkcję liczby 0 pełni zbiór pusty $\emptyset$, funkcję liczby 1 — zbiór $\{\emptyset\}$, funkcję liczby 2 — zbiór $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, funkcję liczby 3 — zbiór $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$, itd. Przy tej reprezentacji, ciąg liczb naturalnych to:

0	1	2	3
$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$	$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

Zbiory „imitujące” kolejne liczby naturalne są więc tworzone zgodnie z prostą zasadą: każdy kolejny konstruujemy jako zbiór wszystkich liczb od niej mniejszych (czyli $n + 1 = n \cup \{n\}$)[10].

[9] Warto przypomnieć, że Hilbert konstruował modele dla teorii geometrycznych, interpretując obiekty geometryczne jako zbiory liczb (par liczb, trójek liczb, n-tek liczb *etc*.) Istotne przy takich interpretacjach jest oczywiście zachowanie pewnych *strukturalnych* zależności, a nie jakkolwiek rozumianej istoty danych bytów matematycznych. Na okrąg patrzymy intuicyjnie jak na figurę o pewnym kształcie, a nie jako na zbiór par liczb rzeczywistych (x, y), takich, że $x^2 + y^2 = 1$. Ponieważ jednak strukturalnym zależnościom między figurami geometrycznymi odpowiadają strukturalne zależności między zbiorami par liczb, to pytanie o to, czy okrąg jest „naprawdę” figurą geometryczną *per se*, czy też zbiorem par liczb, staje się bezprzedmiotowe.

[10] Można powiedzieć, że operację następnika „imitujemy” za pomocą operacji dodawania jednego elementu do zbioru. W analogiczny sposób — jako pewne operacje

Pomimo, iż ta reprezentacja jest uznana za standardową[11], to nie jest to jedyna możliwa reprezentacja teoriomnogościowa liczb naturalnych. Inna — również dopuszczalna z logicznego punktu widzenia — to reprezentacja Zermelo:

0	1	2	3	4
$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\{\emptyset\}\}$	$\{\{\{\emptyset\}\}\}$	$\{\{\{\{\emptyset\}\}\}\}$...[12]

Tutaj reguła definiowania zbioru reprezentującego kolejną liczbę naturalną jest inna niż poprzednio: powstaje on jako jednoelementowy zbiór, którego jedynym elementem jest poprzednik (czyli $n + 1 = \{n\}$).

Pojawia się naturalne pytanie: które zbiory to *tak naprawdę* liczby naturalne? Jeśli bowiem przyjmiemy następujące założenia:

(i) stoimy na stanowisku realizmu matematycznego;

(ii) uznajemy, że liczby naturalne można zrekonstruować jako stosowne zbiory;

(iii) twierdzimy, że obiekty matematyczne mają ustaloną tożsamość;

to powinniśmy ten problem w pewien sposób rozstrzygnąć. Zwolennik tezy, w myśl której liczby naturalne są zbiorami, staje przed problemem ich zidentyfikowania. W szczególności musi np. odpowiedzieć na pytanie, czy liczba 1 jest elementem liczby 3 (jak w rekonstrukcji von Neumanna), czy też nie (jak w rekonstrukcji Zermelo)[13]. Nie jest

---

na zbiorach — definiujemy też odpowiedniki pozostałych operacji arytmetycznych (dodawania, mnożenia *etc.*).

[11]W podręcznikach, kiedy mowa jest o teoriomnogościowej rekonstrukcji liczb, liczby naturalne konstruowane są w ten właśnie sposób, liczby całkowite jako klasy abstrakcji stosownych par liczb naturalnych, liczby wymierne jako klasy abstrakcji par liczb całkowitych *etc.* Ta rekonstrukcja pokazuje, że teoria mnogości jest teorią na tyle silną i ogólną, że teorię liczb można uznać po prostu za jej fragment.

[12]Zbiór liczb naturalnych można reprezentować na wiele różnych sposobów (np. jako $(\emptyset, P(\emptyset), P(P(\emptyset)), \ldots)$ — choć byłoby to dość dziwaczne), odpowiednio definiując relacje między tymi obiektami tak, aby „imitowały" relacje arytmetyczne.

[13]W rekonstrukcji von Neumanna, 1 to $\{\emptyset\}$, zaś 3 to $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$. A zatem $1 \in 3$. W rekonstrukcji Zermelo, 1 to $\{\emptyset\}$, zaś 3 to $\{\{\{\emptyset\}\}\}$ (a więc $1 \notin 3$).

jednak jasne, na jakiej podstawie mielibyśmy udzielić odpowiedzi na to pytanie.

Z punktu widzenia stanowiska strukturalistycznego takie pytanie jest źle postawione. Strukturalista nie zastanawia się nad tym, czy naprawdę $1 \in 3$, czy też nie. Nie jest to bowiem pytanie wyrażone w języku arytmetyki, a tylko język arytmetyki służy nam do opisywania własności liczb *jako liczb*[14]. Pogląd, w myśl którego liczby jako obiekty mają pewne „absolutne" własności, jest strukturaliście obcy. W przypadku liczb naturalnym można bowiem mówić jedynie o własnościach definiowalnych w języku arytmetyki. Benacerraf twierdzi więc, że przedmiotem zainteresowania teorii liczb są wspólne cechy wszystkich struktur o typie porządkowym liczb naturalnych [Benacerraf 1965, 291][15]. Benacerraf twierdzi, że każda z prezentowanych wcześniej redukcji (tj. redukcja von Neumanna i redukcja Zermelo) jest równie dobra (czy może: równie zła) jak druga. Nie ma żadnego dobrego kryterium, które pozwalałoby na wyróżnienie jednej z tych redukcji jako kanonicznej, jako jedynej „legalnej" redukcji liczb do zbiorów. Zdaniem Benacerrafa, płynie stąd wniosek, że w ogóle nie ma sensu utożsamianie liczb z określonymi zbiorami; co więcej, twierdzenie, że liczby naturalne mają ustaloną naturę *per se*, niejako wewnętrznie determinującą ich identyczność staje się twierdzeniem bezpodstawnym. Liczby naturalne można bowiem identyfikować jedynie poprzez scharakteryzowanie ich roli (miejsca) w strukturze liczb naturalnych (czyli w ω-ciągu). Sytuacja liczb przypomina sytuację elementów w grupie. Takie intuicje strukturaliści rozciągają na całą

[14]Posługując się wspomnianymi wcześniej analogiami, pytanie o to, czy $1 \in 3$ przypominałoby pytanie o to, czy funkcja prezesa rady nadzorczej jest małżonkiem funkcji dyrektora finansowego, albo czy funkcja gońca w szachach ma większą masę niż funkcja hetmana. Można zadawać takie pytania w stosunku do konkretnych osób lub przedmiotów odgrywających pewne role, pytania te nie mają jednak sensu, gdy myślimy o funkcjach pełnionych przez te osoby.

[15]Gwoli uzupełnienia należy dodać, że arytmetyka pierwszego rzędu ma modele niestandardowe, ale nas interesuje nasza koncepcja liczb rozumianych intuicyjnie (której kodyfikacją jest np. arytmetyka drugiego rzędu, opisująca kategorycznie przedmiot swoich badań). Dla prezentowanych tutaj rozważań nie ma to jednak większego znaczenia.

matematykę — ich zdaniem, jakiekolwiek scharakteryzowanie obiektu matematycznego jest możliwe jedynie w terminach cech relacyjnych. Ten punkt widzenia w jasny sposób wyraża Resnik: „Uważam, że w matematyce nie mamy do czynienia z obiektami mającymi „wewnętrzne” własności, które tworzą struktury — mamy jedynie struktury. Obiekty matematyczne [...] są punktami bez struktury — albo miejscami w strukturach. Jako miejsca w strukturach, nie mają one żadnej tożsamości, ani cech niezależnie od struktury” [Resnik 1981, 530].

Główne hasło strukturalizmu można więc sformułować jako: „obiekty matematyczne mają tylko i wyłącznie cechy relacyjne”, nie można więc mówić o ich wewnętrznej naturze. Parsons pisze: „Strukturalizm [...] rozpoczyna od zauważenia, że jedyną rzeczą, którą da się powiedzieć o abstrakcyjnych obiektach matematyki, jest to, że są one powiązane relacjami w pewnych strukturach i wyprowadza stąd wniosek, że mówienie o obiektach mających tak mało określoną naturę wewnętrzną jest jedynie *façon de parler*” [Parsons 1990, 370]. Sensowne wypowiedzi na temat obiektów matematycznych dotyczą jedynie ich cech relatywnie do struktury, w jakiej występują. Ta struktura jest ontycznie pierwotna, zaś przedmioty matematyczne są konstytuowane i zyskują swoją tożsamość jedynie jako miejsca w tej strukturze — poprzez wejście w relacje z innymi składowymi tej struktury.

Inspirujące dla strukturalistycznego ujęcia matematyki są także prace Quine’a, dotyczące problemu tzw. ontologicznego relatywizmu. Przypomnijmy, że Quine przyjmuje tzw. kwantyfikatorowe kryterium istnienia, w myśl którego istnieją te obiekty, które są wartościami zmiennych związanych (a wyrażając rzecz nieco inaczej: które znajdują się w zakresie zmienności zmiennych)[16]. Należy tu podkreślić, że w takim ujęciu obiekty są charakteryzowane jedynie poprzez własno-

[16]Jeśli w teorii występuje zdanie $\exists x P(x)$, to znaczy po prostu, że istnieje obiekt o własności P. Jest to pozornie trywialne stwierdzenie, ale istota kryterium istnienia Quine’a polega na tym, aby badaną teorię sprowadzić do kanonicznej postaci, która pozwoli na odkrycie jej zobowiązań ontologicznych. Należy przy tym pamiętać, że kryterium istnienia jest zawsze zrelatywizowane do danej teorii — mowa jest o zobowiązaniach ontologicznych *określonej teorii*, a nie o istnieniu *per se*.

ści definiowalne w danym języku, natomiast nie ma sensu mówienie o ich naturze czy istocie. Swobodnie mówiąc, przedmiot jest identyfikowany jedynie jako egzemplifikacja dla danej wiązki własności — a to, jakie własności egzemplifikuje, zależy od tego, jaka rola zostanie mu przypisana. To prowadzi Quine'a to tezy swoistego ontologicznego relatywizmu — nie da się bowiem opisać ontologii w absolutny sposób, każda ontologia jest zadana w gruncie rzeczy jedynie *modulo* określenie dopuszczalnych jej reinterpretacji w terminach innych ontologii, również „pracujących" dla danej teorii[17]. Quine, rozważając problem redukcji ontologicznej, mówi o tzw. funkcjach pełnomocnictwa (*proxy functions*), które — określając, jakie role „starych" obiektów przejmują obiekty nowej ontologii — tym samym pokazują ową wymienność. Szczegóły techniczne nie są tu istotne, ważne dla naszej dyskusji jest natomiast to, że w takim ujęciu nie zastanawiamy się, jaka jest istota danego obiektu, ale jedynie patrzymy na to, jaką rolę ów obiekt odgrywa — czyli jakimi relacjami jest powiązany z innymi obiektami.

Taka ontologiczna względność występuje również w przypadku obiektów matematycznych — i tu jest to szczególnie silnie widoczne. O ile bowiem w przypadku stołów, kotów i drzew mamy do dyspozycji procedury ostensywne (i bardzo silne nawyki), to w przypadku matematyki jest zupełnie inaczej. Quine twierdzi więc wprost: „Sądzę, że w wypadku przedmiotów abstrakcyjnych intersubiektywna tożsamość odniesienia nie ma uchwytnego sensu, jeśli miałby on polegać na czymś więcej niż to, co znajduje wyraz w powodzeniu dialogu. Niemal to samo można powiedzieć o przedmiotach konkretnych, gdy wykraczamy poza zasięg ostensji i rozważamy przedmioty teoretyczne, takie jak cząstki elementarne" [Quine 1998, 104]. Mówienie o absolutnej ontologii nie ma sensu ze względu właśnie na różne możliwości reinterpretacji terminów i zdań dotyczących obiektów abstrakcyjnych (w szczególności matematycznych) — przy czym warunkiem dopusz-

[17]Na przykład ontologia von Neumanna i ontologia Zermelo dla liczb są równie dobre i wzajemnie interpretowalne. Zgodnie z tezą ontologicznego relatywizmu żadna z nich nie może uchodzić za „tę prawdziwą".

czalności takiej reinterpretacji jest tylko zachowanie wartości logicznych zdań teorii[18]. W myśl doktryny ontologicznego relatywizmu na obiekty matematyczne powinniśmy więc patrzeć raczej jako na swoiste węzły w sieci (które odgrywają pewną rolę, ale które nie mają absolutnego charakteru), niż jako na obiekty identyfikowalne w absolutny sposób. Taki sposób myślenia jest charakterystyczny dla strukturalistycznej wizji matematyki — podobieństwa do koncepcji Quine'a są więc bardzo wyraźne.

4. STRUKTURALIZM ANTE REM *SHAPIRO*

Nie istnieje jedno, kanoniczne sformułowanie stanowiska strukturalistycznego, choć oczywiście wszyscy strukturaliści podzielają pewne wspólne intuicje. Tutaj przedstawię wariant stanowiska strukturalistycznego zaprezentowany w monografii [Shapiro 1997][19].

Pomimo, iż intuicje strukturalistyczne wydają się być dość klarowne i naturalne, to przy bliższej analizie okazuje się, że nie są one wcale łatwe do wysłowienia. Musimy bowiem powiedzieć, na czym polega różnica pomiędzy strukturalizmem a realizmem obiektowym — a w szczególności wykazać, że te różnice nie są czysto werbalne[20]. Trudność polega tu m.in. na tym, że najwygodniej byłoby zinterpre-

---

[18]Można również powiedzieć w gruncie rzeczy nie wybieramy *jednej* ontologii, ale pewną klasę ontologii, które są niejako „zamienne” (wzajemnie redukowalne). A zatem identyfikacja ontologii dla danej teorii sprowadza się do wskazania, jak dopuszczalne ontologie są do siebie wzajemnie redukowalne. W tej sytuacji pytanie, która z tych ontologii jest w jakimkolwiek sensie prawdziwa staje się pytaniem jedynie o nasze gusty.

W pracy [Brink, Revitzky 2002] autorzy rozważają (w odniesieniu do arytmetyki liczb naturalnych) trzy typy ontologii: obiektową, własnościową i ontologię stanów rzeczy. W pewnym prostym przypadku można formalnie wykazać istnienie stosownych interpretacji, które świadczą o tym, że żadnej z tych ontologii nie można traktować jako podstawowej.

[19]Inne podstawowe monografie prezentujące strukturalistyczny punkt widzenia to [Resnik 1998] i [Chihara 2004] (por. też [Bondecka-Krzykowska 2007]).

[20]Zauważmy, że przecież zwolennik klasycznej wersji platonizmu nie odmawia liczbom cech relacyjnych, zgadza się z tezą, że teoria grup nie ma żadnego zamierzonego przedmiotu badań *etc.*

tować zarówno punkt widzenia strukturalisty, jak i punkt widzenia realisty obiektowego w zewnętrznym, neutralnym systemie pojęć, akceptowalnym dla obu stron. To jednak nie jest możliwe, bo zarówno realista obiektowy, jak i strukturalista uważają swoje systemy pojęć za nieredukowalne[21]. Zauważmy, że gdyby pojęcia strukturalistyczne (np. pojęcie struktury) zostały zdefiniowane w ramach teoriomnogościowego czy teoriokategoryjnego systemu pojęć, to stanowisko strukturalistyczne byłoby jedynie przeformułowaniem innych wersji realizmu, opierających się na pojęciach zbioru lub kategorii. Konieczne jest więc budowanie od podstaw odpowiedniego systemu pojęć, a nasza sytuacja przypominać więc będzie sytuację żeglarza w łodzi Neuratha.

Podstawowa intuicja strukturalisty mówi, że pierwotne są struktury, zaś obiekty są — swobodnie mówiąc — tylko miejscami w strukturach, tylko odgrywają w strukturach pewne role. Jaka jest ontyczna relacja między tymi strukturami a obiektami matematycznymi? Za Shapiro wskażemy tutaj dwie podstawowe orientacje:

1. Orientacja *places-are-offices*. W myśl tego stanowiska, dana jest pewna pierwotna ontologia (*background ontology* — nazwę ją „ontologią tła"), z której pochodzą obiekty matematyczne. Dopiero te *dane uprzednio* obiekty mogą odgrywać pewne role (czyli „piastować stosowne urzędy"). Odpowiadałoby to intuicji, zgodnie z którą prezydentem USA może zostać osoba, która uprzednio była wiceprezydentem, a prezesem rady nadzorczej firmy osoba, która uprzednio była dyrektorem finansowym. W tym przypadku można powiedzieć (choć brzmi to nieco niezgrabnie), że te osoby były już „dane" uprzednio, że pochodzą z pewnej wcześniejszej wobec struktur państwowych czy biznesowych „ontologii osób". Podobnie ma być w przypadku obiektów matematycznych. One odgrywają pewne role w strukturach, jednak struktury te nie są pierwotne, ale „zrobione" z danego uprzednio surowca.

[21] Jest to problem charakterystyczna dla filozofii: w jaki sposób należy interpretować stanowiska inne niż nasze, aby móc je zrozumieć, ale zarazem, aby ta interpretacja była rzetelna i nie naruszała intuicji leżących u podłoża interpretowanej koncepcji. Dyskusja między strukturalizmem a realizmem obiektowym pozwala — niejako przy okazji — na klarowne postawienie problemu interpretacji.

2. Orientacja *places-are-objects.* Jest to stanowisko, w myśl którego to struktury są pierwotne, natomiast ich ewentualne egzemplifikacje (składające się z takich-a-nie-innych obiektów) odgrywają rolę wtórną. W przypadku tej orientacji nie mówimy o żadnej danej uprzednio ontologii, z której czerpalibyśmy obiekty i dopiero nadawali im odpowiednie role w strukturach. Podstawową rolę odgrywa pojęcie miejsca w strukturze, które jest — mówiąc swobodnie — pierwotne wobec obiektu zajmującego to miejsce.

Obie te perspektywy w pewnym sensie stanowią odzwierciedlenie dwóch stanowisk w sporze o uniwersalia (stanowisk różnych — lecz *w ramach* realizmu pojęciowego!). Perspektywa *places-are-offices*, w myśl której struktura jest wtórna w stosunku do jej egzemplifikacji, wydaje się bliższa umiarkowanej wersji realizmu pojęciowego Arystotelesa, natomiast perspektywa *places-are-objects*, która przyznaje ontyczną pierwotność strukturom, zdaje się bliższa realizmowi pojęciowemu Platona.

Shapiro odwołuje się do tych dwóch perspektyw, rozważając trzy różne wersje stanowiska strukturalistycznego. Są to:

1. Strukturalizm eliminacyjny.
2. Strukturalizm modalny.
3. Strukturalizm *ante rem* (za którym opowiada się Shapiro).

Pominę tutaj prezentację strukturalizmu eliminacyjnego. Przyjmuje on perspektywę *places-are-offices*, a więc z punktu widzenia tego stanowiska struktury są wtórne w stosunku do systemów. Aby z kolei można było mówić o systemie, konieczna jest jakaś „ontologia tła”, z której będziemy czerpać obiekty tworzące ów system. Sama natura obiektów z owej ontologii tła nie ma znaczenia — bowiem i tak z punktu widzenia strukturalistycznego one tylko będą odgrywać pewne role[22]. Jednak ta ontologia nie jest już opisywana

[22]Rolę liczby 0 może zatem odgrywać zbiór pusty, albo $\{\emptyset, \{\{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$, albo dowolny inny obiekt. Kiedy jednak ów obiekt występuje w roli zera, zapominamy o jego uprzedniej tożsamości.

w czysto strukturalistycznych kategoriach. Można powiedzieć swobodnie, że strukturalizm wkracza na arenę, dopiero gdy mamy już dane obiekty. Ta wersja strukturalizmu nie odmawia więc owym obiektom wewnętrznej natury. W pewnym więc sensie jest to stanowisko hybrydowe, które nie czyni zadość ani intuicjom realisty obiektowego (gdyż wprowadza pojęcie struktury), ani strukturalisty (gdyż wprowadza ową ontologię tła, z której pochodzą owe obiekty).

Nie będę tu również rozważał modalnej wersji strukturalizmu. W myśl tej koncepcji teorie matematyczne opisują struktury — tyle że jedynie *możliwe*, a nie istniejące. A zatem twierdzenia matematyczne winny zostać „zmodalizowane”[23]. Tu ograniczam się do analizy znacznie ważniejszej — moim zdaniem — realistycznej wersji strukturalizmu.

Shapiro opowiada się za strukturalizmem w wersji *ante rem*. Stwierdza wprost „Struktury istnieją niezależnie od tego, czy są egzemplifikowane w pewnym niestrukturalnym ‘królestwie’, czy nie” [Shapiro 1997, 89]. Nie jest konieczne przyjmowanie założeń dotyczących ontologii, stanowiącej źródło obiektów egzemplifikujących struktury. Zakładamy bowiem samoistne istnienie struktur, niejako *per se*. Dlatego właśnie stanowisko to Shapiro określa jako „strukturalizm *ante rem*”.

Podstawowe dla tej koncepcji jest pojęcie struktury. Nie ma tu odwołań do pojęć związanych z ontologią tła czy pojęć modalnych. Swobodnie mówiąc, struktura zawiera miejsca, na których określone są funkcje i relacje. Shapiro wzoruje swoją teorię struktur na teorii mnogości, twierdząc, że zarówno teoria struktur, jak i teoria mnogości mogą służyć jako podstawa dla matematyki. Trzeba od razu podkre-

[23]Twórcą modalnej wersji strukturalizmu jest Hellman, por. [Hellman 1989]. W tym ujęciu nie twierdzimy np. że zdanie α wyraża pewną prawdę o liczbach naturalnych traktowanych jako obiektywnie istniejące przedmioty. Dokonujemy bowiem następujących parafraz:

- Dla dowolnego *możliwego* systemu S, jeśli S egzemplifikuje strukturę liczb naturalnych, to jest w nim prawdziwe zdanie α.
- *Konieczne* jest, że — dla dowolnego systemu S — jeśli S egzemplifikuje strukturę liczb naturalnych, to jest w nim prawdziwe zdanie α.

ślić, że to, iż teoria struktur jest *wzorowana* na teorii mnogości nie znaczy bynajmniej, że *sprowadza* się do teorii mnogości. Stanowisko strukturalizmu *ante rem* jest bowiem sformułowane poprzez podanie aksjomatyzacji pojęcia struktury, traktowanego jako pojęcie pierwotne. Z punktu widzenia teorii struktur, teoria mnogości jest jedynie jedną z wielu dyscyplin matematycznych, a nie dyscypliną wyróżnioną[24]. Dzięki temu teoria struktur, jako teoria opisująca ontologię dla matematyki, jest bardziej uniwersalna — nie narzuca bowiem żadnego systemu pojęć jako podstawowego (w szczególności nie wymusza wyboru pojęcia należenia jako podstawowego).

Shapiro w swojej koncepcji odróżnia strukturę od systemu. System to po prostu zespół miejsc w strukturze, na których określone są pewne relacje i funkcje. Zauważmy od razu, że mogą istnieć izomorficzne, lecz *różne* systemy. Na przykład dwa ω-systemy:

(a) $1, 3, 5\ldots$

(b) $2, 4, 6\ldots$

zbudowane są z *różnych* miejsc w strukturze liczbowej, więc są *różne*, choć izomorficzne. Taka sytuacja nie może zachodzić w wypadku struktur — w koncepcji Shapiro *izomorficzne* struktury są *identyczne*. Izomorfizm stanowi więc kryterium identyczności struktur, ale nie systemów!

Właściwym przedmiotem zainteresowania arytmetyki nie są poszczególne systemy, lecz *struktura liczbowa*. I ta struktura jest już wyznaczona jednoznacznie, zgodnie z założeniem, że to izomorfizm struktur stanowi kryterium ich identyczności. Istnieje więc *dokładnie jedna* ω-struktura — a nie tylko jedna (z dokładnością do izomorfizmu). Terminy arytmetyczne („liczba 5” czy „największy wspólny dzielnik liczb 24 i 32”) odnoszą się do miejsc w *tej* strukturze — a więc ich desygnaty są wyznaczone jednoznacznie. W ontologii

[24]Z punktu widzenia teoriomnogościowej wersji realizmu, teoria mnogości jest oczywiście dyscypliną wyróżnioną, ponieważ wszystkie pojęcia matematyczne są redukowalne do pojęć teorii mnogości (i konsekwentnie — obiekty matematyczne są redukowalne do zbiorów).

strukturalistycznej mamy więc do czynienia ze strukturami, miejscami w strukturach, relacjami i funkcjami.

Pojęcie struktury jest przez Shapiro zaksjomatyzowane bezpośrednio, na wzór aksjomatyzacji (w logice drugiego rzędu) pojęcia zbioru. Nie ma tu miejsca na szczegółową techniczną prezentację, jednak przytoczę kilka przykładowych aksjomatów. Nieco upraszczam oryginalne wersje aksjomatów Shapiro, eliminując te fragmenty, które mówią o funkcjach (dla zrozumienia samej idei nie ma to znaczenia).

(1) Aksjomat nieskończoności: Istnieje co najmniej jedna struktura mająca nieskończenie wiele miejsc[25].

(2) Aksjomat odejmowania (*subtraction*): Niech S będzie strukturą, a R relacją z S. Istnieje wówczas struktura S^* izomorficzna z systemem składającym się z miejsc i relacji określonych na strukturze S, z wyjątkiem relacji R[26].

(3) Aksjomat podklasy (*subclass*): Niech S będzie strukturą, a c podklasą miejsc w S. Istnieje wówczas struktura S^* izomorficzna z systemem składającym się z c, ale bez relacji[27].

(4) Aksjomat dołączania (*addition*): Niech S będzie strukturą, zaś R dowolną relacją określoną na miejscach struktury S. Istnieje wówczas struktura S^* izomorficzna z systemem, który składa się z miejsc i relacji danych w strukturze S wraz z dołączoną relacją R[28].

(5) Aksjomat struktury potęgowej (*powerstructure*) stwierdza, że istnieje struktura, stanowiąca „imitację" zbioru potęgowego danej struktury S[29].

---

[25] Jest to odpowiednik teoriomnogościowego aksjomatu istnienia zbioru nieskończonego.

[26] Idea jest prosta: (1) Mamy strukturę S. (2) Pomijamy jedną relację R. (3) To nam tworzy pewien nowy system. (4) Zakładamy, że istnieje struktura S^*, izomorficzna z tym systemem.

[27] Idea jest taka: istnieją „gołe" struktury S^*, które imitują podzbiory „odarte" z relacji.

[28] Czyli istnieje struktura S^* polegająca na wzbogaceniu struktury S o pewną relację.

[29] Formalnie: Niech S będzie strukturą, zaś A — klasą miejsc w tej strukturze. Istnieje struktura P i dwuargumentowa relacja E określona w P taka, że dla dowolnego podzbioru $s \subseteq A$ istnieje miejsce x_s w strukturze P takie, że: $\forall z (z \in s \Leftrightarrow E(z, x_s))$. Relacja E „imituje" teoriomnogościową relację należenia.

Shapiro wprowadza także dalsze aksjomaty (analog aksjomatu zastępowania; aksjomat koherencji, wyrażający fakt, że każda spójna teoria opisuje pewną strukturę, oraz aksjomat refleksji). To ma zapewnić jego teorii struktur dostateczną siłę — odpowiadającą sile teorii mnogości[30]. Takie ujęcie uwalnia nas od konieczności uznania pojęcia należenia za pojęcie podstawowe. Teoria struktur ma więc bardziej uniwersalny charakter i stanowić to ma jej metodologiczną zaletę[31].

5. UWAGI KOŃCOWE

Ujęcie strukturalistyczne zdobywa coraz większą popularność. Sądzę jednak, że pod niektórymi względami nie odbiega aż tak bardzo od stanowiska realizmu obiektowego, jak to się może wydawać, i różnice są do pewnego stopnia werbalne. Niektóre tezy strukturalizmu są dość naturalne, jednak inne wydają się zbyt radykalne — i przez to mało wiarygodne. Sądzę, że w odniesieniu do wielu pojęć matematycznych mamy poczucie, iż nie mają one czysto strukturalnego charakteru —

Struktura P odgrywa niejako ową rolę zbioru potęgowego. Każdemu podzbiorowi $s \subseteq A$ odpowiada pewne miejsce x_s w strukturze P. Swobodnie mówiąc, to miejsce x_s będzie odgrywać rolę zbioru s. Relacja E w strukturze P ma więc imitować relację należenia.

[30]Shapiro przyznaje, iż jego koncepcja wzorowana jest na teorii mnogości drugiego rzędu: „Ostatecznie więc, teoria struktur stanowi przeróbkę teorii mnogości Zermelo-Fraenkla drugiego rzędu” [Shapiro 1997, 95]. Aksjomaty teorii struktur są w gruncie rzeczy wariantami (przeformułowaniami) aksjomatów teorii mnogości (choć sformułowane przy użyciu innych pojęć pierwotnych). Fakt ten ma znaczenie przy dyskusji „ontologicznych kosztów” stanowiska strukturalistycznego.

[31]Należy tu jednak powiedzieć, że sam Shapiro przyznaje, że nie stanowi to argumentu rozstrzygającego — teoria struktur i teoria mnogości są bowiem do siebie sprowadzalne. Ilustruje to wypowiedź Shapiro dotycząca różnych wariantów stanowiska strukturalistycznego: „W pewnym sensie, wszystkie mówią to samo, z użyciem innych pojęć pierwotnych. Sytuacja strukturalizmu jest podobna do sytuacji geometrii. Pierwotne mogą być punkty albo proste. Nie ma to znaczenia, ponieważ w obu wypadkach opisywana jest ta sama struktura” [Shapiro 1997, 97]. Te warianty można do siebie sprowadzić (oczywiście kosztem pewnych dodatkowych założeń). Wybór jest więc — do pewnego stopnia — kwestią gustu.

tak jest np. w przypadku pojęcia należenia. Jednak szczegółowa dyskusja tych zagadnień wykraczałaby poza ramy tego artykułu.

BIBLIOGRAFIA

Benacerraf P.,

[1965] "What Numbers Could Not Be", *Philosophical Review* 74, 47–73, [przedrukowane w:] *Philosophy of Mathematics*, [eds.:] Benacerraf P., Putnam H., wydanie drugie, 1983, Cambridge University Press, Cambridge, 272–294.

Bondecka-Krzykowska I.,

[2007] *Matematyka w ujęciu strukturalnym*, Wydawnictwa Naukowe UAM, Poznań.

Brink C., Revitzky I.,

[2002] "Three Dual Ontologies", *Journal of Philosophical Logic* 13, 543–568.

Chihara C.,

[2004] *A Structural Account of Mathematics*, Oxford University Press, Oxford.

Descartes R.,

[1958] *Prawidła kierowania umysłem; poszukiwanie prawdy przez światło przyrodzone rozumu*, PWN, Warszawa.

Heller M., Mączka J.,

[2004] „Strukturalizm w filozofii matematyki", *Kwartalnik Filozoficzny* XXXII (2), 5–22.

Hellman G.,

[1989] *Mathematics without Numbers*, Clarendon Press, Oxford.

Parsons C.,

[1990] "The Structuralist View of Mathematical Objects", *Synthese* 84, 303–346; [pol. tłum.:] „Strukturalizm o obiektach matematyki", [w:] *Współczesna filozofia matematyki*, [red.:] Murawski R., PWN, Warszawa 2002, 359–376

Quine W.V.O.,

[1998] *Od bodźca do nauki*, [tłum.:] Stanosz B., Alatheia, Warszawa.

Resnik M.D.,

[1981] "Mathematics as a Science of Patterns: Ontology", *Nous* 15, 529–550.

[1996] "Structural Relativity", *Philosophia Mathematica* 4, 83–99.

[1998] *Mathematics as a Science of Patterns*, Oxford University Press, Oxford.

Shapiro S.,

[1996] "Space, Number and Structure: A Tale of Two Debates", *Philosophia Mathematica* 3 (4), 148–173.

[1997] *Philosophy of Mathematics. Structure and Ontology*, Oxford University Press, New York, Oxford.

SUMMARY

MATHEMATICAL STRUCTURALISM AND ITS BASIC ASSUMPTIONS

The notion of a structure is one of the fundamental notions in mathematics: we speak of geometrical, topological, probabilistic, differential etc. structures. This notion is also important in the philosophical discussion concerning ontology for mathematics. In the last decades, the stance of mathematical structuralism attracts more and more attention. In this article I discuss the motivations which lie behind mathematical structuralism and briefly present Shapiro's *ante rem* structuralism.